ΤΟ (γ) ΘΕΛΕΙ ΙΔΙΑΙΤΕΡΗ ΠΡΟΣΟΧΗ!

ΑΣΚΗΣΗ 1η

α) i] $x = 159{,}52_{(10)}$ Δουλεύουμε ξεχωριστά ακέραιο και κλασματικό μέρος

159 | 2
1 | 79 | 2
1 | 39 | 2
1 | 19 | 2
1 | 9 | 2
1 | 4 | 2
0 | 2 | 2
0 | 1 | 2
1 | 0 → stop αλγορίθμου, άρα $159_{(10)} = 10011111_{(2)}$

τα υπόλοιπα ανάποδα

$0{,}52 \times 2 = 1{,}04$
$0{,}04 \times 2 = 0{,}08$ άρα $0{,}52_{(10)} \cong 0{,}10_{(2)}$ (με δύο δυαδικά ψηφία ακρίβεια)

ii] $y = 360{,}5_{(8)}$ Μετατρέπω από το οκταδικό στο δυαδικό σύστημα:

3 6 0 , 5
011 110 000 101 άρα $360{,}5_{(8)} = 011110000{,}101_{(2)}$

Μετατρέπω τον δυαδικό σε δεκαεξαδικό, χωρίζοντας τα ψηφία σε τετράδες, με άξονα την υποδιαστολή:

0000 | 1111 | 0000 | , 1010 ← προσθέτω όσα "0" χρειάζονται για να σχηματίσω τετράδα
0 F 0 A

άρα $360{,}5_{(8)} = 0F0{,}A_{(16)}$ ή $F0{,}A_{(16)}$

iii] $z = 1000101_{(2)}$ Ομαδοποιώ σε τριάδες τα δυαδικά ψηφία:
← προσθέτω "0" για να σχηματίσω τριάδα

010 | 000 | 101
2 0 5

άρα $1000101_{(2)} = 205_{(8)}$

β) $z = 10000101_{(2)}$

i] $1\times2^7 + 1\times2^2 + 1\times2^0 = 128 + 4 + 1 = 133_{(10)}$ ή $z = 10000101_{(2)} = 133_{(10)}$

ii] πρόσημο
~~1~~0000101 μέτρο
- είναι αρνητικός
- με μέτρο $0000101_{(2)} = 1\times2^2 + 1\times2^0 = 4 + 1 = 5_{(10)}$
- άρα είναι ο $-5_{(10)}$

iii] πρόσημο
10000101
- είναι αρνητικός
- με μέτρο $10000101 \xrightarrow{\Sigma 1} 0111 1010$

$+ \quad 1$

$01111011_{(2)} = 1\times2^6 + 1\times2^5 + 1\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = 123_{(10)}$

- άρα είναι ο $-123_{(10)}$

γ) $A = 01110110_{(2)} = 1\times2^6 + 1\times2^5 + 1\times2^4 + 1\times2^2 + 1\times2^1 = 118_{(10)}$

$B = 165_{(8)} = 1\times8^2 + 6\times8^1 + 5\times8^0 = 64 + 48 + 5 = 117_{(10)}$

και υπολογίζουμε τις διαφορές στο δεκαδικό, για τις επαληθεύσεις αργότερα:

$B - A = 117_{(10)} - 118_{(10)} = -1_{(10)}$ και $A - B = 118_{(10)} - 117_{(10)} = +1_{(10)}$

i] B−A στο δυαδικό σύστημα χρησιμοποιώντας 8 δυαδικά ψηφία:

Η πράξη της αφαίρεσης μετατρέπεται σε πρόσθεση του Συμπληρώματος ως προς 2 του αφαιρέτη

$B-A = B+(-A)|_{\Sigma 2}$ ← ενέργεια (action), όχι αναπαράσταση

B: $165_{(8)} = 001|110|101_{(2)} = 01110101_{(2)}$

$(-A)|_{\Sigma 2}$: $01110110 \xrightarrow{\Sigma 1} 10001001$

$$\begin{array}{r} 10001001 \\ +\quad 1 \\ \hline 10001010_{(\Sigma 2)} \end{array}$$

οπότε

$$\begin{array}{lr} B & 01110101 \\ (-A)|_{\Sigma 2} & +\ 10001010 \\ \hline & 11111111_{(\Sigma 2)} \end{array}$$

∼ • αρνητικός

• μεμέτρο $11111111 \xrightarrow{\Sigma 1} 00000000$

$$\begin{array}{r} 00000000 \\ +\quad 1 \\ \hline 00000001_{(2)} \end{array} = 1_{(10)}$$

