Κεφ. 2.3. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 –

Μαθηματικά Προσανατολισμού Β’ Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course Των Μαθηματικών, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 – Κωδικοί:

15440, 16194, 16425, 16759, 16769, 16771, 16774, 16810, 17805, 18240, 18733, 18979, 20864, 20885, 20926

1. Θέμα 15440

Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$ και $\Gamma(1,1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ ορίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες των διανυσμάτων είναι:

$$\overrightarrow{AB} = (3-0, 0-2) = (3, -2) \text{ και } \overrightarrow{A\Gamma} = (1-0, 1-2) = (1, -1).$$

β)

i. Η ορίζουσα των διανυσμάτων είναι:

$$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0.$$

Για να σχηματίζεται τρίγωνο πρέπει τα διανύσματα να μην είναι παράλληλα, διαφορετικά τα τρία σημεία θα είναι συνευθειακά.

Αφού λοιπόν $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \neq 0$ τότε τα σημεία A, B και Γ ορίζουν τρίγωνο.

ii. Αφού είναι $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = -1$, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}|-1| = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

2. Θέμα 16194 Αρχέτυπο

Δίνονται οι ευθείες (ε_1) : 8χ +ψ−28 = 0, (ε_2) : χ −ψ+1 = 0, (ε_3) : 3χ+4ψ+5=0.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Μ των (ε_1) και (ε_2).

(Μονάδες 09)

β) Αν το σημείο τομής είναι το Μ(3,4) να υπολογίσετε:

i. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 08)

ii. Την απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία (ε_3). (Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις των δύο ευθειών.

$\begin{cases} 8x + y = 28 \\ x - y = -1 \end{cases}$ και παίρνουμε 9x = 27, άρα x = 3. Αντικαθιστούμε στην x – y = -1 το x =3 και έχουμε y = 4. Άρα M(3,4).

β)

i. O=(0,0), άρα το διάνυσμα $\overrightarrow{OM} = (3-0, 4-0) = (3,4)$

$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

ii. d(M,ζ) = $\frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{30}{5} = 6$

3. Θέμα 16425

Δίνονται οι ευθείες: ε_1: y = $\frac{2}{3}$x + 1 και ε_2: x = $\frac{3}{2}$y + 9.

α) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $ε_1$: y = $\frac{2}{3}$x + 1 με $λε_1 = \frac{2}{3}$.

Επίσης: $ε_2$: x = $\frac{3}{2}$y + 9 ή $ε_2$: 2x = 3y + 18 ή $ε_2$: 2x - 3y – 18 = 0, με $λε_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$.

Οπότε $λε_1 = λε_2$, άρα $ε_1 // ε_2$.

β) Από την εξίσωση της $ε_1$ για x = 3, βρίσκουμε το y = 3, οπότε συμπεραίνουμε ότι το σημείο Α(3 , 3) ∈ $ε_1$, επομένως:

$$d(ε_1 , ε_2) = d(A , ε_2) = \frac{|2\cdot3-3\cdot3-18|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{|-21|}{\sqrt{13}} = \frac{21}{\sqrt{13}} = \frac{21\sqrt{13}}{13} .$$

4. Θέμα 16759

Δίνονται οι ευθείες ($ε_1$), ($ε_2$) και ($ε_3$) με εξισώσεις $x - 2y = -1$, $2x + y = 4$ και $y = -1$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ($ε_1$) και ($ε_2$) είναι κάθετες.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ($ε_1$) και ($ε_2$) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ($ε_3$).

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

Δίνονται οι ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3) με εξισώσεις $x-2y=-1$, $2x+y=4$ και $y=-1$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε_3).

(Μονάδες 8)

5. Θέμα 16769 Αρχέτυπο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(1,7), Β(-1,5) και Γ(3,3).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

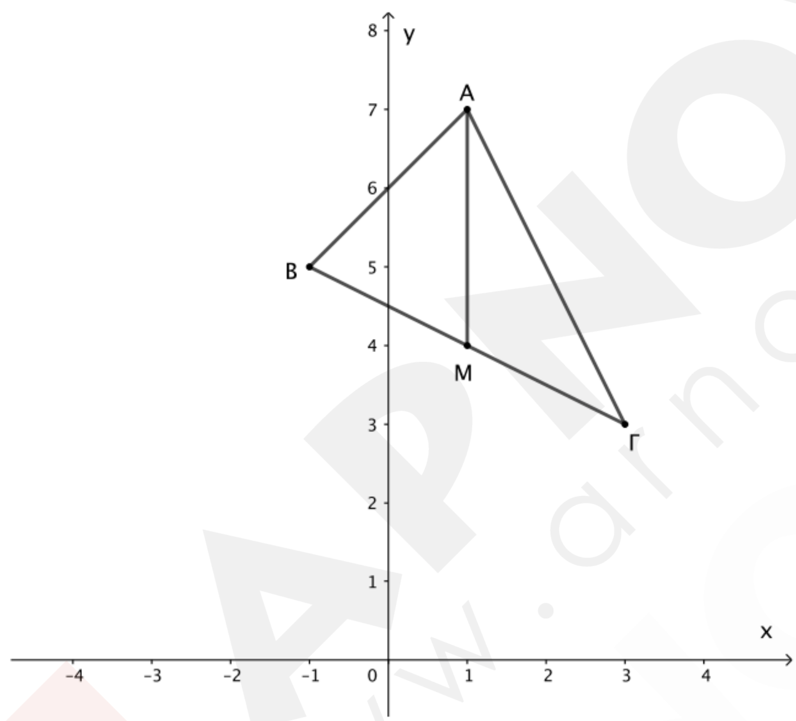
(Μονάδες 09)

β) Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε να υπολογίσετε:

i. Τις συντεταγμένες του Μ.
ii. Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.

(Μονάδες 16)

ΛΥΣΗ



α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\text{ΑΒ}},\overrightarrow{\text{ΒΓ}}\right)\right|$$

όπου

$$\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \left(x_B - x_A, y_B - y_A\right) = (-1-1, 5-7) = (-2, -2)$$

$$\overrightarrow{\text{ΒΓ}} = \left(x_Γ - x_B, y_Γ - y_B\right) = (3+1, 3-5) = (4, -2)$$

Οπότε:

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|4+8| = 6$$

β)

i. Το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ είναι:

$$Μ\left(\frac{x_Β + x_Γ}{2}, \frac{y_Β + y_Γ}{2}\right) = (1,4)$$

ii. Παρατηρούμε ότι για τα σημεία Α και Μ είναι $x_Μ = x_Α = 1$. Επομένως, η ευθεία ΑΜ είναι κατακόρυφη (δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας), οπότε έχει εξίσωση $x = 1$.

6. Θέμα 16771

Δίνονται τα σημεία Α(2,1), Γ(4,-1) και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (3,-1)$.

α) Να βρεθεί το σημείο Β.

(Μονάδες 09)

β) Αν Β(5,0):

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

$$(3,-1) = (x_B - 2, y_B - 1)$$

Επομένως:

$x_B - 2 = 3$ ή $x_B = 5$ και $y_B - 1 = -1$ ή $y_B = 0$, άρα Β(5,0).

β)

i. $\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A) = (4-2, -1-1) = (2,-2)$ και $\overrightarrow{AB} = (3,-1)$.

Για να σχηματίζουν τρίγωνο αρκεί $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) \neq 0$.

Πράγματι,

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - 2(-1) = -6 + 2 = -4$$

Επομένως, τα σημεία Α ,Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}|-4| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ τ.μ.}$$

7. Θέμα 16774 Αρχέτυπο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(2,5), Β(3,6) και Γ(-1,-2).

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ.

(Μονάδες 07)

β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το Α.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΑΒ με τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ θα είναι:

$$\lambda_{ΒΓ}=\frac{y_Γ-y_Β}{x_Γ-x_Β}=\frac{-2-6}{-1-3}=\frac{-8}{-4}=2$$

β) Έστω ΑΚ το ύψος από το Α. Τότε $ΑΚ\perp ΒΓ$, οπότε $\lambda_{ΑΚ}\lambda_{ΒΓ}=-1$. Οπότε $\lambda_{ΑΚ}\cdot 2=-1$, άρα $\lambda_{ΑΚ}=-\frac{1}{2}$.

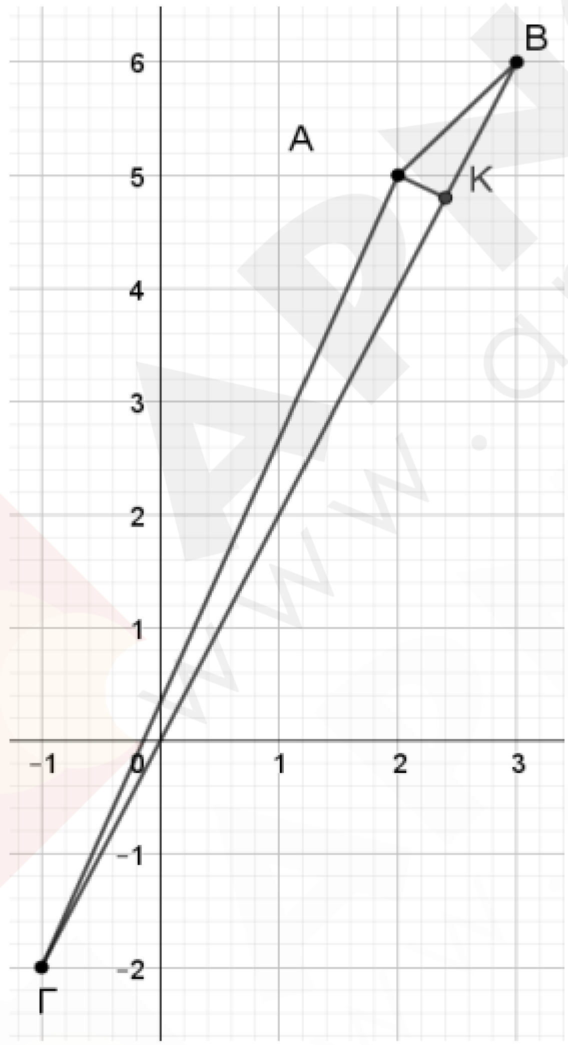
Η εξίσωση της ευθείας ΑΚ θα είναι:

$$y-y_Α=\lambda_{ΑΚ}\left(x-x_Α\right) \text{ ή } y-5=-\frac{1}{2}(x-2) \text{ ή } y=-\frac{1}{2}x+1+5 \text{ ή } y=-\frac{1}{2}x+6$$

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{6-5}{3-2}=\frac{1}{1}=1$ και ισούται

με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ΑΒ με τον xx′, δηλαδή:

$\lambda_{AB}=\varepsilon\varphi\omega=1$, άρα $\omega=\frac{\pi}{4}$.



