Κεφ. 2.2. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 –
Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course Των Μαθηματικών, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Κωδικοί Θεμάτων 2:

15986, 21162, 21662, 22072, 22092, 22171

1.Θέμα 1598

Δίνονται τα σημεία Α(1,1) και Β(2,3)

α) i) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η (ε): $y=2x-1$.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $\Gamma\left(2^{100},5\right)$ ανήκει στην ευθεία (ε).

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α)

i) Η ευθεία που διέρχεται από τα Α,Β θα έχει εξίσωση: $y=\lambda x+b$ αφού $x_A \neq x_B$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-1}{2-1}=\frac{2}{1}=2$.

Άρα η ευθεία θα είναι της μορφής $y=2x+b$.

ii) Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου Α θα έχουμε: $1=2\cdot 1+b \Leftrightarrow b=-1$.

Επομένως, η εξίσωση της ευθείας θα είναι η $(\varepsilon): y=2x-1$.

β) Αντικαθιστώντας την τεταγμένη του σημείου Γ στην εξίσωση της ευθείας (ε) έχουμε:

$5=2x-1 \Leftrightarrow x=3 \neq 2^{100}$ άρα το σημείο Γ δεν ανήκει στην (ε).

2.Θέμα 21162

Δίνονται τα σημεία Α(3,2) και Β(-1,-6). Να βρεθούν:

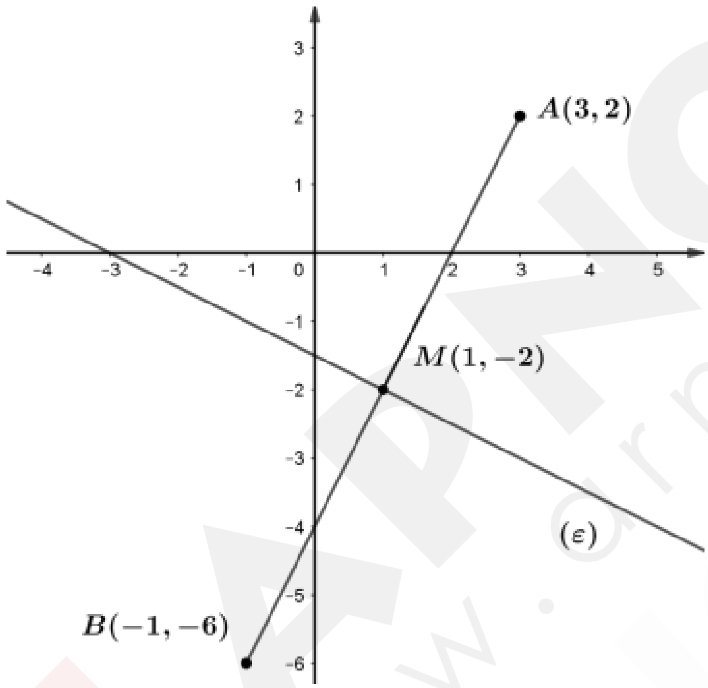
α) Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 8)

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

(Μονάδες 8)

γ) Η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ



α) Το μέσο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες:

$$M\left(\frac{3+(-1)}{2},\frac{2+(-6)}{2}\right)=M(1,-2).$$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β είναι:

$$\lambda_{AB}=\frac{2-(-6)}{3-(-1)}=\frac{8}{4}=2.$$

γ) Επειδή η ευθεία ΑΒ είναι κάθετη στην ευθεία (ε), τότε $\lambda_{AB}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1$.

Επιπλέον, από το β) $\lambda_{AB}=2$ άρα:

$$2\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon}=-\frac{1}{2}.$$

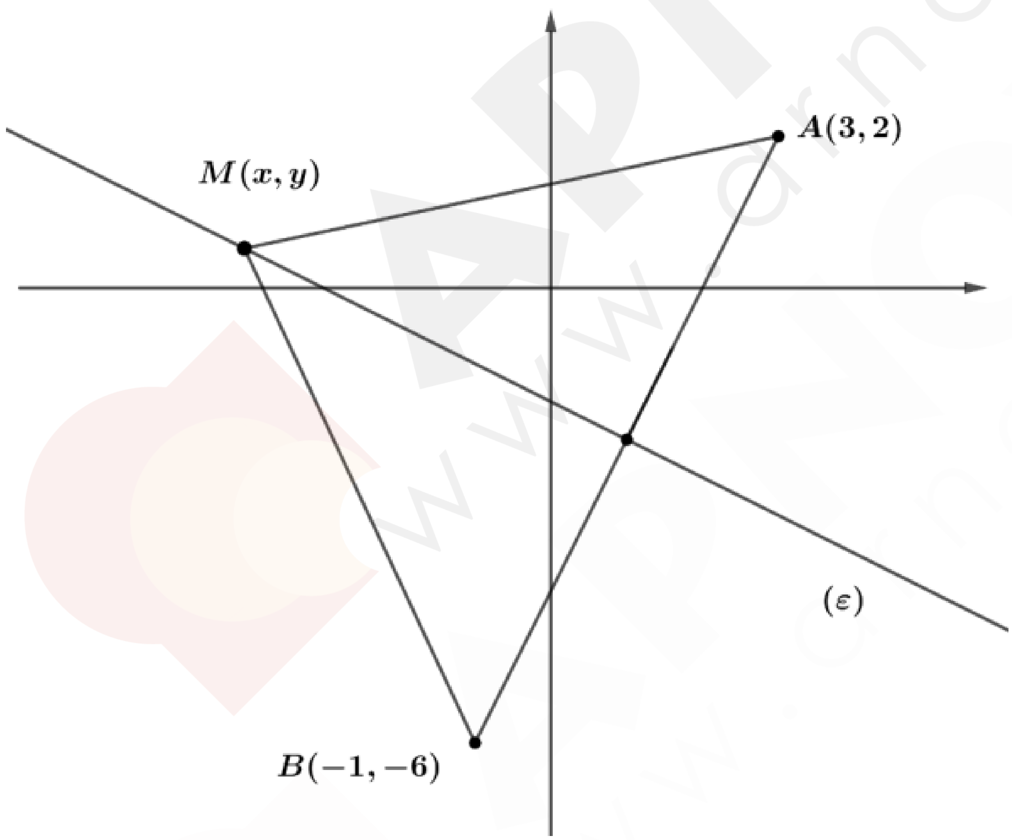
Επομένως η μεσοκάθετος (ε) του τμήματος ΑΒ έχει εξίσωση

$$y+2=-\frac{1}{2}(x-1)\Leftrightarrow x+2y+3=0.$$

Εναλλακτική λύση

Ένα σημείο M(x,y) ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος AB αν και μόνο αν

$$d(M,A)=d(M,B) \Leftrightarrow \sqrt{(3-x)^2+(2-y)^2}=\sqrt{(-1-x)^2+(-6-y)^2} \Leftrightarrow$$
$$(3-x)^2+(2-y)^2=(1+x)^2+(6+y)^2 \Leftrightarrow 9-6x+x^2+4-4y+y^2=1+2x+x^2+36+12y+y^2 \Leftrightarrow$$
$$9-6x+x^2+4-4y+y^2=1+2x+x^2+36+12y+y^2 \Leftrightarrow x+2y+3=0$$



3.Θέμα 21662 Αρχέτυπο

Δίνεται η ευθεία ε: $-x+y-2=0$ και τα σημεία Α(-5,1) και Β (-3,5).