• άρα είναι $0 - 1_{(10)}$ το οποίο είναι πράγματι σωστό

ii] A−B στο οκταδικό σύστημα χρησιμοποιώντας 3 οκταδικά ψηφία:

Η πράξη της αφαίρεσης μετατρέπεται σε πρόσθεση του Συμπληρώματος ως προς 8 του αφαιρέτη

$A-B = A+(-B)|_{\Sigma 8}$ ← ενέργεια (action), όχι αναπαράσταση

A: $01110110_{(2)} = 001|110|110 = 166_{(8)}$ (1, 6, 6)

$(-B)|_{\Sigma 8}$: $165_{(8)} \xrightarrow{\Sigma 7} 612$

$$\begin{array}{r} 612 \\ +\ 1 \\ \hline 613_{(\Sigma 8)} \end{array}$$

οπότε

$$\begin{array}{lr} & {}^{1\,1\,1} \\ A & 166 \\ (-B)|_{\Sigma 8} & +\ 613 \\ \hline & 001_{(\Sigma 8)} \end{array}$$

→ • θετικός

• μεμέτρο $001_{(8)} = 1_{(10)}$

• άρα είναι $0 + 1_{(10)}$ το οποίο είναι πράγματι σωστό

ΑΡΚΕΤΑ ΔΥΣΚΟΛΗ ΑΣΚΗΣΗ, ΜΕ ΙΔΙΑΙΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΕΠΟΜΕΝΩΣ ΜΕΓΑΛΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΛΟΓΟΚΛΟΠΗΣ!!!

ΑΣΚΗΣΗ 2η

Σύμφωνα με το IEEE 754 πρότυπο για αναπαράσταση αριθμών κινητής υποδιαστολής:

sign, δύναμη 2, mantissa

$$N_{(10)} = (-1)^s \times 2^{e_{biased}-bias} \times i,f$$

πολωμένος εκθέτης

implicit bit
i=0: denormalized
i=1: normalized

fraction

όπου $bias = 2^{\text{bits εκθέτη}-1} - 1$

και εκθέτης $e = e_{biased} - bias$

με $e = -bias+1$ αν $e_{biased} = 0$ και $f \neq 0$ οπότε $i=0$

και $-bias+1 \leq e \leq bias$ όταν $e_{biased} \neq 0$ οπότε $i=1$

$e_{biased}=0,\ f=0 \sim$ το $\emptyset$

$e_{biased}=0,\ f\neq 0 \rightarrow$ denormalized, $i=0$

$1 \leq e_{biased} \leq 2\times bias \rightarrow$ normalized, $i=1$

$e_{biased} = 2\times bias+1,\ f=0 \sim \infty$

$e_{biased} = 2\times bias+1,\ f\neq 0 \rightarrow$ NaN (Not A Number)

a) $A = +5,84375_{(10)}$

$5 / 2 = 2$, υπόλοιπο 1; $2 / 2 = 1$, υπόλοιπο 0; $1 / 2 = 0$, υπόλοιπο 1 άρα $5_{(10)} = 101_{(2)}$

$0,84375 \times 2 = 1,6875$

$0,6875 \times 2 = 1,375$

$0,375 \times 2 = 0,75$

$0,75 \times 2 = 1,5$

$0,5 \times 2 = 1,0$ άρα $0,84375_{(10)} = 0,11011_{(2)}$ επομένως

$bias = 2^{5-1}-1 = 2^4-1 = 16-1 = 15$

$+5,84375_{(10)} = +101,11011_{(2)} = (-1)^0 \times 101,11011 \times 2^0 = (-1)^0 \times 1,0111011 \times 2^2$

Δηλαδή $s=0,\ i=1,\ f = 01110110$ και $e=2$ άρα $e_{biase} = 2+15 = 17_{(10)} = 10001_{(2)}$

προσθήκη για 8 ψηφία

$A = +5,84375_{(10)} = 0\ 10001\ 01110110_{(IEEE754-14bits)}$

$B = -1,65625_{(10)}$

$1_{(10)} = 1_{(2)}$

$0,65625 \times 2 = 1,3125$

$0,3125 \times 2 = 0,625$

$0,625 \times 2 = 1,25$

$0,25 \times 2 = 0,5$

$0,5 \times 2 = 1,0$ άρα $0,65625_{(10)} = 0,10101_{(2)}$ επομένως

$-1,65625_{(10)} = -1,10101_{(2)} = (-1)^1 \times 1,10101 \times 2^0$

Δηλαδή $s=1,\ i=1,\ f = 10101000$ και $e=0$ άρα $e_{biased} = 0+15 = 15_{(10)} = 01111_{(2)}$