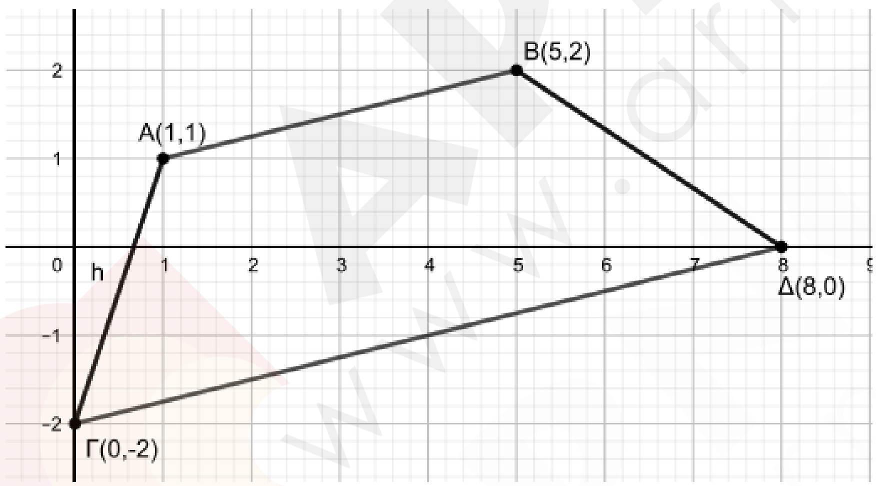
8. Θέμα 16810 Αρχέτυπο

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία Α(1,1), Β(5,2), Γ(0,-2) και Δ(8,0).

α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου του ερωτήματος α). (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ



α) Τοποθετούμε τα σημεία στο επίπεδο όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Για να είναι το τετράπλευρο ΑΒΔΓ τραπέζιο αρκεί να αποδείξουμε ότι οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες και οι πλευρές ΑΓ και ΒΔ τέμνονται.

Είναι $\lambda_{AB}=\frac{2-1}{5-1}=\frac{1}{4}$ και $\lambda_{\Gamma\Delta}=\frac{0+2}{8-0}=\frac{1}{4}$. Άρα ΑΒ // ΓΔ.

$\lambda_{A\Gamma}=\frac{-2-1}{0-1}=3$ και $\lambda_{B\Delta}=\frac{0-2}{8-1}=-\frac{2}{7}$. Άρα $\lambda_{A\Gamma}\neq\lambda_{B\Delta}$ και οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ δεν είναι παράλληλες.

β) Για το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΔΓ έχουμε: (ΑΒΔΓ) = (ΑΒΔ) + (ΑΓΔ) (1).

Για τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ υπολογίζουμε πρώτα τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΓ}$, $\overrightarrow{ΑΔ}$ και $\overrightarrow{ΑΒ}$ και έχουμε:

$\overrightarrow{ΑΓ}$ = (0-1,-2-1) = (-1,-3)

$\overrightarrow{ΑΔ}$ **=** (8-1, 0-1) = (7,-1)

$\overrightarrow{ΑΒ}$ = (5-1, 2-1) = (4,1)

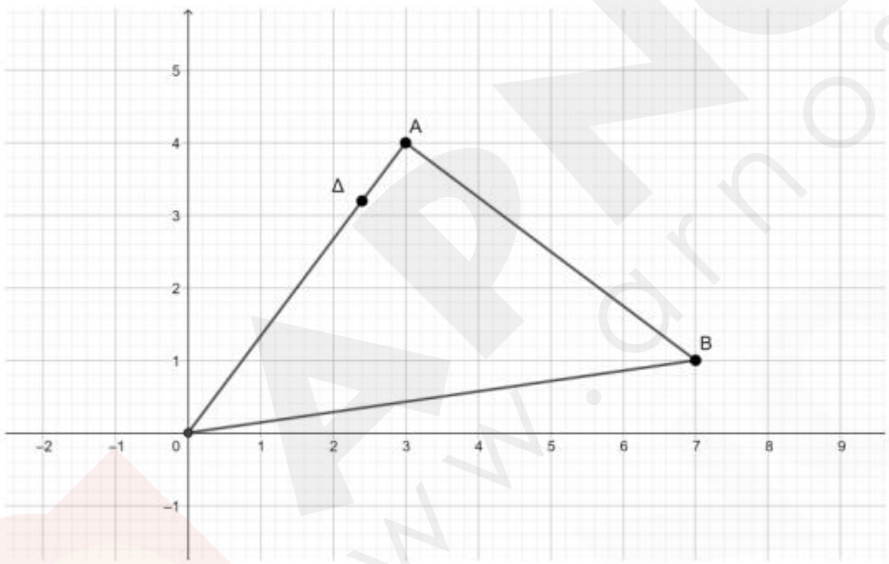
det($\overrightarrow{ΑΓ}$, $\overrightarrow{ΑΔ}$)=$\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$ = 22, det($\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΑΔ}$)=$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$ = -11

(ΑΒΔ) = $\frac{1}{2}$ | det($\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΑΔ}$)| = $\frac{11}{2}$ τ.μ. και (ΑΓΔ) =$\frac{1}{2}$ | det($\overrightarrow{ΑΓ}$, $\overrightarrow{ΑΔ}$)|= 11 τ.μ.

Οπότε η σχέση (1) γίνεται: (ΑΒΔΓ) = $\frac{11}{2}$ + 11 = $\frac{33}{2}$ τ.μ.

9. Θέμα 17805

Δίνεται το τρίγωνο AOB με $A(3,4)$, $B(7,1)$, O η αρχή των αξόνων και το σημείο $\Delta\left(\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$ της πλευράς AO.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.

(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}=-\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$.

γ) Δίνεται ότι $(OAB)=\frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. Να δείξετε ότι $(A\Delta B)=\frac{1}{5}(OAB)$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι σύμφωνα με το σχήμα $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,4)$.

Ακόμα $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=(x_\Delta-x_\mathrm{A},y_\Delta-y_\mathrm{A})=\left(\frac{12}{5}-3,\frac{16}{5}-4\right)=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

β) Έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)=-\frac{1}{5}(3,4)=-\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

γ) Είναι $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A},y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})=(4,-3)$.

Έχουμε $(\mathrm{A\Delta B})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}},\overrightarrow{AB}\right)\right|\overset{\beta)}{=}\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ 4 & -3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|\frac{9}{5}+\frac{16}{5}\right|=\frac{5}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

Έχει δοθεί $(\mathrm{OAB})=\frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες, επομένως $(\mathrm{A\Delta B})=\frac{5}{2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{25}{2}=\frac{1}{5}(\mathrm{OAB})$.

10. Θέμα 18240

Δίνεται το σημείο $\mathrm{A}(1,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=x+3$.

α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε).

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ε).

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες $(\eta),(\varepsilon)$.

(Μονάδες 10)

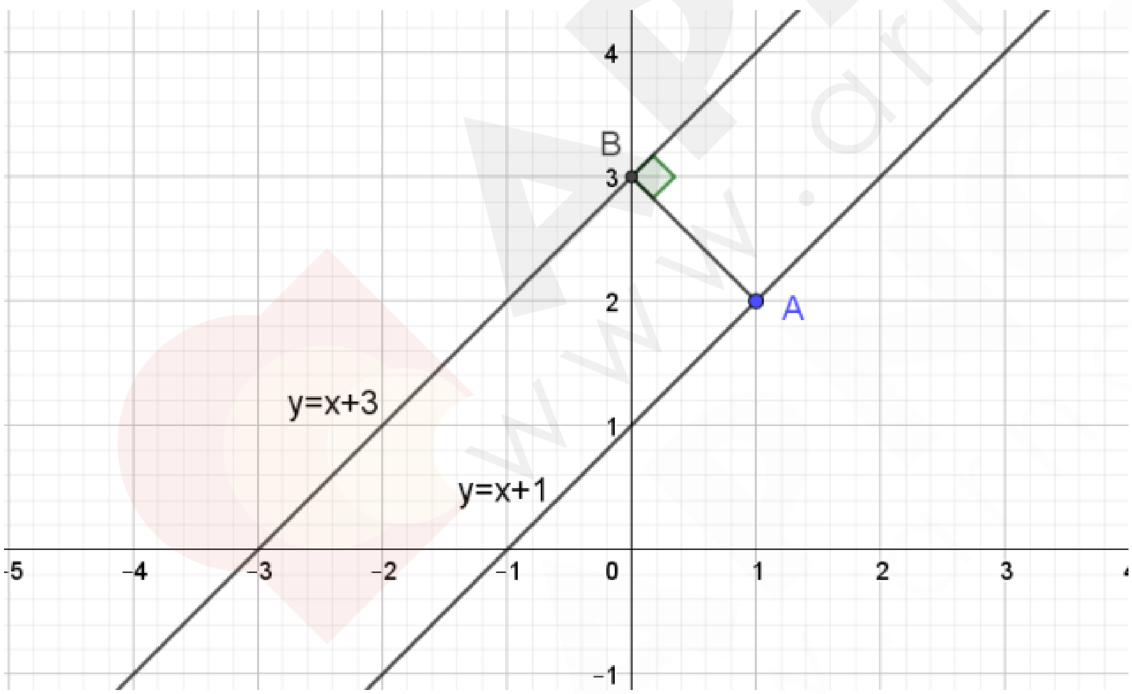
ΛΥΣΗ

α) Είναι $(\varepsilon): y = x+3 \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$, οπότε $d(\mathrm{A},\varepsilon) = \dfrac{|1-2+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

β) Είναι $(\eta)//(\varepsilon)$ οπότε $\lambda_\eta = \lambda_\varepsilon = 1$ και αφού η (η) διέρχεται από το $\mathrm{A}(1,2)$ θα έχει εξίσωση

$$y - 2 = 1\cdot(x-1) \Leftrightarrow y = x+1.$$

γ) Οι ευθείες (η), (ε) φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



11. Θέμα 18733

Δίνονται τα σημεία $A(4,3)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(6,0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

γ) Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA)=(MB)$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB}=(1-4,1-3)=(-3,-2)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma}=(6-4,0-3)=(2,-3)$.

β) Έχουμε $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=-3\cdot 2+(-2)(-3)=0$, άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

γ) Είναι $(MA)=\sqrt{\left(4-\frac{7}{2}\right)^2+\left(3-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$ και

$(MB)=\sqrt{\left(1-\frac{7}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$. Άρα $(MA)=(MB)$.

Εναλλακτική Λύση

Παρατηρούμε για τις συντεταγμένες του σημείου M ότι ισχύει $\begin{cases} \frac{7}{2}=\frac{1+6}{2}=\frac{x_{\mathrm{B}}+x_{\Gamma}}{2} \\ \frac{1}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{y_{\mathrm{B}}+y_{\Gamma}}{2} \end{cases}$,

δηλαδή το σημείο M είναι το μέσον της υποτείνουσας $\mathrm{B\Gamma}$. Από το β) ερώτημα η γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$ είναι ορθή και από την Ευκλείδεια γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το μέσον υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου ισαπέχει από τις κορυφές του, άρα $(\mathrm{MA})=(\mathrm{MB})$.