α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α ως προς το σημείο Β. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε:

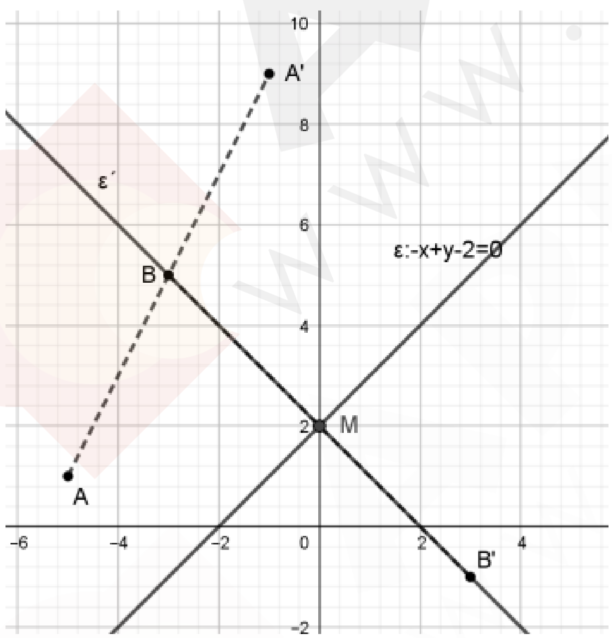
i. την εξίσωση της ευθείας ε' που διέρχεται από το Β και είναι κάθετη στην ε. (Μονάδες 5)

ii. το σημείο τομής των ευθειών ε και ε'. (Μονάδες 5)

iii. το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ε. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α)



Έστω Α' το συμμετρικό του Α ως προς το Β. Τότε το σημείο Β θα είναι το μέσο του ΑΑ'

οπότε: $x_B = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow x_{A'} = 2x_B - x_A = 2\cdot(-3) - (-5) = -6 + 5 = -1$ και

$y_B = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow y_{A'} = 2y_B - y_A = 2\cdot 5 - 1 = 10 - 1 = 9$. Άρα Α'(-1, 9).

β)

i. Είναι $\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = -\frac{-1}{1} = 1$.

Είναι ε′ ⊥ ε ⇔ $\lambda_{\varepsilon'} \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon'} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon'} = -1$,

οπότε ε′: $y - y_B = \lambda_{\varepsilon'}(x - x_B)$ ή ε′: $y - 5 = -1 \cdot (x + 3)$ ή ε′: $y = -x + 2$.

ii. Έστω Μ το σημείο τομής των ευθειών ε, ε′. Οι συντεταγμένες του του Μ, θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος των ε, ε′.

Είναι: $\begin{cases} -x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$, άρα Μ(0, 2).

iii. Αν Β′ είναι το συμμετρικό του Β ως προς την ευθεία ε, τότε το Β′ είναι σημείο της ευθείας ε′ και το Μ θα είναι το μέσο του ΒΒ′ οπότε:

$x_M = \frac{x_B + x_{B'}}{2} \Leftrightarrow x_{B'} = 2x_M - x_B = 2 \cdot 0 - (-3) = 3$ και

$y_M = \frac{y_B + y_{B'}}{2} \Leftrightarrow y_{B'} = 2y - y_B = 2 \cdot 2 - 5 = -1$, άρα Β′(3, -1).

4.Θέμα 22072 Αρχέτυπο

Δίνονται οι εξισώσεις (1): $\lambda x + (\lambda - 1)y - 4 = 0$ και (2): $(3\lambda + 1)x - 2\lambda y - 7 = 0$ με $\lambda \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda \in R$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1): $\lambda x+(\lambda-1)y-4=0$ αποτελεί εξίσωση ευθείας αν και μόνο αν $\begin{cases} \lambda \neq 0 \\ \text{ή} \\ \lambda - 1 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 0 \\ \text{ή} \\ \lambda \neq 1 \end{cases}$. Άρα επειδή δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζεται και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y, η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in R$.

Ομοίως η εξίσωση (2): $(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0$ αποτελεί εξίσωση ευθείας αν και μόνο αν

$\begin{cases} 3\lambda + 1 \neq 0 \\ \text{ή} \\ -2\lambda \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq -\frac{1}{3} \\ \text{ή} \\ \lambda \neq 0 \end{cases}$. Επίσης δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζεται και ο συντελεστής του x και ο συντελεστής του y, η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του $\lambda \in R$.

β) Έστω $\vec{\delta_1}$ = (λ-1, -λ) ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση την

$$\lambda x+(\lambda-1)y-4=0 \text{ και}$$

$\vec{\delta_2}$ = (-2λ, -3λ-1) ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση την

$$(3\lambda+1)x-2\lambda y-7=0.$$

Οι ευθείες με εξισώσεις (1) και (2) είναι κάθετες αν και μόνο αν:

$$\vec{\delta_1} \perp \vec{\delta_2} \Leftrightarrow \vec{\delta_1} \cdot \vec{\delta_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(-2\lambda)-\lambda(-3\lambda-1)=0$$

$$\Leftrightarrow -2\lambda^2+2\lambda+3\lambda^2+\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda=0 \text{ ή } \lambda=-3)$$

5.Θέμα 22092 Αρχέτυπο

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφή Α(1,4). Η πλευρά ΑΔ έχει εξίσωση $3x - 2y + 5 = 0$ και η διαγώνιος ΒΔ έχει εξίσωση $y = x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες Δ(−1,1). (Μονάδες 12)

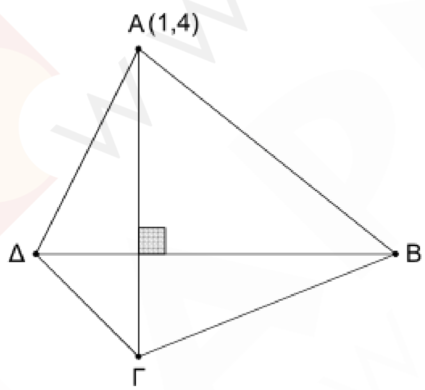
β) Αν οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες της κορυφής Δ προσδιορίζονται από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ΑΔ και ΒΔ που διέρχονται από το σημείο αυτό.

$$\begin{cases} 3x-2y+5=0 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2(x+2)+5=0 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2x-4+5=0 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Άρα $\Delta(-1,1)$.



β) Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα, οπότε οι συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_{\text{ΑΓ}}$, $\lambda_{\text{ΒΔ}}$ των διαγωνίων έχουν γινόμενο ίσο με -1, δηλαδή $\lambda_{\text{ΑΓ}} \cdot \lambda_{\text{ΒΔ}} = -1$.

Όμως από την εξίσωση της διαγωνίου ΒΔ προκύπτει ότι $\lambda_{\text{ΒΔ}} = 1$, άρα $\lambda_{\text{ΑΓ}} = -1$.

Η εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ είναι

$$y - y_{\text{Α}} = \lambda_{\text{ΑΓ}}(x - x_{\text{Α}}) \text{ ή } y - 4 = -1(x-1) \Leftrightarrow x + y - 5 = 0.$$

6.Θέμα 22171

Δίνονται οι ευθείες ε_1: $3x - y = 5$ και ε_2: $x - y + 1 = 0$.

α) Να βρεθεί το σημείο τομής τους Μ. (Μονάδες 10)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Μ(3,4) και είναι κάθετη στην (ε_2). (Μονάδες 10)

γ) Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_1). (Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε το σημείο τομής λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων.