προσθήκη για 8 ψηφία

$B = -1,65625_{(10)} = 1\ 01111\ 10101000_{(IEEE754-14bits)}$

Παρατήρηση: Σε όλες τις μετατροπές δεν απαιτήθηκε η χρήση των 3 guard bits β) Από την εκφώνηση έχουμε $\pm 1,M \times 2^{\pm E}$ (implicit bit), επομένως μιλάμε για κανονικοποιημένους αριθμούς (normalized)

Ο πολωμένος εκθέτης θα πρέπει να είναι $1 \le E' \le 2\times bias$ αφού $\begin{cases} \bullet \text{ για } E'=0 \text{ έχω το } 0 \text{ ή denormalized} \\ \bullet \text{ για } E'=2\times bias+1 \text{ έχω το } \infty \text{ ή NaN} \end{cases}$

$1 \le E' \le 2\times bias \Leftrightarrow -bias+1 \le E'-bias \le 2\times bias - bias \Leftrightarrow -bias+1 \le E \le bias$ ή εδώ $-14 \le E \le 15$, έτσι:

- ο μικρότερος θετικός αριθμός (normalized) είναι ο $+1,00000000 \times 2^{-14}$
- ο μεγαλύτερος αρνητικός αριθμός (normalized) είναι ο $-1,00000000 \times 2^{-14}$
- ο μεγαλύτερος θετικός αριθμός είναι ο $+1,11111111 \times 2^{15}$
- ο μικρότερος αρνητικός αριθμός είναι ο $-1,11111111 \times 2^{15}$

γ) Οι 2 αριθμοί είναι ετερόσημοι, παίρνουμε λοιπόν τον μικρότερο κατά απόλυτη τιμή (με μικρότερο εκθέτη ή/και κλασματικό μέρος), τον αποκανονικοποιούμε εξισώνοντας τους εκθέτες και τον αφαιρούμε από τον άλλο (εδώ χρησιμοποιούμε και τα guard bits)

$$A = 0\ 10001\ (1)\underline{01110110} \rightarrow 0\ 10001\quad (1),\underline{01110110}(000)$$
$$B = 1\ 01111\ (1)\underline{10101000} \rightarrow 1\ 10001\ -\ 0,0(1)\underline{101010}(00,0)$$
$$(1),\underline{00001100}(000)$$

κρυμμένα (implicit) bits — guard bits

(εναλλακτικά, μπορούμε να ανάγουμε την αφαίρεση σε πρόσθεση του Σ_2)

Κανονικοποιούμε το αποτέλεσμα (αν χρειαστεί) και βάζουμε ως πρόσημο αυτό του μεγαλύτερου κατά απόλυτη τιμή. Εδώ δεν χρειάστηκε κανονικοποίηση, επομένως

$$A+B = 0\ 10001\ 00001100_{(IEEE)} \text{ ή } +1,00001100 \times 2^2 = +100,0011_{(2)} = +4,1875_{(10)}$$

Πράγματι, $+5,84375_{(10)} - 1,65625_{(10)} = +4,1875_{(10)}$

δ) Για τον πολλαπλασιασμό, προσθέτουμε τους 2 πολωμένους εκθέτες και αφαιρούμε ένα bias, πολλαπλασιάζουμε τα κλασματικά και κανονικοποιούμε αν χρειαστεί, ως πρόσημο εδώ βάζουμε το αποκλειστικό "ή" (XOR) των δύο

$$A = 0\ \ 10001\ \ (1),01110110(000)$$
$$B = \oplus\ 1\ \ +\ 01111\ \ \times\ (1),10101000(000)$$
$$\overline{1\ \ 100000\ \ 10,0110101101110000} \rightarrow (1),00110101(\cancel{1}01)\cancel{110000} \times 2^{+1}$$
$$-\ 1111 \qquad\qquad + \quad 1$$
$$\overline{10001} + 1 = 10010 \qquad \overline{(1),00110110}$$

επομένως

$$A\times B = 1\ 10010\ 00110110_{(IEEE)} \text{ ή } -1,00110110 \times 2^3 = -1001,1011_{(2)} = -9,6875_{(10)}$$

Το ακριβές αποτέλεσμα είναι $(+5,84375)_{(10)} \times (-1,65625)_{(10)} = -9,6787109375_{(10)}$