12. Θέμα 18979

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+3y=5$ και $\varepsilon_2: 4x+6y=8$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας ε_1.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε_2.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, με $\lambda_1 = -\frac{2}{3}$ και $\lambda_2 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$.

Άρα οι ευθείες είναι παράλληλες.

β) Οι συντεταγμένες του σημείου $A(1,1)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε_1, αφού $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$. Άρα το σημείο A ανήκει στην ευθεία ε_1.

γ) Είναι:

$$d(A, \varepsilon_2) = \frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|4\cdot 1+6\cdot 1-8|}{\sqrt{4^2+6^2}} = \frac{2}{\sqrt{52}} = \frac{2}{\sqrt{4\cdot 13}} = \frac{2\cdot\sqrt{13}}{2\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13},$$

με ε_2: $4x + 6y - 8 = 0$.

13. Θέμα 20864

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + y + 2 = 0$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να δείξετε ότι το σημείο $A(0,6)$ ανήκει στην ευθεία ε_1.

(Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία $\varepsilon_1: 2x+y-6=0$ γράφεται και $\varepsilon_1: y=-2x+6$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=-2$.

Η ευθεία $\varepsilon_2: 2x+y+2=0$ γράφεται και $\varepsilon_2: y=-2x-2$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=-2$.

Επειδή $\lambda_1=\lambda_2$, οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

β)

i. Το σημείο $\mathrm{A}(0,6)$ είναι σημείο της ε_1, αφού $2\cdot 0+6-6=0$.

ii. Η απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία $\varepsilon_2: 2x+y+2=0$. Άρα:

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d\left(\mathrm{A},\varepsilon_2\right)=\frac{|2\cdot 0+1\cdot 6+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

14. Θέμα 20885

Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(-3, -1) και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες x'x και y'y, είναι: Ε = 8. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον η ε σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\frac{3\pi}{4}$, θα είναι λ = εφ$\frac{3\pi}{4}$ = - 1, οπότε

ε: $y - y_A = \lambda(x - x_A)$ ή ε: y + 1 = -1 (x + 3) ή ε: y = - x - 3 - 1 ή ε: y = - x - 4.

β) Από την εξίσωση της ευθείας ε για x = 0, το y = - 4. Επίσης για y = 0, το x = - 4 .

Άρα η ε τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Κ(- 4, 0) και τον y'y στο Λ(0, - 4).

Επομένως (ΟΚΛ) = $\frac{1}{2}$ (ΟΚ)·(ΟΛ) = $\frac{1}{2}$ $|x_K|\cdot|y_\Lambda|$ = $\frac{1}{2}$ $|-4|\cdot|-4|$ = $\frac{1}{2}$ ·4·4 = = $\frac{1}{2}$ ·16 = 8.

15. Θέμα 20926

Δίνεται η ευθεία ε: $x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β ανήκει στην ευθεία ε ενώ το σημείο Α δεν είναι σημείο της ε.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε.

(Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία ε είναι το B.

(Μονάδες 09)

Θέμα 3 – Κωδικοί:

15152

16. Θέμα 15152 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία $A(1,3), B(-2,2)$ και η ευθεία ε: $3x + y + \alpha = 0$ με $\alpha \epsilon \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β.

(Μονάδες 5)

β) Για ποιες τιμές του α, η απόσταση ΑΒ είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

(Μονάδες 8)

γ) Για $\alpha = 4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Κάνουμε αντικατάσταση τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β στο τύπο της απόστασης

$$(AB) = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}.$$

β) Για να βρούμε τη τιμή του α θα λύσουμε την εξίσωση που προέρχεται από τη ισότητα

$(AB)=d(A,\varepsilon) \Leftrightarrow (AB) = \frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, δηλαδή $\sqrt{10} = \frac{|6+\alpha|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |\alpha + 6| = 10$, τότε

$\alpha = 4$ ή $\alpha = -16$.

γ) Για $\alpha = 4$ η ευθεία ε γίνεται ε: $3x + y + 4 = 0$.

Η ευθεία τέμνει τον $y'y$ για $x = 0$. Άρα, το σημείο τομής της ε με τον άξονα $y'y$ είναι $(0, -4)$.

Άρα $\Gamma\ (0, -4)$.

Επίσης, βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

$\overrightarrow{AB} = (-3, -1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (-1, -7)$.

Από το τύπο του εμβαδού τριγώνου $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|$ υπολογίζουμε ότι

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ τετραγωνικές μονάδες.

Θέμα 4 – Κωδικοί:

14984, 15194, 15273, 15380, 15433, 15681, 15987, 16057, 17694, 17695, 22073, 22262, 22265, 22266

17. Θέμα 14984 Αρχέτυπο

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2,-3)$ και $B(7,9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων Μ που είναι κορυφές των τριγώνων ΑΜΒ ώστε $(AMB)=12$ τ.μ.

α) Να αποδείξτε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών (ε_1): $4x-3y-9=0$ και (ε_2): $4x-3y+7=0$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2).

(Μονάδες 9)

γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο $\mathrm{AM}_1\mathrm{BM}_2$. Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα ΑΧΒΥ υπάρχουν, αν το Χ πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Υ σημείο της (ε_2), που έχουν το ίδιο εμβαδό με το $\mathrm{AM}_1\mathrm{BM}_2$; Εξηγήστε.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει $\frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)\right| = 12$, άρα $\left|\begin{vmatrix} x+2 & y+3 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}\right| = 24$. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα παίρνουμε $|12(x+2) - 9(y+3)| = 24 \Leftrightarrow 3|4(x+2) - 3(y+3)| = 24$, άρα $|4x+8 - 3y - 9| = 8 \Leftrightarrow |4x - 3y - 1| = 8$. Τελικά έχουμε:

$4x - 3y - 1 = 8$ ή $4x - 3y - 1 = -8$, δηλαδή $4x - 3y = 9$ ή $4x - 3y = -7$ οι οποίες είναι εξισώσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

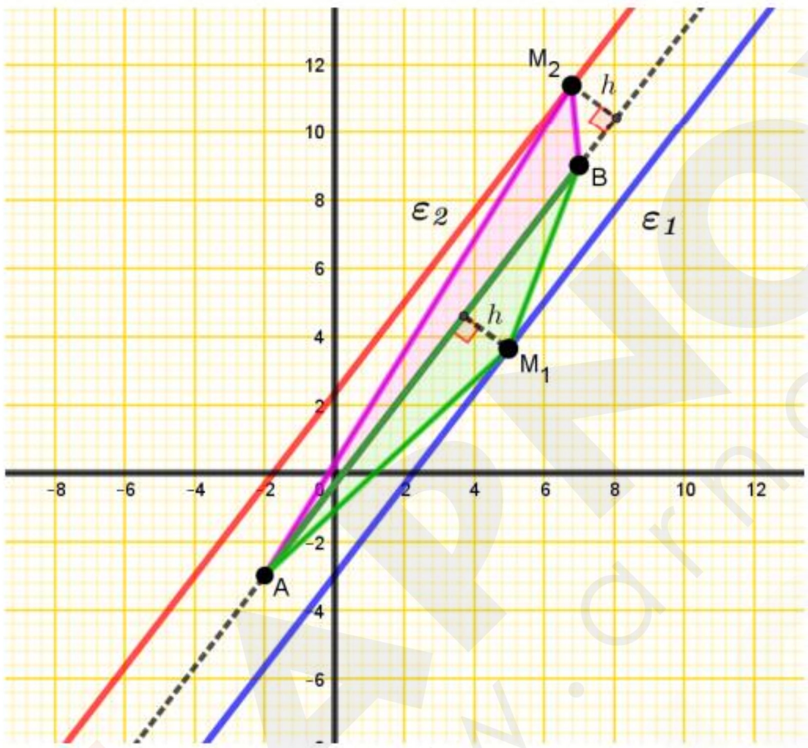
Οι ευθείες είναι παράλληλες αφού έχουν κοινό συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{4}{3}$.

β) Παρατηρούμε ότι $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-(-3)}{7-(-2)} = \frac{4}{3}$, άρα η ευθεία AB είναι παράλληλη στις (ε_1) και (ε_2). Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι ένα οποιοδήποτε σημείο της AB ισαπέχει από τις (ε_1) και (ε_2). Για ευκολία βρίσκουμε το μέσο του AB που είναι το σημείο $K\left(\frac{-2+7}{2}, \frac{-3+9}{2}\right)$ δηλαδή το $K\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

Τώρα $d(K,\varepsilon_1) = \frac{\left|4\cdot\frac{5}{2} - 3\cdot 3 - 9\right|}{\sqrt{4^3+(-3)^2}} = \frac{8}{5}$ και $d(K,\varepsilon_2) = \frac{\left|4\cdot\frac{5}{2} - 3\cdot 3 + 7\right|}{\sqrt{4^3+(-3)^2}} = \frac{8}{5}$

γ) Με βάση το παρακάτω σχήμα, διαπιστώνουμε ότι οποιοδήποτε σημείο M_1 της (ε_1) σχηματίζει με το σταθερό ευθύγραμμο τμήμα AB, τρίγωνο σταθερού εμβαδού, αφού το ύψος h του τριγώνου AMB που αντιστοιχεί στην AB είναι σταθερό και ίσο με το μισό της απόστασης των (ε_1) και (ε_2), οπότε $(AM_1B) = \frac{1}{2}\cdot AB \cdot h = \frac{1}{2}\cdot 15 \cdot \frac{8}{5} = 12$, αφού

$AB = \sqrt{(7+2)^2 + (9+3)^2} = \sqrt{225} = 15$. Ανάλογα, $(AM_2B) = 12$, έτσι $(AM_1BM_2) = 24$. Ώστε $(AXBY) = 24$ για οποιαδήποτε σημεία X,Y των (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα, αρκεί να σχηματίζεται τετράπλευρο (να μην είναι για παράδειγμα τα σημεία M_1, B, M_2 συνευθειακά). Άρα υπάρχουν άπειρα τετράπλευρα AXBY με σταθερό εμβαδόν 24.



18. Θέμα 15194 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $\mathrm{A}(1,1)$, $\mathrm{B}(4,4)$ και $\Gamma(3,1)$.

α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος $\mathrm{B}\Gamma$ είναι η ευθεία (ε): $y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε σημείο K της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε $(\mathrm{KA})=(\mathrm{KB})$. Τι ιδιότητα έχει το σημείο K;

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Θα δείξουμε ότι τα σημεία $Α$, $Β$ και $Γ$ δεν είναι συνευθειακά.

Είναι $\lambda_{ΑΒ}=\frac{4-1}{4-1}=1$ και $\lambda_{ΒΓ}=\frac{1-4}{3-4}=3$. Αφού $\lambda_{ΑΒ}\neq\lambda_{ΒΓ}$ τα σημεία $Α$, $Β$ και $Γ$ δεν είναι συνευθειακά.

β) Για το μέσον $Μ$ της $ΒΓ$ έχουμε $x_Μ=\frac{x_Β+x_Γ}{2}=\frac{4+3}{2}=\frac{7}{2}$ και $y_Μ=\frac{y_Β+y_Γ}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$. Άρα $Μ\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$.