$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x = y - 1 \end{cases}$. Στην 1η αντικαθιστούμε το x με y – 1. $\begin{cases} 3(y-1) - y = 5 \\ x = y - 1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3y - 3 - y = 5 \\ x = y - 1 \end{cases}$ ή

$\begin{cases} 2y = 8 \\ x = y - 1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 4 \\ x = 4 - 1 = 3 \end{cases}$. Επομένως το σημείο τομής είναι το Μ(3,4).

β) Η ζητούμενη ευθεία είναι κάθετη στην (ε_2), οπότε το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής της ζητούμενης ευθείας και της (ε_2) θα είναι -1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε_2) είναι $\lambda_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-1} = 1$.

Επομένως ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας θα είναι -1.

Η ευθεία διέρχεται από το Μ(3,4), οπότε η εξίσωση θα είναι $y - y_o = \lambda(x - x_o)$ ή $y - 4 = -1(x-3)$ ή $y = -x + 7$.

γ) Ένα διάνυσμα παράλληλο στην $Ax+By+\Gamma = 0$ είναι το $\vec{\delta} = (B,-A)$, οπότε για την ευθεία $3x - y - 5 = 0$ ένα διάνυσμα παράλληλο σε αυτήν είναι το $\vec{\delta} = (-1,-3)$.

Κωδικοί Θεμάτων 3:

15178

7.Θέμα 15178 Αρχέτυπο

Δίνεται η εξίσωση $(\mu+1)x+(\mu+2)y=0,\ \mu\in\mathbb{R}$ (1).

α)

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 02)

β)

i. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης 0; Ποια είναι η εξίσωσή της;

(Μονάδες 03)

ii. Πότε η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης; Ποια είναι η εξίσωσή της;

(Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού μ, προκύπτει ευθεία η οποία σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εξίσωσή της;

(Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α)

i. Η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για όλες τις πραγματικές τιμές του μ, εκτός από αυτές για τις οποίες είναι: $\begin{cases} \mu+1=0 \\ \mu+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=-1 \\ \mu=-2 \end{cases}$

Το παραπάνω σύστημα είναι αδύνατο, ως εκ τούτου η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

ii. Το σημείο $O(0,0)$ επαληθεύει την (1), επομένως όλες οι ευθείες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

β)

i. Αν $\mu=-1$, η (1) γράφεται $y=0$, έχει συντελεστή διεύθυνσης 0 και εκφράζει τον άξονα $x'x$.

ii. Αν $\mu=-2$, η (1) γράφεται $x=0$, δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης και εκφράζει τον άξονα $y'y$.

γ) Μία ευθεία (ε) σχηματίζει γωνία $45°$ με τον άξονα $x'x$ όταν $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 45° = 1$.

Αν $\mu+2=0 \Leftrightarrow \mu=-2$, η ευθεία έχει εξίσωση $x=0$, παριστάνει τον άξονα $y'y$ και σχηματίζει γωνία $90°$ με τον άξονα $x'x$.

Επομένως, πρέπει $\mu \neq -2$ οπότε ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης με $\lambda_\varepsilon = -\frac{\mu+1}{\mu+2}$.

Τότε, είναι: $1=-\frac{\mu+1}{\mu+2} \Leftrightarrow \mu+2=-\mu-1 \Leftrightarrow \mu=-\frac{3}{2}$.

Από (1)$\xRightarrow{\mu=-\frac{3}{2}}$ $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0 \Leftrightarrow y=x$.

Κωδικοί Θεμάτων 4:

14978, 15004, 15253, 15439, 15475, 16003, 16477, 18244, 21160

8.Θέμα 14978 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία $A(1,1), B(3,3)$.

α) Αν $M(x,y)$ σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του Μ από τα Α και Β αντίστοιχα.

(Μονάδες 6)

β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2, ώστε το σημείο Μ να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣΑΒ να είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Έστω $M(x,y)$ σημείο του επιπέδου, τότε:

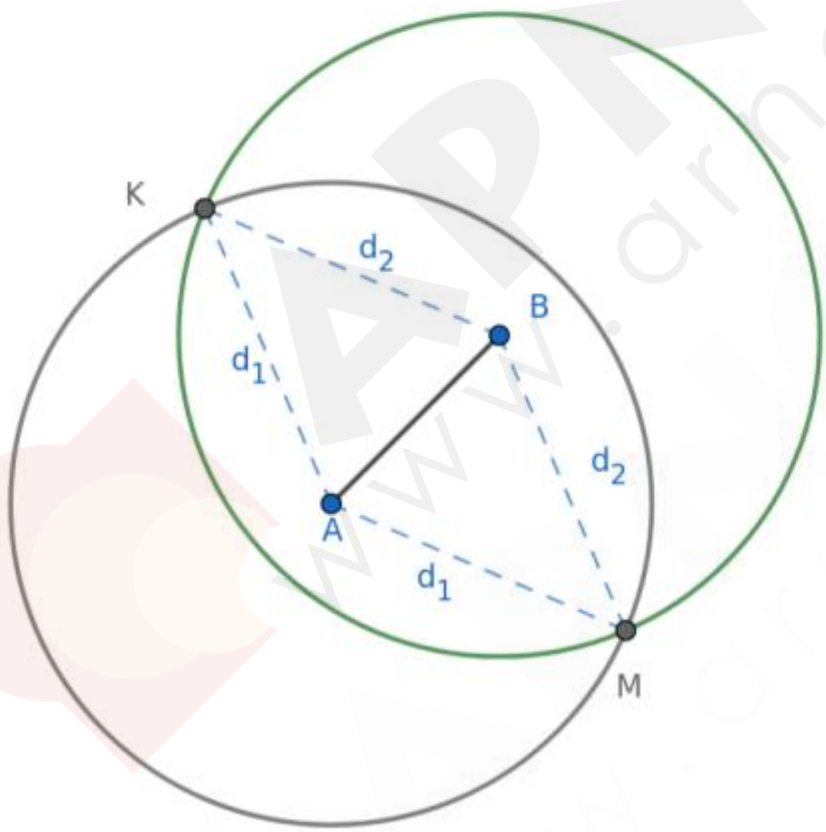
$d_1=(MA)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}, d_2=(MB)=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$.

β) Ένα σημείο ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, αν και μόνο αν ισαπέχει από τα άκρα του. Δηλαδή ισχύει $d_1=d_2$.

γ) Ισχύει ότι

$$d_1=d_2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2$$

Η τελευταία ισότητα παριστάνει τη σχέση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες για τα σημεία τομής δύο κύκλων με κέντρα τα Α(1,1) και Β(3,3) αντίστοιχα και ίσες ακτίνες που αντιστοιχούν στα σημεία Κ,Μ του σχήματος, τα οποία ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ.



Αναπτύσσοντας την τελευταία σχέση έχουμε:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-6x+9+y^2-6y+9 \Leftrightarrow$$
$$-2x-2y+2=-6x-6y+18 \Leftrightarrow x+y-4=0$$

Δηλαδή όλα τα σημεία $M(x,y)$, τα οποία ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ, ισοδύναμα ικανοποιούν τη σχέση $x+y-4=0$, η οποία είναι επομένως η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ.

Εναλλακτικά, μπορεί να βρεθεί το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και στη συνέχεια η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στο ΑΒ σε αυτό το σημείο.

δ) Για να είναι το τρίγωνο ΣΑΒ ισόπλευρο, αρκεί $AB=d_1=d_2$ δηλαδή οι κύκλοι $(A,d_1),(B,d_2)$ να έχουν ακτίνα ίση με ΑΒ.