και το σφάλμα που έγινε $\dfrac{-9,6875-(-9,6787109375)}{-9,6787109375} = \dfrac{-0,0087890625}{-9,6787109375} \simeq 0,00091$ ή $0,091\%$

Παρατήρηση: ουσιαστικά πρόσθεσα μία ποσότητα $2^{-8+3} = 2^{-5}$ ενώ κανονικά είχα $2^{-6}+2^{-8}+2^{-9}+2^{-10}$, δηλαδή $\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\frac{1}{1024}-\frac{1}{32} = -0,0087890625$ η πραγματική απόκλιση

ΑΣΚΗΣΗ 3η

α) Θα αναπτύξω τις συναρτήσεις σε άθροισμα κανονικών γινομένων ή σε γινόμενο κανονικών αθροισμάτων (ότι είναι βολικότερο για καθεμία από αυτές)

$$f(x,y,z) = \overline{(\bar{x}+y)(\bar{y}+z)} + (\bar{x}+z) = \overline{(\bar{x}+y)} + \overline{(\bar{y}+z)} + (\bar{x}+z) =$$

$$= \bar{\bar{x}}\bar{y} + \bar{\bar{y}}\bar{z} + \bar{x} + z = \underbrace{x\bar{y} + y\bar{z} + \bar{x}}_{} + z =$$

$$\bar{x} + x\bar{y} = (\bar{x}+x)+(\bar{x}+\bar{y}) = 1\cdot(\bar{x}+\bar{y}) = \bar{x}+\bar{y}$$

$$= \bar{x} + \bar{y} + \underbrace{y\bar{z} + z}_{} =$$

$$y\bar{z} + z = (y+z)(\bar{z}+z) = (y+z)\cdot 1 = y+z$$

$$= \bar{x} + \bar{y} + y + z = \bar{x} + (\bar{y}+y) + z = \bar{x} + 1 + z = 1$$

$$g(x,y,z) = (xy+\bar{x})z + xy\bar{z} + x\bar{y} + \bar{x}\bar{z} =$$

$$= \underbrace{xyz + \bar{x}z + xy\bar{z}}_{} + x\bar{y} + \bar{x}\bar{z} =$$

$$xyz + xy\bar{z} = xy(z+\bar{z}) = xy\cdot 1 = xy$$

$$= \underbrace{xy + \bar{x}z + x\bar{y}}_{} + \bar{x}\bar{z} = x + \underbrace{\bar{x}z + \bar{x}\bar{z}}_{} = x + \bar{x} = 1$$

$$xy + x\bar{y} = x(y+\bar{y}) = x \qquad \bar{x}z + \bar{x}\bar{z} = \bar{x}(z+\bar{z}) = \bar{x}$$

Επομένως οι f και g ταυτίζονται (και μάλιστα είναι πάντα αληθείς!)

β) $$f(x,y,z,w) = xy + zw = xy(z+\bar{z})(w+\bar{w}) + (x+\bar{x})\cdot(y+\bar{y})zw =$$

$$= \underbrace{xyzw + xyz\bar{w} + xy\bar{z}w + xy\bar{z}\bar{w} + \cancel{xyzw}}_{} + x\bar{y}zw + \bar{x}yzw + \bar{x}\bar{y}zw =$$

$$= \underset{m_{15}}{xyzw} + \underset{m_{14}}{xyz\bar{w}} + \underset{m_{13}}{xy\bar{z}w} + \underset{m_{12}}{xy\bar{z}\bar{w}} + \underset{m_{11}}{x\bar{y}zw} + \underset{m_{7}}{\bar{x}yzw} + \underset{m_{3}}{\bar{x}\bar{y}zw} =$$

$$= \Sigma(3,7,11,12,13,14,15)$$

Για την g, θα χρησιμοποιήσω το εξής τέχνασμα:

$$\bar{g}(x,y,z,w) = \overline{f(x,y,z,w)\cdot\bar{y}\cdot w} = \bar{\bar{f}}(x,y,z,w) + \bar{\bar{y}} + \bar{w} = f(x,y,z,w) + y + \bar{w} =$$

$$= \underbrace{xy + zw + y}_{} + \bar{w} = y + \underbrace{zw + \bar{w}}_{} = y + z + \bar{w} =$$

$$xy + y = (x+1)y = 1\cdot y = y \qquad zw + \bar{w} = (z+\bar{w})(w+\bar{w}) = z+\bar{w}$$

$$= x\bar{x} + (y+z+\bar{w}) = \underset{M_1}{(x+y+z+\bar{w})}\underset{M_9}{(\bar{x}+y+z+\bar{w})} = \Pi(1,9)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4η