Ακόμα $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{ΒΓ}=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon\cdot 3=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=-\frac{1}{3}$.

Έχουμε $(\varepsilon): y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{2}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$.

γ) Το σημείο $Κ(x,y)$ ανήκει στην ευθεία (ε) αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της, άρα $Κ\left(x,-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}\right)$.

Έχουμε

$$(ΚΑ)=(ΚΒ)\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+\left(1+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2}=\sqrt{(x-4)^2+\left(4+\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2+\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)^2=(x-4)^2+\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2\Leftrightarrow(x-4)^2-(x-1)^2=\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2$$

$$-3(2x-5)=-3\left(\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\right)\Leftrightarrow 2x-5=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}\Leftrightarrow 6x-15=2x-7\Leftrightarrow 4x=8\Leftrightarrow x=2.$$

Οπότε $y=-\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{11}{3}=3$, δηλαδή $Κ(2,3)$.

Το $Κ(2,3)$ ως σημείο της μεσοκαθέτου του $ΒΓ$ ισαπέχει από τα άκρα του $Β$ και $Γ$, επιπλέον $(ΚΑ)=(ΚΒ)$, άρα τελικά $(ΚΑ)=(ΚΒ)=(ΚΓ)$, οπότε το σημείο $Κ$ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΑΒΓ$.

19. Θέμα 15273

Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3,4)$, $B(2,5)$ και $\Gamma(-2,2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha-1,\ 3\alpha+1),\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη στην ΒΓ.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου Μ ισχύει $(M B\Gamma)=(AB\Gamma)$. Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά;

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\overrightarrow{AB}=(-1,\ 1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(-5,\ -2)$ οπότε

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -5 & -2\end{vmatrix}=2+5=7\neq 0$$

Άρα τα σημεία A, B, Γ δεν είναι στην ίδια ευθεία, οπότε σχηματίζουν τρίγωνο.

β) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Β, Γ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{2-5}{-2-2}=\dfrac{3}{4}$

και εξίσωση $y-5=\dfrac{3}{4}(x-2)$ που γράφεται $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{2}$.

γ) Αν $M(x, y)$ τότε έχουμε $x = 4\alpha - 1$ και $y = 3\alpha + 1$, οπότε $\alpha = \frac{x+1}{4}$ και $\alpha = \frac{y-1}{3}$.

Έχουμε λοιπόν

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{3} \text{ οπότε } y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$

Επομένως το σημείο Μ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$ που είναι παράλληλη στην ΒΓ. Επιπλέον, με $x = 3$ έχουμε $y = \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = 4$, οπότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το Α.

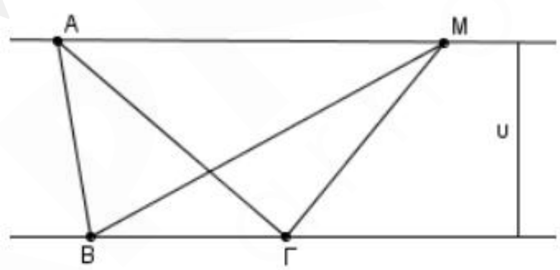
δ) Είδαμε ότι $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) = 7$, οπότε $(AB\Gamma) = \frac{7}{2}$. Επιπλέον,

$$\overrightarrow{B\Gamma} = (-4, -3) \text{ και } \overrightarrow{BM} = (4\alpha - 3, 3\alpha - 4) \text{, οπότε}$$

$$\det(\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{BM}) = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 4\alpha - 3 & 3\alpha - 4 \end{vmatrix} = -12\alpha + 16 + 12\alpha - 9 = 7$$

που σημαίνει ότι $(MB\Gamma) = \frac{7}{2} = (AB\Gamma)$.

Τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ, ΜΒΓ είναι ίσα για οποιαδήποτε θέση του Μ, αφού τα τρίγωνα έχουν την ίδια βάση ΒΓ και το ύψος τους υ είναι ίσο με την απόσταση των δυο παράλληλων ευθειών του σχήματος.



20. Θέμα 15380

Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(1,3), \mathrm{B}(-2,2)$ και η ευθεία ε: $3\mathrm{x}+\mathrm{y}+\alpha=0$, με $\alpha\epsilon\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποια τιμή του α, η απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β είναι ίση με την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha=4$

i. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $\mathrm{y}'\mathrm{y}$.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε

$$(\mathrm{AB})=\mathrm{d}(\mathrm{A},\varepsilon)\Leftrightarrow\sqrt{(-2-1)^2+(2-3)^2}=\frac{|3\cdot1+1\cdot3+\alpha|}{\sqrt{3^2+1^2}}\Leftrightarrow\sqrt{10}=\frac{|6+\alpha|}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow|\alpha+6|=10\Leftrightarrow$$

$\alpha+6=10$ ή $\alpha+6=-10$ τότε $\alpha=4$ ή $\alpha=-16$.

β) Για $\alpha=4$ έχουμε ε: $3\mathrm{x}+\mathrm{y}+4=0$.

i. Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ, άρα για $\mathrm{x}=0$ το $\mathrm{y}=-4$.

Επομένως, η συντεταγμένες του Γ είναι $(0,-4)$.

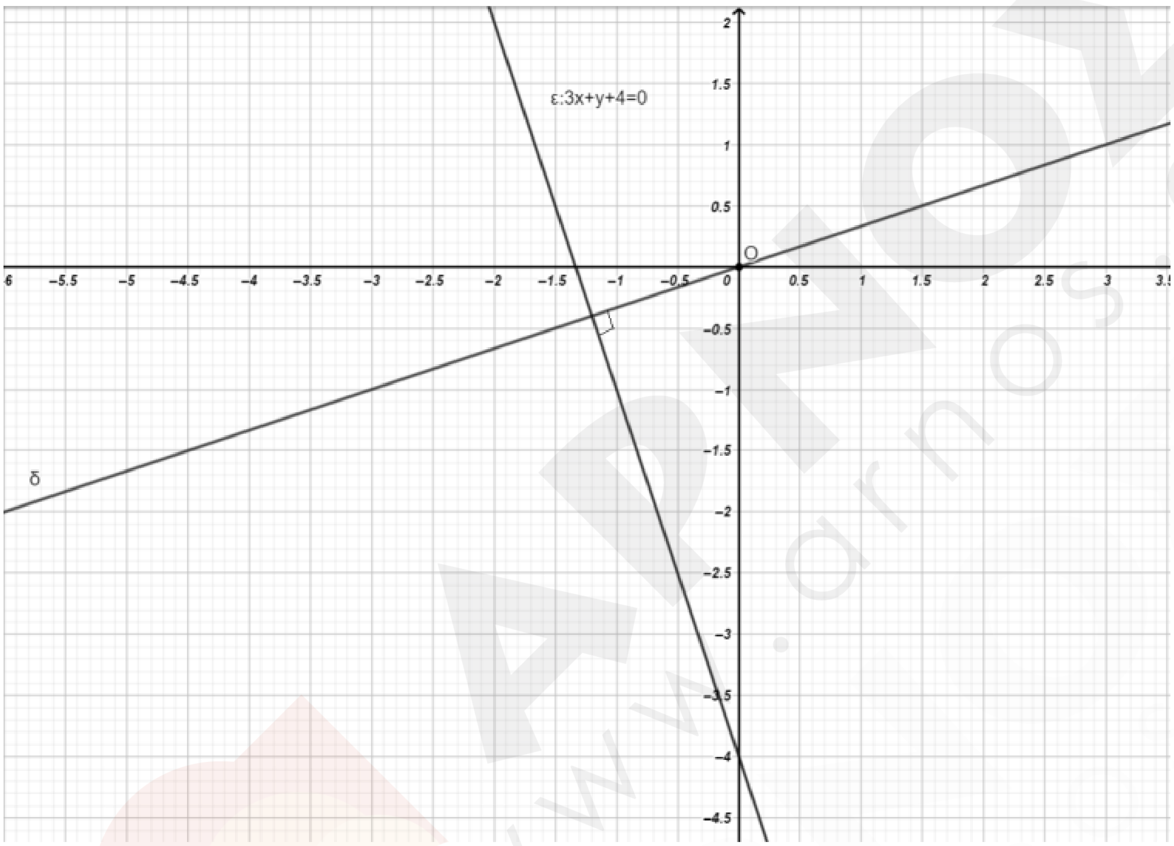
Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,-1)$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(-1,-7)$.

Από το τύπο του εμβαδού τριγώνου $(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right|$ υπολογίζουμε ότι

$$(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & -7\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot20=10 \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

ii.



Σχεδιάζουμε σε ένα σύστημα αξόνων την ευθεία ε και το σημείο που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων, είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με την ευθεία δ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το Ο.

Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο σημείο αρκεί να βρούμε την εξίσωση της ευθείας δ και να λύσουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων.

Επειδή, $\lambda_\varepsilon = -3$ και $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = \frac{1}{3}$. Η ευθεία δ διέρχεται από το (0,0) τότε δ: $y = \frac{1}{3}x$.

Από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases}.$$

Βρίσκουμε το κοινό σημείο $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$, που είναι το ζητούμενο.

21. Θέμα 15433 Αρχέτυπο

Δύο οικισμοί Α και Β βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1,-2)$ και $B(3,1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση $\delta: x+y-1=0$.

α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ:

i. Ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο.

(Μονάδες 8)

ii. Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς.

(Μονάδες 7)

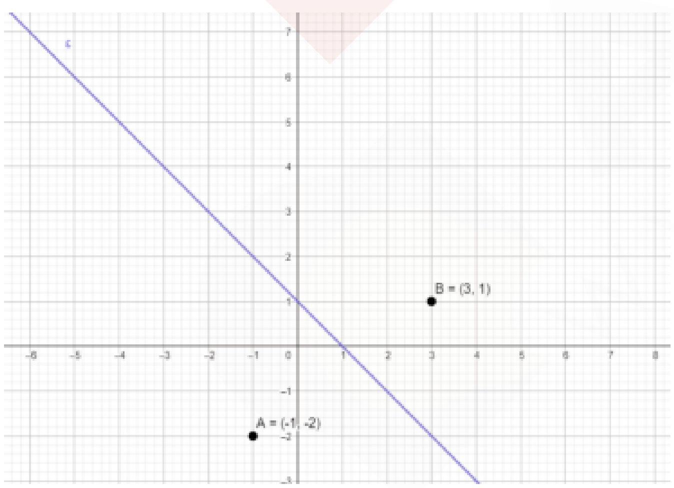
β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία A, B και Γ είναι ίσο με 8.