$d_1=d_2=\sqrt{(1-3)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$.

Βρίσκουμε τα σημεία τομής του κύκλου με ακτίνα $d_1=2\sqrt{2}$ κέντρου Α με τη μεσοκάθετο, λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=8\\ x+y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(4-x-1)^2=8\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+1+9-6x+x^2=8\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-8x+2=0\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2-4x+1=0\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4\pm\sqrt{12}}{2}\\ y=4-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\pm\sqrt{3}\\ y=4-(2\pm\sqrt{3})\end{cases}\Leftrightarrow(x,y)=(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}) \text{ ή } (x,y)=(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$$

Δηλαδή βρήκαμε δύο σημεία Σ, το οποίο ήταν αναμενόμενο, αφού πρόκειται για τα δύο σημεία συμμετρικά του ΑΒ.

9.Θέμα 15004 Αρχέτυπο

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(4,2)$ και $B(8,5)$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $\varepsilon_1: 3x - 4y - 4 = 0$, να δείξετε ότι σχηματίζει με την ευθεία $\varepsilon_2: 7x - y - 1 = 0$ γωνία $\hat{\varphi} = 45^o$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2.

(Μονάδες 4)

δ) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_3 τέτοιας ώστε η ε_2 να διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_3.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε_1 είναι

$$\lambda_1 = \frac{5-2}{8-4} = \frac{3}{4}.$$

Άρα, η ε_1 έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_1: y - 2 = \frac{3}{4}(x-4) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_1: 4y - 8 = 3x - 12 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_1: 3x - 4y - 4 = 0.$$

β) Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-4,-3)$ και $\vec{\beta} = (-1,-7)$ είναι παράλληλα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Άρα, η οξεία γωνία $\hat{\varphi}$ των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$. Έχουμε ότι:

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$|\vec{\beta}| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

και

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (-4)(-1) + (-3)(-7) = 25.$$

Οπότε,

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sigma\upsilon\nu 45^o.$$

Άρα $\hat{\varphi} = (\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 45^o$.

γ) Για να βρούμε το σημείο τομής των ε_1 και ε_2, λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 4 = 0 \\ 7x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4(7x - 1) - 4 = 0 \\ y = 7x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -25x = 0 \\ 7x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Άρα, το σημείο τομής είναι το $(0,-1)$.

δ) Για να είναι η ε_2 διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_3, πρέπει για τη γωνία θ που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_3 να ισχύει $\hat{\theta} = 2 \cdot 45^o = 90^o$, δηλαδή πρέπει $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_3$. Άρα, αν λ_1 και λ_3 οι συντελεστές διεύθυνσης των ε_1 και ε_3, ισχύει $\lambda_1 \cdot \lambda_3 = -1$.

Είναι $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, οπότε:

$$\frac{3}{4}\lambda_3 = -1 \Leftrightarrow \lambda_3 = -\frac{4}{3}.$$

Επίσης, η ευθεία ε_3 πρέπει να διέρχεται από το σημείο τομής των ε_1 και ε_2, το οποίο από το ερώτημα γ) είναι το $(0,-1)$.

Άρα, η ε_3 έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_3: y-(-1) = -\frac{4}{3}(x-0) \Leftrightarrow$$
$$\varepsilon_3: 3y+3 = -4x \Leftrightarrow$$
$$\varepsilon_3: 4x+3y+3 = 0.$$

10.Θέμα 15253 Αρχέτυπο

Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2-1)x+(3\mu^2-2\mu-1)y-5\mu^2+4\mu+1=0$ (1), όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η (1) παριστάνει ευθεία ε.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ευθείες ε:

i. είναι παράλληλες στον xx'.

(Μονάδες 4)

ii. είναι παράλληλες στον yy'.

(Μονάδες 4)

iii. διέρχονται από το $(0,0)$.

(Μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες ε που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$, όπου

$A=\mu^2-1$, $B=3\mu^2-2\mu-1$, $\Gamma=-5\mu^2+4\mu+1$

Για να παριστάνει ευθεία πρέπει οι Α, Β να μη γίνονται ταυτόχρονα 0.

$A=0 \Leftrightarrow \mu^2-1=0 \Leftrightarrow$ μ = 1 ή μ = -1 , $B=0 \Leftrightarrow 3\mu^2-2\mu-1=0 \Leftrightarrow$ μ= 1 ή μ= $-\frac{1}{3}$

Συνεπώς η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του μ εκτός από την τιμή μ=1.

β)

i. Για να είναι παράλληλη στον xx' πρέπει $A=0 \Leftrightarrow$ μ = 1 ή μ= -1. Όμως η τιμή μ = 1 απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά μ = -1.

ii. Για να είναι παράλληλη στον yy' πρέπει $B=0 \Leftrightarrow$ μ = 1 ή μ= $-\frac{1}{3}$. Όμως η τιμή μ = 1 απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά μ= $-\frac{1}{3}$.

iii. Για να διέρχεται από το (0,0) πρέπει $\Gamma=0 \Leftrightarrow -5\mu^2+4\mu+1=0 \Leftrightarrow$ μ = 1 ή μ= $-\frac{1}{5}$

Όμως η τιμή μ = 1 απορρίπτεται από το α) οπότε τελικά $\mu=-\frac{1}{5}$.

γ) Για μ = -1 η (1) γίνεται $4y-8=0$ (ε_1).

Για μ = 0 η (1) γίνεται $-x-y+1=0$ (ε_2).

Οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο Μ με συντεταγμένες τη λύση του συστήματος

$\begin{cases} 4y-8=0 \\ -x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases}$ οπότε Μ (-1,2) .

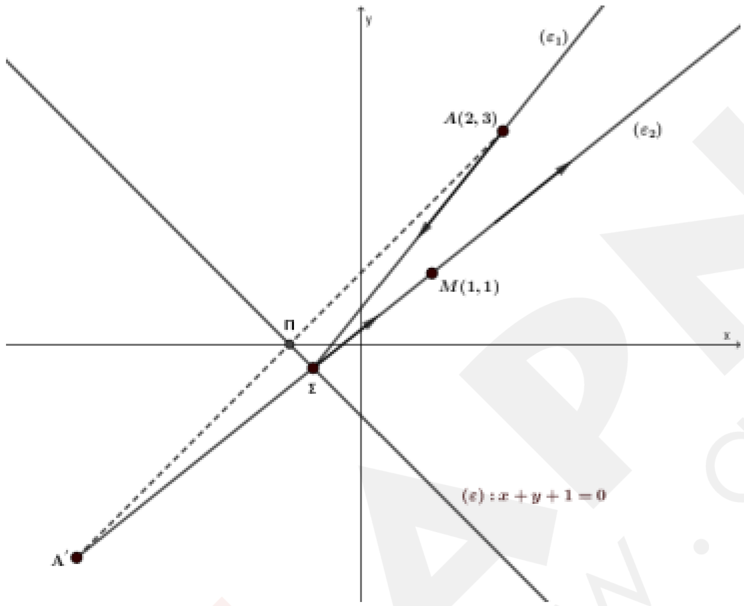
Οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την (1) για κάθε τιμή του μ αφού

$(\mu^2-1)\cdot(-1)+(3\mu^2-2\mu-1)\cdot 2-5\mu^2+4\mu+1=-\mu^2+1+6\mu^2-4\mu-2-5\mu^2+4\mu+1=0$

οπότε συμπεραίνουμε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1), διέρχονται από το σταθερό σημείο Μ(-1,2).