α)

f: ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	x	x	0
11	0	x	1	0
10	0	0	x	0

για το άθροισμα γινομένων, ομαδοποιώ τους "1"

$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{c} + bd$

g: ab \ cd	00	01	11	10
00	x	0	x	1
01	0	1	0	1
11	x	x	x	x
10	1	x	0	1

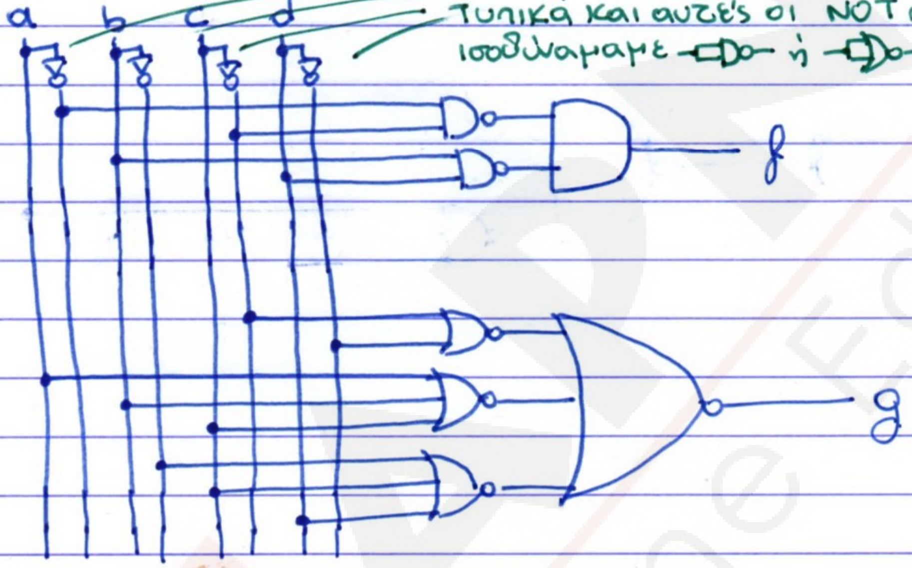
για το γινόμενο αθροισμάτων, ομαδοποιώ τα "0"

$g(a,b,c,d) = (\bar{c}+\bar{d})\cdot(a+b+c)(\bar{b}+c+d)$

β) $f(a,b,c,d) = \overline{\overline{\bar{a}\bar{c}+bd}} = \overline{\overline{\bar{a}\bar{c}}\cdot\overline{bd}}$

$g(a,b,c,d) = \overline{\overline{(\bar{c}+\bar{d})\cdot(a+b+c)\cdot(\bar{b}+c+d)}} = \overline{\overline{\bar{c}+\bar{d}} + \overline{a+b+c} + \overline{\bar{b}+c+d}}$

Τυπικά και αυτές οι NOT πρέπει να αντικατασταθούν ισοδύναμα με -NAND- ή -NOR-, ανάλογα του κυκλώματος



γ) Με λίγο "πείραμα στον ΠΑ" παρατηρούμε ότι $f = \bar{g}$ ή ισοδύναμα $g = \bar{f}$:

a	b	c	d	f	g
0	0	0	0	1	~~x~~ 0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	~~x~~ 1
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	~~x~~ 0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	~~x~~ 1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	~~x~~ 1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	~~x~~ 1	0
1	1	0	0	0	~~x~~ 1
1	1	0	1	x	x
1	1	1	0	0	~~x~~ 1
1	1	1	1	1	~~x~~ 0

g: ab \ cd	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	0	1
11	1	x	0	1
10	1	1	0	1

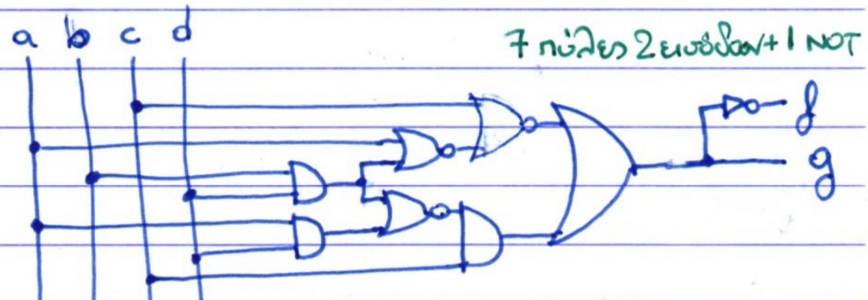
$\bar{c}(a+bd) = \overline{\overline{\bar{c}(a+bd)}} = \overline{c+\overline{a+bd}}$