(Μονάδες 10)

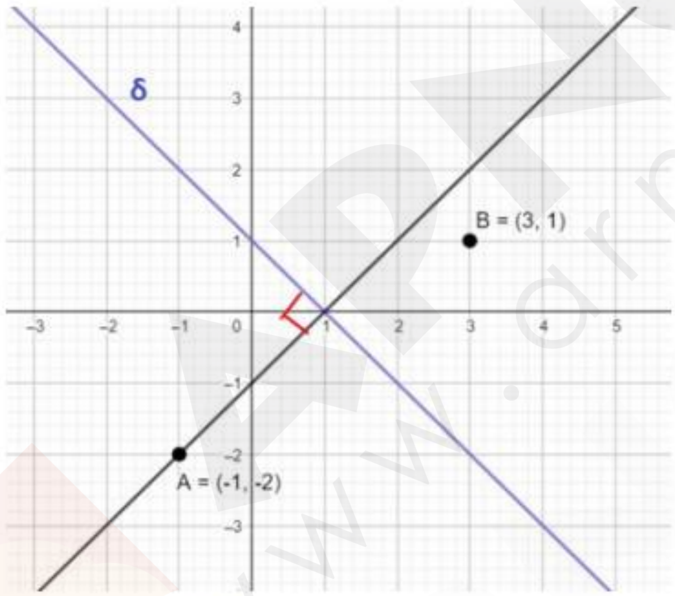
ΛΥΣΗ

α)

i. Για να βρούμε σε ποια θέση του δρόμου δ ο οικισμός Α έχει τη μικρότερη απόσταση, τοποθετούμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την ευθεία δ και τα σημεία Α και Β. Η ευθεία δ τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία (1,0) και (0,1) αντίστοιχα.



Γνωρίζουμε πως ο πιο σύντομος δρόμος που μας οδηγεί στο προορισμό μας είναι ο κάθετος δρόμος στο δρόμο που βρισκόμαστε. Έτσι, η κάθετη ευθεία στην ευθεία δ που διέρχεται από το σημείο Α παριστάνει τον δρόμο που περνά από τον οικισμό και συναντιέται με τον δρόμο δ. Άρα, το σημείο που θα βρίσκεται η θέση που αναζητούμε είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών.



Από το σχήμα προκύπτει πως είναι το $(1,0)$.

Για να το βρούμε αλγεβρικά αρκεί να προσδιορίσουμε την κάθετη ευθεία ε στην ευθεία δ που διέρχεται από το σημείο Α.

$\delta \perp \varepsilon$ αν και μόνο αν $\lambda_\delta \cdot \lambda_\varepsilon = -1$. Το $\lambda_\delta = -1$, άρα $\lambda_\varepsilon = 1$.

Τότε ε: $y-(-2) = 1 \cdot [x-(-1)] \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$.

Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων των δύο ευθείων ε και δ βρίσκουμε το ζητούμενο σημείο.

$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ και $y = 0$.

ii. Για να βρούμε τη θέση του κέντρου υγείας της περιοχής που ισαπέχει από τους δύο οικισμούς ακολουθούμε το ίδιο σκεπτικό. Από τη γραφική παράσταση ψάχνουμε το σημείο της ευθεία δ που ισαπέχει από τα Α και Β, δηλαδή το σημείο Γ που βρίσκεται πάνω στην ευθεία δ και στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

Έστω σημείο $K(x, y)$ που ανήκει στην ευθεία δ, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας δ. Προσδιορίζουμε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ , την ευθεία ζ.

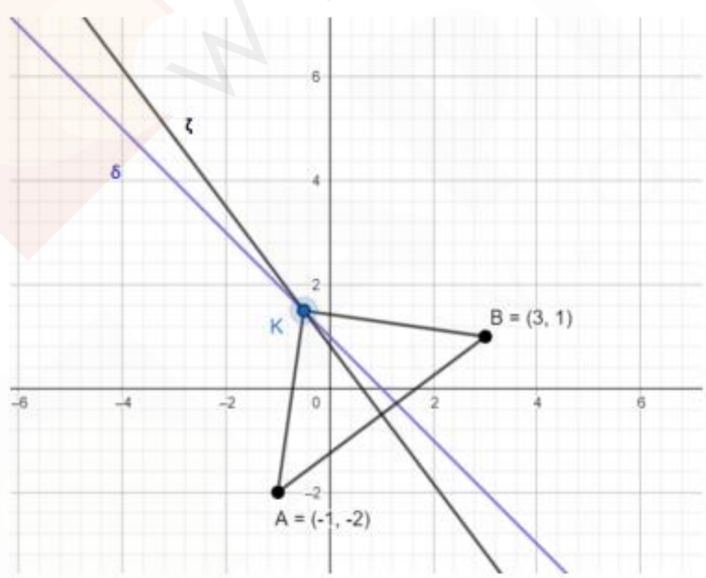
$\lambda_{AB} = \frac{1-(-2)}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$ με $\lambda_{AB} \cdot \lambda_\zeta = -1$ τότε $\lambda_\zeta = -\frac{4}{3}$.

και το Μ μέσο του ΑΒ με συντεταγμένες, $x_M = \frac{-1+3}{2} = 1$, $y_M = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$.

$\zeta: y + \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}(x-1) \Leftrightarrow 8x + 6y - 5 = 0$.

Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων δ και ζ

$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 8x + 6y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ και $y = \frac{3}{2}$. Το σημείο $K(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ είναι το ζητούμενο, δηλαδή η θέση του δρόμου δ που βρίσκεται το κέντρο υγείας.



β) Το σημείο Γ βρίσκεται πάνω στο δρόμο με εξίσωση δ, άρα είναι σημείο της ευθείας δ.

Έστω $\Gamma\ (x, y)$ και $\Gamma \epsilon\ \delta: x + y - 1 = 0$, δηλαδή την επαληθεύει, τότε $y = 1 - x$ και το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(x, 1 - x)$.

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

$\overrightarrow{AB} = (4,3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (x + 1, 3 - x)$.

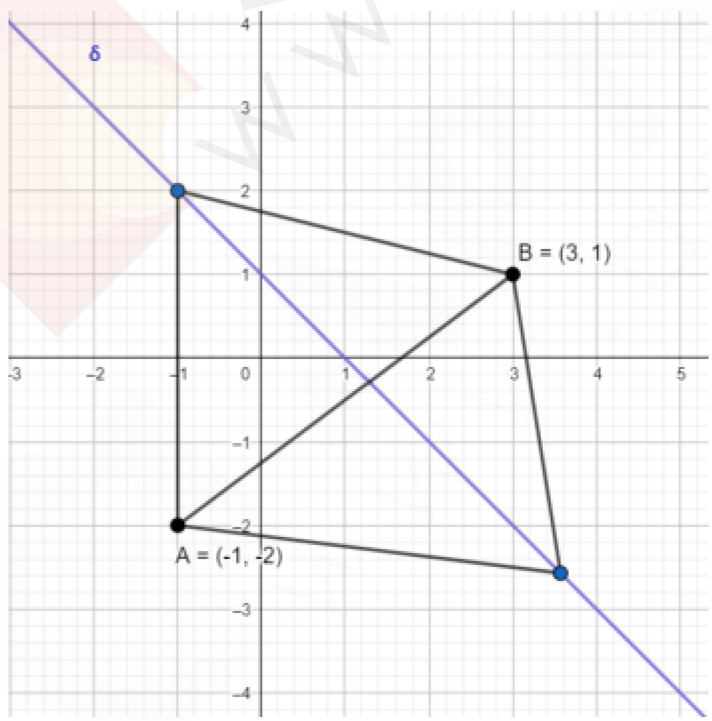
Το εμβαδόν του τριγώνου $(AB\Gamma)$ είναι 8.

Άρα, από τον τύπο εμβαδόν τριγώνου $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|$ υπολογίζουμε ότι το $(AB\Gamma) =$

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ x + 1 & 3 - x \end{vmatrix}\right| = 8 \Leftrightarrow |9 - 7x| = 16.$$

Από την εξίσωση παίρνουμε $x = -1$ ή $x = \frac{25}{7}$. Βρίσκουμε τα αντίστοιχα $y = 2$ ή $y = -\frac{18}{7}$.

Επομένως, έχουμε δύο θέσεις του δρόμου που βρίσκεται το αυτοκίνητο και σχηματίζει εμβαδόν 8, τη θέση με συντεταγμένες $(-1,2)$ και $\left(\frac{25}{7}, -\frac{18}{7}\right)$.



22. Θέμα 15681 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B(\frac{\alpha}{2},\beta)$ και $M(\frac{\alpha}{2},0)$, όπου α,β σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και το σημείο M είναι το μέσο της βάσης του OA.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών OB και AB είναι $OB: 2\beta x-\alpha y=0$ και $AB: 2\beta x+\alpha y-2\alpha\beta=0$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

γ) Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία OB και d_2 η απόσταση του σημείου M από την ευθεία AB, να αποδείξετε ότι $d_1=d_2$.

(Μονάδες 8)

δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί;

(Μονάδες 3)

ΛΥΣΗ

α) Αφού $\beta\neq 0$ τα σημεία O, A, B δεν είναι συνευθειακά.

Τα τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με βάση την OA αφού

$$(OB)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-0\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2} \text{ και } (AB)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-\alpha\right)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2}.$$

Εναλλακτικά, το σημείο $B(\frac{\alpha}{2},\beta)$ ανήκει στη μεσοκάθετο του OA οπότε ισαπέχει από τα σημεία O, A.

Τέλος το μέσο του OA είναι το σημείο $M(\frac{\alpha}{2},0)$, αφού οι συντεταγμένες του M είναι ίσες με το ημιάθροισμα των συντεταγμένων των O, A.

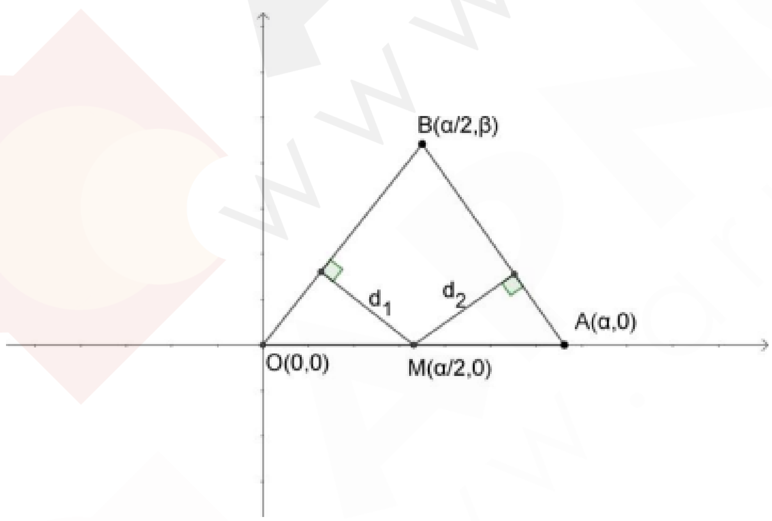
β) Είναι $\beta \neq 0$ οπότε $\text{OB}: y-0=\dfrac{\beta-0}{\dfrac{\alpha}{2}-0}\cdot(x-0) \Leftrightarrow y=\dfrac{2\beta}{\alpha}\cdot x \Leftrightarrow 2\beta x-\alpha y=0$ και

$\text{AB}: y-0=\dfrac{\beta-0}{\dfrac{\alpha}{2}-\alpha}\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow y=\dfrac{\beta}{-\dfrac{\alpha}{2}}\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow y=-\dfrac{2\beta}{\alpha}\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow 2\beta x+\alpha y-2\alpha\beta=0$.