11.Θέμα 15439 Αρχέτυπο

Μία φωτεινή ακτίνα διερχόμενη από το σημείο $A(2,3)$ και προσπίπτουσα στην ευθεία (ε) με εξίσωση $x + y + 1 = 0$, μετά την ανάκλασή της διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.



α)

i. Να αποδείξετε ότι η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε) είναι το σημείο $\Pi(-1,0)$.

(Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία (ε), είναι το σημείο $A'(-4,-3)$.

(Μονάδες 5)

β)

i. Αν γνωρίζετε ότι η ανακλώμενη ακτίνα είναι η ευθεία (ε_2), η οποία διέρχεται από τα σημεία A', Σ, M, τότε να βρείτε την εξίσωσή της.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου πρόσπτωσης Σ της φωτεινής ακτίνας (ε_1) πάνω στην ευθεία (ε).

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α)

i. Βρίσκουμε την προβολή Π του σημείου A πάνω στην ευθεία (ε):

Αφού η κλίση της (ε) είναι $\lambda_\varepsilon = -1 \Rightarrow \lambda_{A\Pi} = 1$ γιατί η $A\Pi$ είναι κάθετη στην (ε).

Έτσι η $A\Pi$ έχει εξίσωση $y - 3 = 1(x - 2)$, δηλαδή $A\Pi: y = x + 1$.

Οι συντεταγμένες του σημείου A προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος:

$$(\Sigma_1)\begin{cases} y = x + 1 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ 2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Επομένως, $\Pi(-1{,}0)$.

ii. Βρίσκουμε το συμμετρικό σημείο $A'(x, y)$:

Το Π είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος AA', και ως εκ τούτου είναι:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{2} = -1 \\ \frac{y+3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}, \text{ δηλαδή } A'(-4, -3).$$

β)

i. Βρίσκουμε την ανακλώμενη ακτίνα (ε_2), δηλαδή την $A'M$:

Είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A'(-4, -3)$ και $M(1{,}1)$, δηλαδή

$$y - 1 = \frac{-3-1}{-4-1}(x - 1) \Leftrightarrow 4x - 5y + 1 = 0.$$

ii. Οι συντεταγμένες του σημείου Σ, δηλαδή του σημείου πρόσπτωσης της φωτεινής ακτίνας πάνω στην ευθεία (ε), προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος των ευθειών (ε) και (ε_2):

$$(\Sigma_2)\begin{cases} x+y+1=0 \\ 4x-5y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-4y-4=0 \\ 4x-5y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ -9y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{3}+1=0 \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}, \text{ δηλαδή } \Sigma\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right).$$

γ) Βρίσκουμε την προσπίπτουσα ακτίνα (ε_1), δηλαδή την $A\Sigma$:

Είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $\Sigma\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$, δηλαδή

$$y-3=\frac{3+\frac{1}{3}}{2+\frac{2}{3}}(x-2) \Leftrightarrow 5x-4y+2=0.$$

12.Θέμα 15475 Αρχέτυπο

Δύο εργοστάσια A και B τα οποία σε ένα σύστημα συντεταγμένων έχουν συντεταγμένες $A(2,1), B(4,3)$, βρίσκονται κοντά σε μια ακτή που πρόκειται να κατασκευαστεί μια αποβάθρα και θα εξυπηρετεί τα δύο εργοστάσια.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια.

(Μονάδες 8)

β) Αν η ακτή είναι ευθύγραμμη με εξίσωση ε:$y = 2x - 7$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της ακτής στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η αποβάθρα ώστε να απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια.

(Μονάδες 10)

γ) Αν το ζητούμενο σημείο του ερωτήματος β) είναι $N(4,1)$, να βρείτε πόσο απέχει το κάθε εργοστάσιο από το σημείο αυτό.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της ευθείας που συνδέει τα δύο εργοστάσια είναι:

$AB\colon y - 1 = \frac{3-1}{4-2} \cdot (x - 2)$, άρα $AB\colon y - 1 = 1 \cdot (x - 2)$.

Επομένως $AB\colon y = x - 1$.

β) Το σημείο της ακτής που απέχει εξ ίσου από τα δύο εργοστάσια είναι το σημείο τομής της ευθύγραμμης ακτής με τη μεσοκάθετο της AB.

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του μέσου $M(x_M, y_M)$ της AB.

Είναι $x_M = \frac{2+4}{2} = 3$ και $y_M = \frac{1+3}{2} = 2$. Άρα $M(3,2)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι $\lambda = 1$.

Η μεσοκάθετος ε' της AB θα έχει συντελεστή διεύθυνσης λ' για τον οποίο θα ισχύει:

$\lambda \cdot \lambda' = -1$. Άρα $\lambda' = -1$.

Η εξίσωση $\varepsilon': y - 2 = -1(x - 3)$, άρα $\varepsilon': y = -x + 5$.

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 = -x + 5 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 12 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$.

Άρα το ζητούμενο σημείο $N(4,1)$.

γ) Η απόσταση του καθενός από τα δύο εργοστάσια από το σημείο N της ακτής είναι:

$(AN) = (BN) = \sqrt{(2-4)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$.

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

13.Θέμα 16003

Θεωρούμε την οικογένεια των ευθειών $\varepsilon_\alpha : (\alpha-4)x-2\alpha y+\alpha+4=0,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\alpha=0$ και όταν $\alpha=1$ και κατόπιν να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο M.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το M.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι μια ευθεία της παραπάνω οικογένειας τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι $0<\alpha<4$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $(OA)=2(OB)$

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Με $\alpha=0$ έχουμε $\varepsilon_o : -4x+4=0 \Leftrightarrow x=1$, ενώ με $\alpha=1$ έχουμε $\varepsilon_1 : -3x-2y+5=0$.

Το κοινό τους σημείο προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x=1 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $x=1$ και $y=1$. Άρα οι ευθείες $\varepsilon_o, \varepsilon_1$ τέμνονται στο σημείο $M(1,1)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $M(1,1)$. Με $x=y=1$ η αρχική εξίσωση γράφεται $\alpha-4-2\alpha+\alpha+4=0$ και προφανώς ισχύει. Άρα, όλες οι ευθείες της οικογένειας διέρχονται από το σημείο M.

γ) i. Οι ευθείες που προκύπτουν όταν $\alpha=4$ ή $\alpha=0$ δεν τέμνουν και τους δυο άξονες αφού η πρώτη είναι παράλληλη στον x΄x και η δεύτερη στον y΄y. Έτσι, βρίσκουμε τα κοινά σημεία των ευθειών της οικογένειας με τους άξονες, όταν $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 4$.