$g = a\bar{c} + c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c + b\bar{c}d =$

$c(\bar{d}+\bar{a}\bar{b}) = c\cdot\overline{\overline{d\cdot\overline{\bar{a}\cdot\bar{b}}}} = c\cdot\overline{d(a+b)} = c\cdot\overline{ad+bd}$

$= \overline{c+\overline{a+bd}} + c\cdot\overline{ad+bd}$

7 πύλες 2 εισόδων + 1 NOT



Πιθανώς να υπάρχουν και απλούστερα κυκλώματα, αυτό όμως είναι αρκετά "κομψό"

ΠΟΛΥ ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ!

ΑΣΚΗΣΗ 5η

Θεωρούμε τους διακόπτες (μεταβλητές εισόδου) A, B, C και D που αντιστοιχούν στην <u>εντολή ενεργοποίησης</u> (και όχι στην αυτόματη ενεργοποίηση) καθενός από τους αντίστοιχους κινητήρες K_1, K_2, K_3 και K_4, όπως περιγράφονται στην εκφώνηση.

α)

A	B	C	D	K_1	K_2	K_3	K_4
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0 0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0 0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0 0	0 0 0	0 0	0 0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0				0
1	1	1	1	0 0	0 0	0 0 0	0 0

$K_1 = A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}C\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + ABC\bar{D}$

$K_2 = AB\bar{C}\bar{D} + ABC\bar{D}$

$K_3 = \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + ABC\bar{D} + ABC\bar{D}$

$K_4 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}D$

Σημείωση: σημειώνω τα cut-off για τα (1), (2) και (3), τα υπόλοιπα ακολουθούν τους διακόπτες

β)

K_1:

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	0	0	1
10	1	1	0	1

K_2:

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	0	0	1
10	0	0	0	0

K_3:

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	0	1
10	0	0	0	1

K_4:

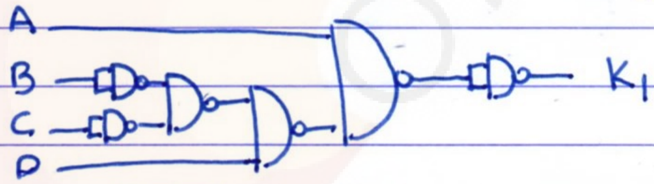
AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	1	0	0

$K_1 = A\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}$ $\quad K_2 = AB\bar{D}$ $\quad K_3 = C\bar{D}$ $\quad K_4 = \bar{B}\bar{C}D$

γ) • Για να κινείται η ταινία μεταφοράς (ενώ έχει δοθεί η εντολή B) θα πρέπει να λειτουργεί (A) και να μην λειτουργεί το κατακόρυφο πριόνι ($\bar{D}$)

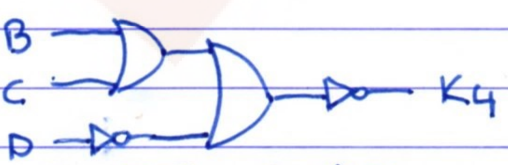
• Για να λειτουργεί το κατακόρυφο πριόνι (δηλαδή ενώ έχει δοθεί η εντολή D) θα πρέπει να μην λειτουργεί ούτε η ταινία μεταφοράς ($\bar{B}$) <u>ούτε και το</u> οριζόντιο πριόνι ($\bar{C}$)

δ) $K_1 = A\bar{D} + A\bar{B}\bar{C} = A(\bar{D} + \bar{B}\bar{C}) = A\left(\overline{D \cdot \overline{\bar{B} \cdot \bar{C}}}\right) = \overline{\overline{A \cdot \left(\overline{D \cdot \overline{\bar{B} \cdot \bar{C}}}\right)}}$



με 6 πύλες NAND 2 εισόδων

$K_4 = \bar{B}\bar{C}D = \overline{\overline{\bar{B}\bar{C}D}} = \overline{B + C + \bar{D}} = \overline{(B + C) + \bar{D}}$



με 2 πύλες OR 2 εισόδων και 2 NOT

$K_3 = C\bar{D} = \overline{\overline{C\bar{D}}} = \overline{\bar{C} + D}$

με 1 πύλη OR και 2 NOT (νέα εκφώνηση)