γ) Είναι $d_1=\dfrac{\left|2\beta\dfrac{\alpha}{2}-\alpha\cdot 0\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}} \overset{\alpha,\beta>0}{=} \dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}}$ και

$d_2=\dfrac{\left|2\beta\dfrac{\alpha}{2}+\alpha\cdot 0-2\alpha\beta\right|}{\sqrt{(2\beta)^2+\alpha^2}}=\dfrac{|-\alpha\beta|}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}} \overset{\alpha,\beta>0}{=} \dfrac{\alpha\beta}{\sqrt{4\beta^2+\alpha^2}}$ οπότε πράγματι $d_1=d_2$.

δ) Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που αποδείχθηκε είναι η εξής: Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, το μέσο της βάσης ισαπέχει από τις ίσες πλευρές.



23. Θέμα 15987

Δίνονται τα σημεία Α(1,1) και Β(2,3)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η (ε): $y=2x-1$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε αν το σημείο $\Gamma\left(2^{100},5\right)$ ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων Ο(0,0).

(Μονάδες 8)

γ) Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

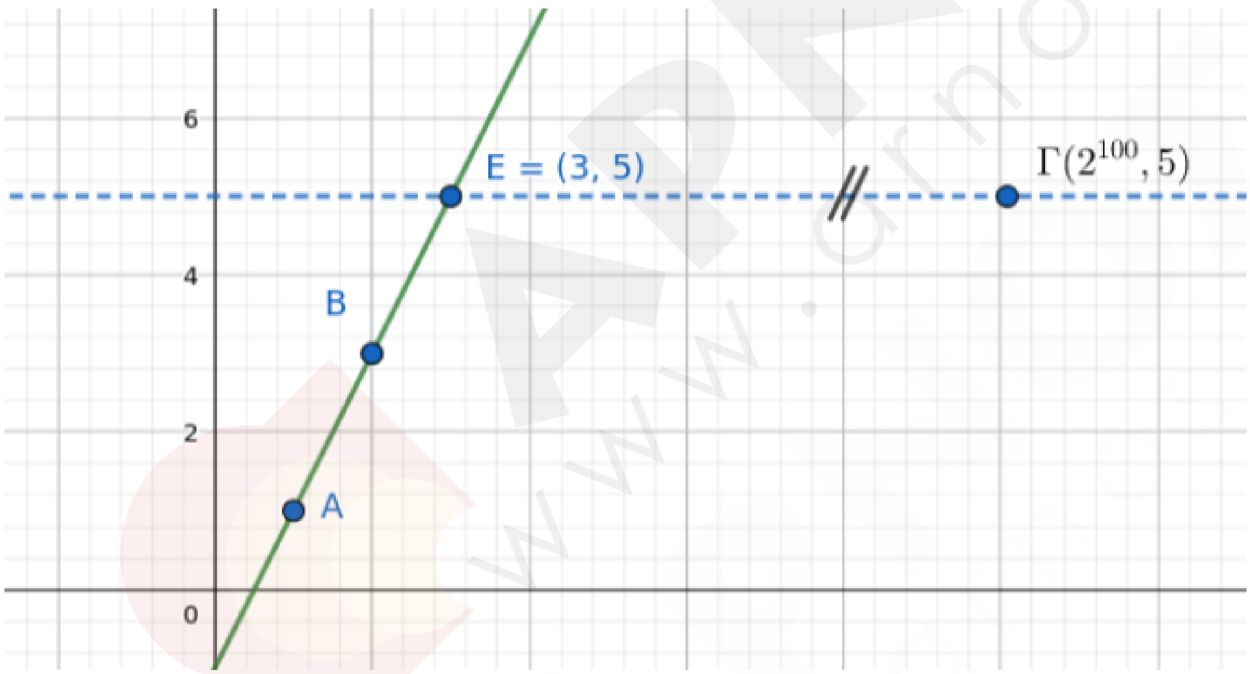
α) Η ευθεία που διέρχεται από τα Α,Β θα έχει εξίσωση: $y=\lambda x+b$ αφού $x_A \neq x_B$.

Οπότε $\lambda_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{3-1}{2-1}=\dfrac{2}{1}=2$.

Άρα η ευθεία θα είναι της μορφής $y=2x+b$. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου Α θα έχουμε: $1=2\cdot 1+b \Leftrightarrow b=-1$. Επομένως, η εξίσωση της ευθείας θα είναι η $(\varepsilon): y=2x-1$.

α΄τρόπος

Το σημείο $E(3,5)$ ανήκει στην (ε), διότι $2\cdot 3-1=5$. Το σημείο Γ βρίσκεται στην ίδια ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x την y=5 με το Ε και «δεξιά» από αυτήν, ενώ το σημείο Ο(0,0) βρίσκεται στο άλλο ημιεπίπεδο, «αριστερά» από αυτήν, όπως βλέπουμε και στο επόμενο σχήμα.



β΄ τρόπος

Για $y=0$ το σημείο $\Delta\left(\frac{1}{2},0\right)$ ανήκει στην ευθεία (ε) και το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta O}=\left(\frac{-1}{2},0\right)$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$.

Επίσης το σημείο $E(3,5)$ ανήκει στην (ε), διότι $2\cdot 3-1=5$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{E\Gamma}=(2^{100}-3,5-5)=(2^{100}-3,0)$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$. Τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta O},\overrightarrow{E\Gamma}$ έχουν αρχή στην ευθεία (ε) και είναι αντίρροπα, οπότε ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα της (ε). Συνεπώς και τα σημεία Ο , Γ δεν ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο από αυτά που ορίζει η (ε).

γ) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΒΓ έχουν την ίδια βάση ΑΒ, με φορέα την ευθεία (ε).

Η απόσταση του Ο και του Γ αντίστοιχα από την (ε) είναι:

$$d(O,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 0-0-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$d(\Gamma,\varepsilon)=\frac{|2\cdot 2^{100}-5-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2^{101}-6}{\sqrt{5}}>\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Συνεπώς $d(O,\varepsilon)<d(\Gamma,\varepsilon)$ άρα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ΑΟΒ.

24. Θέμα 16057 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία $A(2,0)$, $B(3,4)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και έχουν κλίση λ.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε οτι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο A, έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B, έχει εξίσωση (ε): $15x - 8y - 30 = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε οτι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ), εκτός από την (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ).

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α)

i. Οι ευθείες που έχουν κλίση λ και διέρχονται από το σημείο $A(2,0)$ ορίζονται από την εξίσωση: (ε_λ): $y - 0 = \lambda(x-2) \Leftrightarrow \lambda x - y - 2\lambda = 0$ (1)

ii. Για την απόσταση του σημείου B απο τις ευθείες (ε_λ), είναι:

$$d(B,\varepsilon_\lambda) = \frac{|3\lambda - 4 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{|\lambda - 4|}{\sqrt{\lambda^2+1}}$$

Επομένως, έχουμε:

$$d(B,\varepsilon_\lambda) = 1 \Leftrightarrow \frac{|\lambda - 4|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 1 \Leftrightarrow |\lambda - 4| = \sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow$$

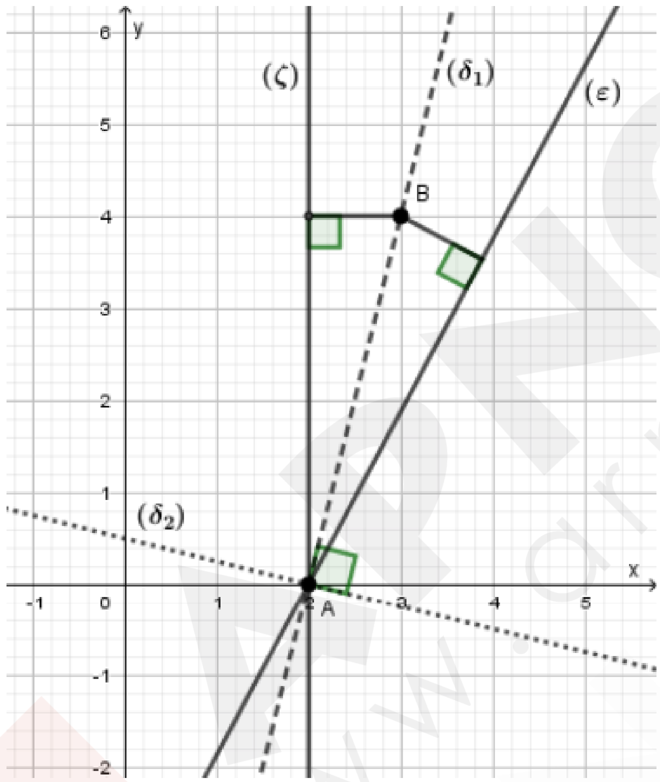
$$(\lambda - 4)^2 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{15}{8}$$

Απο την (1) έχουμε: $\frac{15}{8}x - y - \frac{30}{8} = 0 \Leftrightarrow 15x - 8y - 30 = 0.$

β) Από το σημείο $A(2,0)$ διέρχεται επίσης η κατακόρυφη ευθεία (ζ), για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, με εξίσωση $x = 2$. Έτσι, έχουμε:

$$d(B,\zeta) = \frac{|1\cdot 3 + 0\cdot 4 - 2|}{\sqrt{1}} = 1$$

γ) Οι ευθείες (ε) και (ζ) τέμνονται, διότι έχουν κοινό σημείο το A, αλλά δεν ταυτίζονται αφού $\lambda_\varepsilon = \frac{15}{8}$ και η $(\zeta)//y'y$. Το σημείο B απέχει ίση απόσταση από τις ευθείες (ε) και (ζ), επομένως ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας των δύο ευθειών. Επιπλέον ισχύει οτι $\lambda_{AB} = \frac{4-0}{3-2} = 4.$



Επομένως, η μία εκ των δύο διχοτόμων (δ_1), είναι η ευθεία AB με εξίσωση

$$y - 0 = 4(x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 8.$$

Η άλλη διχοτόμος (δ_2), είναι κάθετη στην AB, επομένως $\lambda_{\delta_2} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\delta_2} = -\frac{1}{4}$.

Επιπλέον, διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$, οπότε έχει εξίσωση την

$$y - 0 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

25. Θέμα 17694 Αρχέτυπο

Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις Α και Β έχουν συντεταγμένες Α(3,6) και Β(7,-2).

α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή. (Μονάδες 12)

β) Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ, ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία Α, Β και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον τα σημεία της ευθείας ε πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή ισαπέχουν από τα Α, Β, αυτή θα είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Αν Μ το μέσο του ΑΒ τότε:

$x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$, $y_M = \frac{y_A+y_B}{2} = 2$, άρα Μ(5, 2).