Με $x=0$ έχουμε: $y=\frac{\alpha+4}{2\alpha}$, ενώ με $y=0$ έχουμε $x=-\frac{\alpha+4}{\alpha-4}$, οπότε τα κοινά σημεία με τους άξονες είναι τα $A\left(\frac{\alpha+4}{4-\alpha},0\right)$ και $B\left(0,\frac{\alpha+4}{2\alpha}\right)$. Τα σημεία A και B βρίσκονται στους θετικούς ημιάξονες, μόνο όταν:

$$\frac{\alpha+4}{4-\alpha}>0,\ (1)\quad \text{και}\quad \frac{\alpha+4}{2\alpha}>0,\ (2)$$

Είναι:

$$(1) \Leftrightarrow (\alpha+4)(4-\alpha)>0 \Leftrightarrow \alpha^2-16<0 \Leftrightarrow \alpha^2<16 \Leftrightarrow -4<\alpha<4,\ \text{με}\ \alpha \neq 0$$

$$(2) \Leftrightarrow 2\alpha(\alpha+4)>0 \Leftrightarrow \alpha<-4\ \text{ή}\ \alpha>0,\ \text{με}\ \alpha \neq 4$$

Η συναλήθευση των δυο αποτελεσμάτων δίνει $0<\alpha<4$ που είναι το ζητούμενο.

ii. Όταν $0<\alpha<4$, τα σημεία A, B είναι στους θετικούς ημιάξονες, οπότε

$$(OA)=\frac{\alpha+4}{4-\alpha}\ \text{και}\ (OB)=\frac{\alpha+4}{2\alpha}.$$

Επομένως

$$(OA)=2(OB) \Leftrightarrow \frac{\alpha+4}{4-\alpha}=2\frac{\alpha+4}{2\alpha} \Leftrightarrow \alpha=4-\alpha \Leftrightarrow \alpha=2$$

14.Θέμα 16477 Αρχέτυπο

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση ευθείας

$\varepsilon_\lambda : \lambda x + (1-\lambda)y + 2 = 0$, όπου λ αριθμός που μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, παριστάνει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ. Ακόμη δίνεται ότι ένα φορτηγό πλοίο είναι αγκυροβολημένο στο σημείο $O(0,0)$.

α)

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.

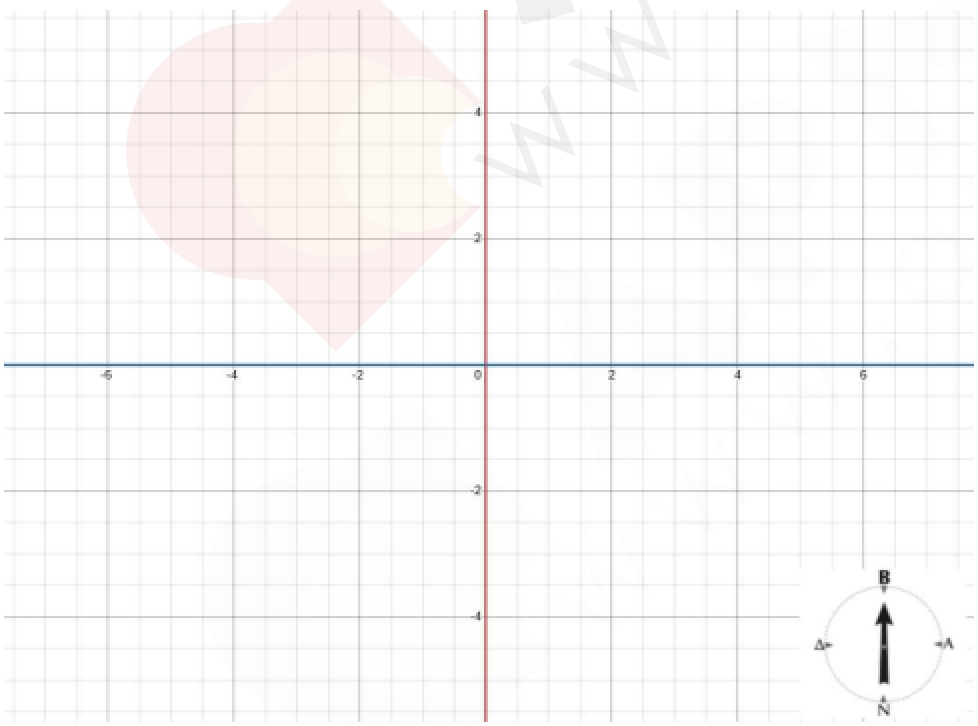
(Μονάδες 10)

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

(Μονάδες 5)

β) Ένα ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ. Η φωτεινή ακτίνα που φωτίζει το P έχει εξίσωση $x+y+4=0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P όταν είναι γνωστό ότι η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι ίση με 4 μονάδες μήκους.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

i. Όλες οι φωτεινές ακτίνες που παριστάνει η εξίσωση ε_λ διέρχονται από το φάρο Φ.

Επομένως οι συντεταγμένες του φάρου $\Phi(x_\Phi, y_\Phi)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε_λ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή είναι

$$\lambda x_\Phi + (1-\lambda)y_\Phi + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda x_\Phi + y_\Phi - \lambda y_\Phi + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x_\Phi - y_\Phi)\lambda + y_\Phi + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x_\Phi - y_\Phi = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ y_\Phi + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Phi = y_\Phi \\ \kappa\alpha\iota \\ y_\Phi = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_\Phi = -2 \\ \kappa\alpha\iota \\ y_\Phi = -2 \end{cases}$$

Οπότε οι συντεταγμένες του φάρου είναι $\Phi(-2,-2)$.

<u>Δεύτερος τρόπος</u>

Γνωρίζουμε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο Φ. Για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων του φάρου αρκεί να βρούμε το σημείο τομής δυο ευθειών της οικογένειας ε_λ.

Μια ευθεία της οικογένειας ε_λ προκύπτει για $\lambda = 1$ με εξίσωση $1x + (1-1)y + 2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$ και μια άλλη προκύπτει για $\lambda = 0$ με εξίσωση $0x + (1-0)y + 2 = 0 \Leftrightarrow y + 2 = 0$.

Για την εύρεση του κοινού σημείου Φ, των ευθειών με εξισώσεις $x + 2 = 0$ και $y + 2 = 0$, επιλύουμε το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} y + 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$

Είναι

$$\begin{cases} y + 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = -2 \end{cases}$$

άρα οι συντεταγμένες του φάρου είναι $\Phi(-2,-2)$.

ii. Έστω ότι υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο. Άρα υπάρχει πραγματικός αριθμός λ ώστε η ε_λ να

διέρχεται από το $\mathrm{O}(0,0)$. Τότε οι συντεταγμένες του $\mathrm{O}(0,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ε_λ.

Έχουμε $\lambda \cdot 0+(1-\lambda)\cdot 0+2=0 \Leftrightarrow 2=0$, άτοπο.

Οπότε δεν υπάρχει φωτεινή ακτίνα που εκπέμπεται από το φάρο προς το αγκυροβολημένο πλοίο.

β) Αν είναι $\mathrm{P}(x_\mathrm{P}, y_\mathrm{P})$ τότε ισχύει $y_\mathrm{P} > y_\Phi \Leftrightarrow y_\mathrm{P} > -2$ αφού το ρυμουλκό πλοίο P βρίσκεται βόρεια του φάρου Φ.

Επειδή το σημείο P ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $x+y+4=0$ ισχύει $x_\mathrm{P}+y_\mathrm{P}+4=0 \Leftrightarrow x_\mathrm{P}=-4-y_\mathrm{P}$. Οπότε είναι $\mathrm{P}(-4-y_\mathrm{P}, y_\mathrm{P})$ με $y_\mathrm{P}>-2$.

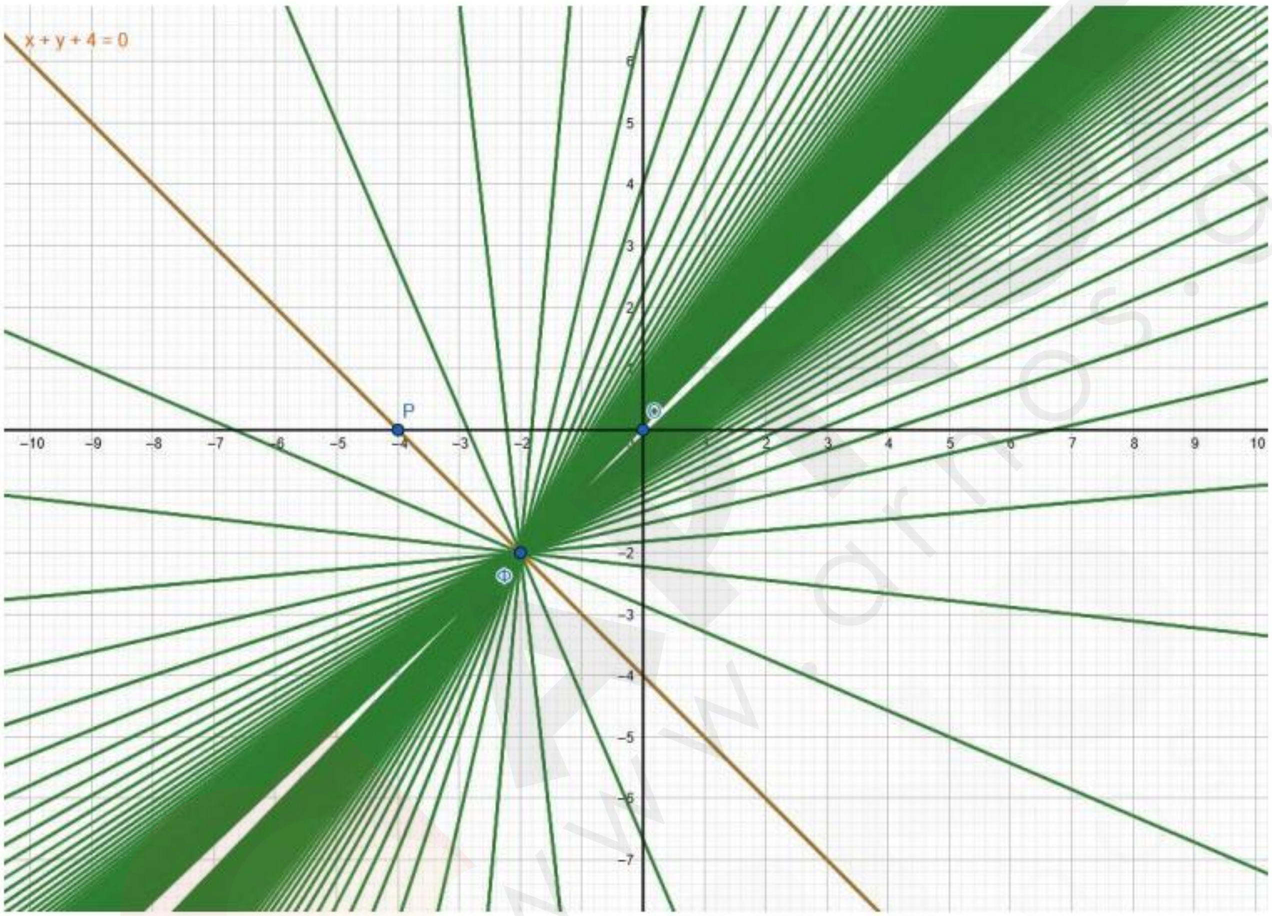
Η συντομότερη διαδρομή που πρέπει να διανύσει το ρυμουλκό πλοίο για να πάει προς το αγκυροβολημένο φορτηγό πλοίο είναι το ευθύγραμμο τμήμα PO με μήκος 4 μονάδες.

Είναι

$$\begin{aligned}
\mathrm{PO}=4 &\Leftrightarrow \sqrt{(x_\mathrm{O}-x_\mathrm{P})^2+(y_\mathrm{O}-y_\mathrm{P})^2}=4\\
&\Leftrightarrow \sqrt{(0-(-4-y_\mathrm{P}))^2+(0-y_\mathrm{P})^2}=4\\
&\Leftrightarrow \sqrt{(4+y_\mathrm{P})^2+y_\mathrm{P}^2}=4\\
&\Leftrightarrow \sqrt{2y_\mathrm{P}^2+8y_\mathrm{P}+16}=4\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{2y_\mathrm{P}^2+8y_\mathrm{P}+16}\right)^2=4^2\\
&\Leftrightarrow 2y_\mathrm{P}^2+8y_\mathrm{P}+16=16\\
&\Leftrightarrow 2y_\mathrm{P}^2+8y_\mathrm{P}=0\\
&\Leftrightarrow 2y_\mathrm{P}(y_\mathrm{P}+4)=0\\
&\Leftrightarrow 2y_\mathrm{P}=0 \text{ ή } y_\mathrm{P}+4=0\\
&\Leftrightarrow y_\mathrm{P}=0 \text{ ή } y_\mathrm{P}=-4
\end{aligned}$$

Δεκτή είναι μόνο η $y_\mathrm{P}=0>-2$ αφού $-4<-2$. Ακόμη είναι $x_\mathrm{P}=-4-y_\mathrm{P}=-4-0=-4$.

Τελικά, οι συντεταγμένες του ρυμουλκού πλοίου είναι $\mathrm{P}(-4,0)$.


x + y + 4 = 0
P

15.Θέμα 18244 Αρχέτυπο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y=\sqrt{3}x$ και $\varepsilon_2 : y=x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 με τον άξονα xx'.

(Μονάδες 6)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η οξεία γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι 15°.

(Μονάδες 3)

δ) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

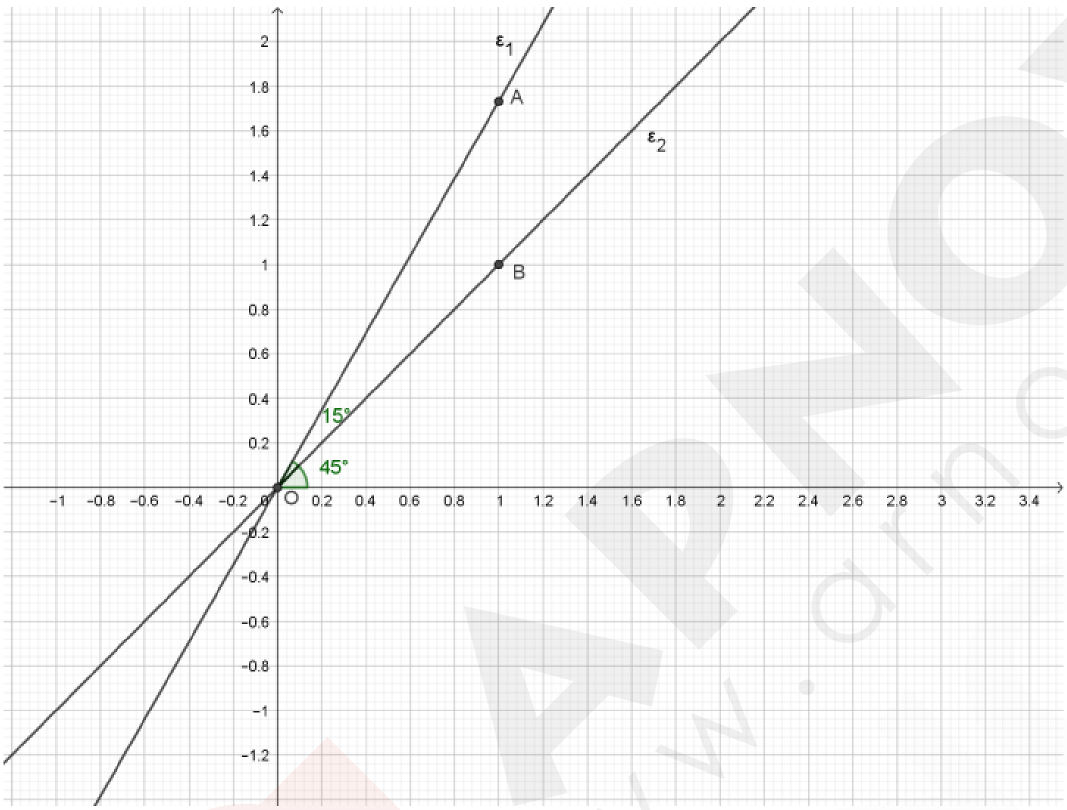
α) Η ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $\mathrm{A}(1,\sqrt{3})$ ενώ η ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $\mathrm{B}(1,1)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