Επίσης $\lambda_{AB} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{-2-6}{7-3} = -2$,

οπότε: $\varepsilon \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{-1}{\lambda_{AB}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$,

άρα ε: $y - y_M = \lambda_{AB}(x - x_M)$ ή ε: $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 5)$ ή ε: $2y - 4 = x - 5$ ή ε: $x - 2y - 1 = 0$,

η ζητούμενη εξίσωση.

β) Θέλουμε (ΣΑΒ) = 20 τ.μ. (1)

Αν Σ(x, y), τότε το Σ∈ε ⇔ x - 2y -1 = 0 ⇔ x = 2y +1 (2), οπότε Σ(2y +1, y).

Ακόμη $\overrightarrow{AB}$ = $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ = (7-3, -2-6) = (4, -8) και

$\overrightarrow{A\Sigma}$ = $(x_\Sigma - x_A, y_\Sigma - y_A)$ = (2y +1-3, y -6) = (2y -2, y -6), οπότε από την (1) είναι:

$\frac{1}{2}\,|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Sigma})| = 20 \Leftrightarrow \left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{A\Sigma} & y_{A\Sigma} \end{vmatrix}\right| = 40 \Leftrightarrow \left|\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 2y-2 & y-6 \end{vmatrix}\right| = 40 \Leftrightarrow$

|4(y -6)- (-8)(2y -2)| = 40 ⇔|4y -24 + 16y - 16| = 40 ⇔ |20y - 40| = 40 ⇔

20|y - 2| = 40 ⇔ |y - 2| = 2 ⇔ y - 2 = -2 ή y - 2 = 2 ⇔ y = 0 ή y = 4.

Για y = 0 από την (2) παίρνουμε: x = 1. Για y = 4 από την (2) παίρνουμε: x = 9.

Άρα Σ(1, 0) ή Σ(9, 4).

26. Θέμα 17695 Αρχέτυπο

Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία A και B. Κάθε χρονική στιγμή t με t≥ 0 η θέση του πρώτου σημείου είναι A(t-1, 2t-1) και του δευτέρου B(3t-1, -4t-1).

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία.

(Μονάδες 8)

β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται;

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή t=2.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε: 4x+3y+7=0 ισούται με 6. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε Α(t-1, 2t-1), t≥ 0. Αν Α(x, y) τότε:

$$\begin{cases} x = t-1 \\ y = 2t-1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x+1 \\ y = 2(x+1)-1 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x+1 \\ y = 2x+1, \\ x \geq -1 \end{cases}$$

άρα το σημείο Α κινείται στην ημιευθεία $ε_1$: $y = 2x + 1$ με $x \geq -1$.

Επίσης έχουμε Β(3t-1, -4t-1), t≥ 0. Αν Β(x, y) τότε:

$$\begin{cases} x = 3t-1 \\ y = -4t-1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x+1}{3} \\ y = -4\frac{x+1}{3} - 1 \\ \frac{x+1}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x+1}{3} \\ 3y = -4x-7 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x+1}{3} \\ 4x+3y+7 = 0, \\ x \geq -1 \end{cases}$$

άρα το σημείο Β κινείται στην ημιευθεία $ε_2$: $4x + 3y + 7 = 0$ με $x \geq -1$.

β) Αν υπάρχει χρονική στιγμή t≥ 0, κατά την οποία τα σημεία Α και Β ταυτίζονται θα είναι:

$$\begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-1 = 3t-1 \\ 2t-1 = -4t-1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 0,$$ άρα τη χρονική στιγμή $t = 0$, τα σημεία Α, Β ταυτίζονται.

γ) Για t=2 είναι Α(1, 3) και Β(5, -9) οπότε: (ΑΒ) = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ = $\sqrt{(5-1)^2 + (-9-3)^2}$ = $\sqrt{4^2 + (-12)^2}$ = $\sqrt{16+144}$ = $\sqrt{160}$ =$4\sqrt{10}$.

δ) Λόγω του ερωτήματος (α), η ευθεία ε είναι η $ε_2$, οπότε:

$$d(A\,,\,ε_2) = 6 \Leftrightarrow \frac{|4\cdot(t-1)+3\cdot(2t-1)+7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 6 \Leftrightarrow \frac{|10t|}{5} = 6 \Leftrightarrow |10\,t| = 30 \Leftrightarrow |t| = 3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = -3 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3,$$ η ζητούμενη χρονική στιγμή.

27. Θέμα 22073 Αρχέτυπο

Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο Λ(2,6) και η θέση ενός πλοίου με το σημείο Π(λ-1, 2+λ), $\lambda \in R$.

α)

i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του. (Μονάδες 07)

ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι. (Μονάδες 05)

β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:

i. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι; (Μονάδες 06)

ii. Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι. (Μονάδες 07)

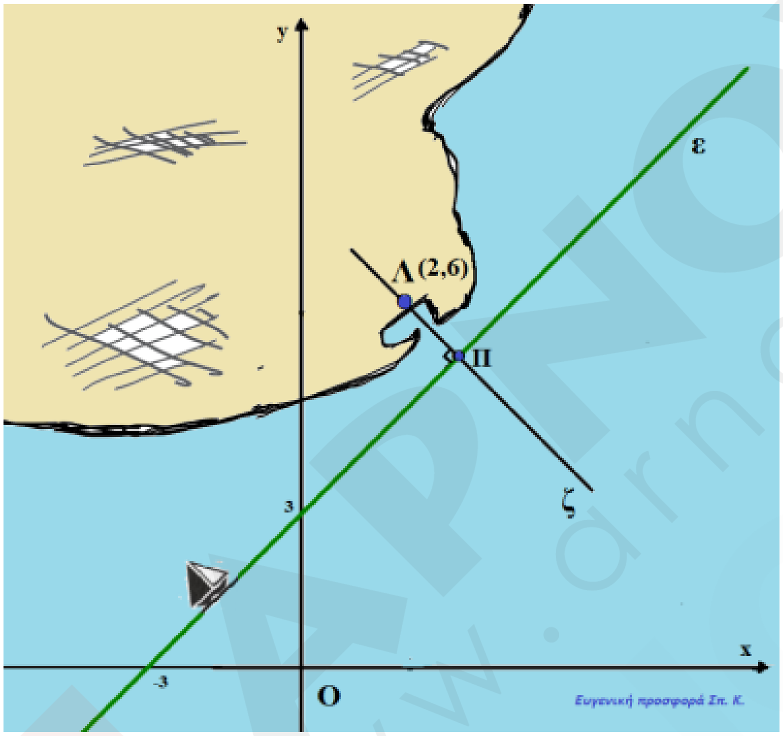
ΛΥΣΗ

α)

i. Για το σημείο Π(λ-1, 2+λ) έχουμε: $\begin{cases} x_\Pi = \lambda - 1 \\ \text{και} \\ y_\Pi = 2 + \lambda \end{cases}$. Απαλείφοντας το λ από τις 2 εξισώσεις έχουμε ότι $y_\Pi = x_\Pi + 3$. Επομένως η εξίσωση της τροχιάς του πλοίου είναι η ευθεία ε με εξίσωση την x-y+3=0.

ii. Το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι αν οι συντεταγμένες του λιμανιού Λ(2,6) επαληθεύουν την εξίσωση της τροχιάς του, δηλαδή την εξίσωση x-y+3=0.
Για y=6 και x =2 έχουμε 2-6+3 = -1 ≠ 0. Άρα το πλοίο δεν θα περάσει από το λιμάνι.

β)



i. Η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι είναι το μήκος του κάθετου τμήματος ΛΠ, με Π το σημείο τομής της ευθείας ε με την ευθεία ζ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το Λ. Υπολογίζεται με την απόσταση του σημείου Λ από την ε. Δηλαδή

$$d(Λ,ε)=\frac{|2-6+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ii. Η ευθεία ζ είναι κάθετη ευθεία στην ε, άρα $λ_ζ \cdot λ_ε = -1$. Επειδή $λ_ε = 1$, έχουμε ότι $λ_ζ = -1$ και η εξίσωσή της είναι: $y - y_Λ = -(x - x_Λ)$ ή $y-6 = -x+2 \Leftrightarrow x+y=8$. Η θέση του πλοίου είναι το κοινό σημείο των ευθειών ε και ζ, που προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος.

$$(\Sigma)\begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{11}{2} \end{cases}$$

Άρα όταν το πλοίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι βρίσκεται στο σημείο $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

28. Θέμα 22262 Αρχέτυπο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(-2, 1), Β(1, 5) και Γ(5, -1).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 5)

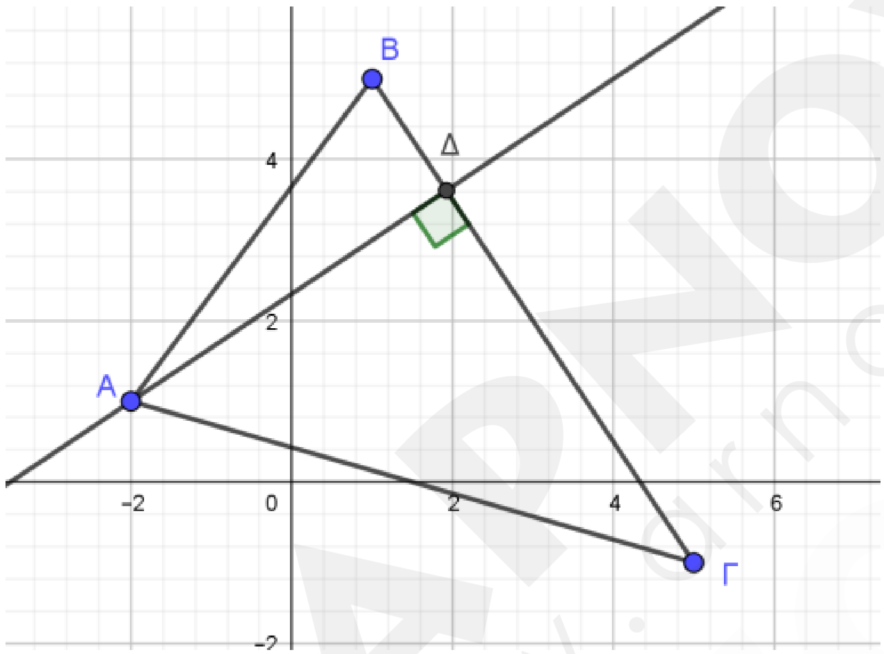
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή Α. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας ΒΓ, από το οποίο, το Α απέχει την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$(MAB) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ



α) Είναι: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ = (1-(-2), 5-1) = (3, 4) και

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A)$ = (5-(-2), -1-1) = (7, -2), οπότε: (ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}$ $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})|$ =

$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{A\Gamma} & y_{A\Gamma} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|3\cdot(-2)-4\cdot7| = \frac{1}{2}|-6-28| = \frac{1}{2}|-34| = \frac{1}{2}\cdot34 = 17.$

β) Είναι ΒΓ: $y - y_B = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B}(x - x_B)$ ή ΒΓ: $y - 5 = \frac{-1-5}{5-1}(x - 1)$ ή ΒΓ: $y - 5 = \frac{-6}{4}(x - 1)$ ή

ΒΓ: $y - 5 = -\frac{3}{2}(x - 1)$ ή ΒΓ: $2y - 10 = -3x + 3$ ή ΒΓ: $3x + 2y - 13 = 0$.