β) Η ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\sqrt{3}$ οπότε σχηματίζει με τον xx′ γωνία 60°, ενώ ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης 1 οπότε σχηματίζει με τον xx′ γωνία 45°.

γ) Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι η διαφορά των γωνιών που σχηματίζει η κάθε μία από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με τον xx', δηλαδή $60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.

δ) Το $\vec{\delta}_1 = (1,\sqrt{3})$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε_1 και το $\vec{\delta}_2 = (1,1)$ είναι παράλληλο στην ευθεία ε_2. Είναι $\left|\vec{\delta}_1\right| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$, $\left|\vec{\delta}_2\right| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ και

$\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = (1,\sqrt{3})\cdot(1,1) = 1+\sqrt{3} > 0$ οπότε $\sigma\upsilon\nu 15^\circ = \sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}\right) = \dfrac{\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2}{\left|\vec{\delta}_1\right|\cdot\left|\vec{\delta}_2\right|} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.



16.Θέμα 21160 **Αρχέτυπο**

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία O(0, 0), B(κ, 0) και Γ(0,2κ) όπου κ θετικός πραγματικός αριθμός. Εξωτερικά του τριγώνου ΟΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ, τότε:

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που ανήκουν τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΖ.

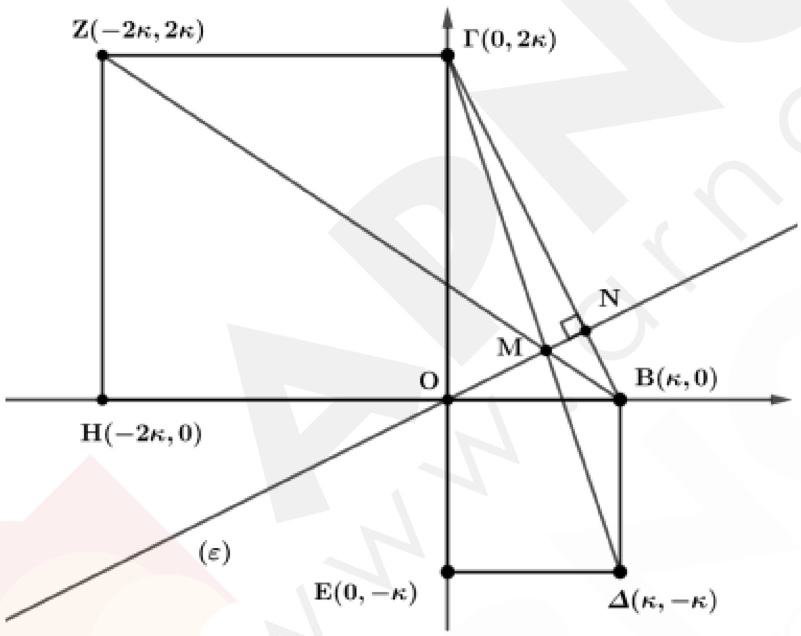
(Μονάδες 10)

β) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους του τριγώνου ΟΒΓ που διέρχεται από το Ο. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΓΔ, ΒΖ και το ύψος του β) ερωτήματος διέρχονται από το ίδιο σημείο. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή τα τετράπλευρα ΟΒΔΕ και ΟΓΖΗ είναι τετράγωνα, οι συντεταγμένες των κορυφών τους είναι: $\Delta(\kappa,-\kappa)$, $E(0,-\kappa)$, $Z(-2\kappa,2\kappa)$ και $H(-2\kappa,0)$.



Η εξίσωση της ευθείας ΓΔ είναι:

$$\frac{y-2\kappa}{x-0}=\frac{-\kappa-2\kappa}{\kappa-0} \Leftrightarrow \frac{y-2\kappa}{x}=\frac{-3\cancel{\kappa}}{\cancel{\kappa}}$$ επομένως $y-2\kappa=-3x \Leftrightarrow 3x+y-2\kappa=0.$

Η εξίσωση της ευθείας ΒΖ είναι:

$$\frac{y-2\kappa}{x-(-2\kappa)}=\frac{0-2\kappa}{\kappa-(-2\kappa)} \Leftrightarrow \frac{y-2\kappa}{x+2\kappa}=\frac{-2\cancel{\kappa}}{3\cancel{\kappa}}$$ επομένως $3y-6\kappa=-2x-4\kappa \Leftrightarrow 2x+3y-2\kappa=0.$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ είναι:

$$\lambda_{ΒΓ} = \frac{2κ - 0}{0 - κ} = -2.$$

η ευθεία (ε) που ορίζεται από το ύψος ΑΔ του ορθογωνίου τριγώνου ΟΒΓ, είναι κάθετη της πλευράς ΒΓ, επομένως για τους συντελεστές διεύθυνσης τους ισχύει:

$$\lambda_{ε} \cdot \lambda_{ΒΓ} = -1.$$

Επειδή $\lambda_{ΒΓ} = -2.$ έχουμε ότι:

$$\lambda_{ε} \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{ε} = \frac{1}{2}.$$

Η ευθεία (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει μορφή $y = \lambda_{ε} \cdot x$ δηλαδή $y = \frac{1}{2}x.$

γ) Για να αποδείξουμε ότι οι ευθείες που ορίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ, ΒΖ και η ευθεία (ε) διέρχονται από το ίδιο σημείο, αρκεί να βρούμε σημείο Μ του οποίου οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν όλες τις εξισώσεις των ευθειών. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι η τομή δύο ευθειών από τις τρεις ανήκει στην τρίτη ευθεία.

Οι συντεταγμένες της τομής Μ των ευθειών (ε) και ΓΔ δίνονται από την λύση του συστήματος:

$$\begin{Bmatrix} 3x + y - 2κ = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3x + \frac{1}{2}x - 2κ = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \frac{4}{7}κ \\ y = \frac{2}{7}κ \end{Bmatrix} \text{ επομένως } Μ\left(\frac{4}{7}κ, \frac{2}{7}κ\right).$$

Το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα ΒΖ αφού οι συντεταγμένες του Μ την επαληθεύουν, πράγματι

$$2 \cdot \frac{4}{7}κ + 3 \cdot \frac{2}{7}κ - 2κ = \frac{8}{7}κ + \frac{6}{7}κ - 2κ = \frac{14}{7}κ - 2κ = 2κ - 2κ = 0.$$

επομένως οι ευθείες που ορίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ, ΒΖ και η ευθεία (ε) διέρχονται από το ίδιο σημείο.