γ) Έστω $υ_α$ το ύψος του τριγώνου από την κορυφή Α.

Είναι $λ_{ΒΓ} = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{2}$ και $υ_α \perp ΒΓ \Leftrightarrow λ_{υ_α} \cdot λ_{ΒΓ} = -1 \Leftrightarrow λ_{υ_α} = \frac{-1}{λ_{ΒΓ}} = \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$. Έτσι

$υ_α$: $y - y_A = λ_{υ_α}(x - x_A)$ ή $υ_α$: $y - 1 = \frac{2}{3}(x-(-2))$ ή $υ_α$: $3y - 3 = 2x + 4$ ή $υ_α$: $2x - 3y + 7 = 0$,

η ζητούμενη εξίσωση.

Το σημείο της ευθείας ΒΓ που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το Α, είναι το ίχνος Δ, του ύψους από το Α στην ευθεία ΒΓ.

Από το σύστημα των ΒΓ, $υ_α$ έχουμε: $\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$, οπότε

$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13$ και

$D_x = \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -39 + 14 = -25$, $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -21 - 26 = -47$,

άρα η λύση του συστήματος είναι:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-25}{-13} = \frac{25}{13} \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{-47}{-13} = \frac{47}{13}.$$

Επομένως, $Δ(\frac{25}{13}, \frac{47}{13})$ είναι το ζητούμενο σημείο της ευθείας ΒΓ.

δ) Έστω Μ(x, y) σημείο του επιπέδου ώστε: (ΜΑΒ) = $\frac{1}{2}$ (ΑΒΓ), η οποία λόγω του ερωτήματος (α) γράφεται: (ΜΑΒ) = $\frac{17}{2}$ (1).

Είναι: $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A)$ = (x -(-2), y -1) = (x +2, y - 1), άρα:

(ΜΑΒ) = $\frac{1}{2}$ $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})|$ = $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{AM} & y_{AM} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x+2 & y-1 \end{vmatrix}\right| =$

$\frac{1}{2}$ |3·(y - 1) - 4· (x + 2)| = $\frac{1}{2}$| 3 y - 3 - 4x − 8| = $\frac{1}{2}$|3 y - 4x -11|, οπότε από την (1) ⇔

$\frac{1}{2}$|3 y - 4x -11| = $\frac{17}{2}$ ⇔ |3 y - 4x -11| = 17 ⇔3 y - 4x -11 = -17 ή 3 y - 4x -11 = 17 ⇔

4x - 3 y - 6 = 0 ή 4x - 3 y + 28 = 0.

Άρα το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία ε_1: 4x - 3 y - 6 = 0 ή ε_2: 4x - 3 y + 28 = 0.

29. Θέμα 22265 Αρχέτυπο

Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία Α(1, –1), Β(2, 2) και Γ(μ–1, 3μ–2), μ∈R.

α) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το R, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία ε: y = 3x +1. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το R, τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερό. (Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Β και από τις οποίες το σημείο Α, απέχει απόσταση ίση με 1. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Καθώς το μ διατρέχει το R, είναι Γ(μ-1, 3μ-2), οπότε αν Γ(x, y) τότε:

$$\begin{cases} x = \mu - 1 \\ y = 3\mu - 2 \\ \mu \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = x + 1 \\ y = 3(x+1) - 2 \\ \mu \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ \mu = x + 1 \\ \mu \in R \end{cases}$$

, επομένως το σημείο Γ κινείται στην ευθεία ε: y = 3x +1.

β) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-(-1)}{2-1} = 3 = \lambda_\varepsilon$, άρα η ΑΒ // ε.

Επιπλέον, για x = 1 και y = - 1 από την εξίσωση της ε παίρνουμε $-1 \neq 3 \cdot 1 + 1$.

Άρα το σημείο Α δεν ανήκει στην ευθεία ε, αφού οι συντεταγμένες του δεν ικανοποιούν την εξίσωσή της. Οπότε τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά. Επομένως καθώς το μ διατρέχει το R, τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

γ) Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (2-1, 2-(-1)) = (1, 3)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A) = (\mu-1-1, 3\mu-2-(-1)) = (\mu - 2, 3\mu - 1)$, οπότε:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_{AB} & y_{AB} \\ x_{A\Gamma} & y_{A\Gamma} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \mu - 2 & 3\mu - 1 \end{vmatrix}\right| =$$

$$\frac{1}{2}|1(3\mu - 1) - 3(\mu - 2)| = \frac{1}{2}|3\mu - 1 - 3\mu + 6| = \frac{1}{2}|5| = \frac{5}{2}$$

, σταθερό για κάθε $\mu \in R$.

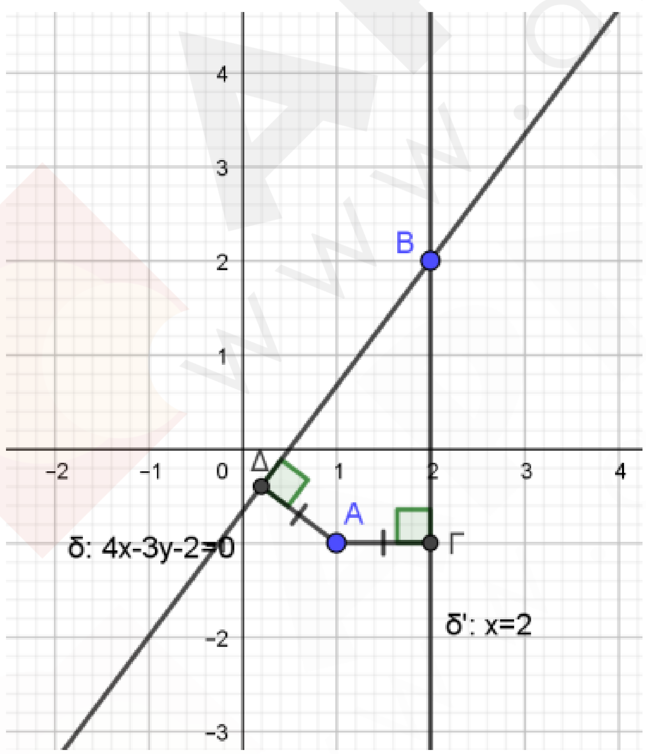
Εναλλακτικά: Λόγω των ερωτημάτων (α) και (β), το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή του Γ στην ΑΒ, έχει σταθερό μήκος, ίσο με την απόσταση των παραλλήλων ευθειών ε και ΑΒ. Επίσης το μήκος του ΑΒ είναι σταθερό, οπότε το εμβαδό του τριγώνου: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \upsilon$ είναι σταθερό.

δ) Από το σημείο Β(2, 2) διέρχονται οι ευθείες δ': $x = 2$ και δ: $y - y_B = \lambda(x - x_B)$ ή

δ: $y - 2 = \lambda(x - 2)$ ή δ: $\lambda x - y + 2 - 2\lambda = 0$.

Είναι: $d(A, \delta') = |2 - x_A| = |2 - 1| = 1$, οπότε η ευθεία δ': $x = 2$ αποτελεί μια λύση στο πρόβλημα. Θα αναζητήσουμε αν στην οικογένεια ευθειών δ, υπάρχει και άλλη ευθεία που να αποτελεί λύση στο πρόβλημα.

Είναι: $d(A, \delta) = \dfrac{|\lambda \cdot 1 - 1\cdot(-1) + 2 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|\lambda + 1 + 2 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \dfrac{|3 - \lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$.



Θέλουμε: $d(A, \delta) = 1 \Leftrightarrow \frac{|3-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 1 \Leftrightarrow |3 - \lambda| = \sqrt{\lambda^2 + 1}$ και υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη έχουμε: $|3 - \lambda|^2 = \sqrt{\lambda^2 + 1}^2 \Leftrightarrow (3 - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow 9 - 6\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 + 1$ $\Leftrightarrow 6\lambda = 8 \Leftrightarrow \lambda = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ η λύση της εξίσωσης, που επαληθεύει την αρχική, οπότε είναι δεκτή.

Για $\lambda = \frac{4}{3}$ η ευθεία δ: $\frac{4}{3}x - y + 2 - 2\frac{4}{3} = 0$ ή δ: $\frac{4}{3}x - y + 2 - \frac{8}{3} = 0$ ή δ: $\frac{4}{3}x - y - \frac{2}{3} = 0$ ή δ: $4x - 3y - 2 = 0$, αποτελεί μία ακόμη λύση στο πρόβλημα.

30. Θέμα 22266

Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda+1)x - (\lambda - 2)y + \lambda - 7 = 0$ (Ε) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση: $6x - 8y + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (Ε) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε); (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ(1,3) από την ευθεία (ζ). (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση: $(2\lambda+1)x - (\lambda - 2)y + \lambda - 7 = 0$ (E), $\lambda \in \mathbb{R}$ που είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$, με $A = 2\lambda + 1$ και $B = \lambda - 2$.

Οπότε: $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + 1 = 0 \\ \lambda - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = 2 \end{cases}$, άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, επομένως η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία.

β) Η εξίσωση (Ε) γράφεται: $2\lambda x + x - \lambda y + 2y + \lambda - 7 = 0$ ή $(2x - y + 1)\lambda + (x + 2y - 7) = 0$. Το να ικανοποιείται η τελευταία εξίσωση για κάθε λ, είναι ισοδύναμο με το να είναι μηδέν οι δύο παρενθέσεις. Δηλαδή:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 2(2x + 1) - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 4x + 2 - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Επομένως, όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), διέρχονται από το σημείο $M(1, 3)$.

γ) Η ευθεία (ζ) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{\delta_1} = (B, -A) = (-8, -6)$.

Οι ευθείες της οικογένειας ευθειών (Ε), είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\overrightarrow{\delta_2} = (B, -A) = (-\lambda + 2, -2\lambda - 1)$.

Οπότε: $\overrightarrow{\delta_1} \parallel \overrightarrow{\delta_2} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\delta_1}, \overrightarrow{\delta_2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ -\lambda + 2 & -2\lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$16\lambda + 8 - 6\lambda + 12 = 0 \Leftrightarrow 10\lambda = -20 \Leftrightarrow \lambda = -2$.

Για $\lambda = -2$ από την εξίσωση (Ε) παίρνουμε: $-3x + 4y - 9 = 0$.

Άρα ε: $-3x + 4y - 9 = 0$ είναι η ζητούμενη ευθεία.

δ) Είναι (ζ): $6x-8y+3=0$, οπότε $d(M, \zeta) = \dfrac{|6\cdot1-8\cdot3+3|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}} = \dfrac{|15|}{\sqrt{100}} = \dfrac{15}{10} = \dfrac{3}{2}$.