Κεφ. 2.1. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 – Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course Των Μαθηματικών, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

15027, 15044, 15271, 15657, 16002, 16766, 18236, 18351, 21964, 21965, 22071, 22173

1.Θέμα 15027 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία Α(1,-1) και Β(3,5) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

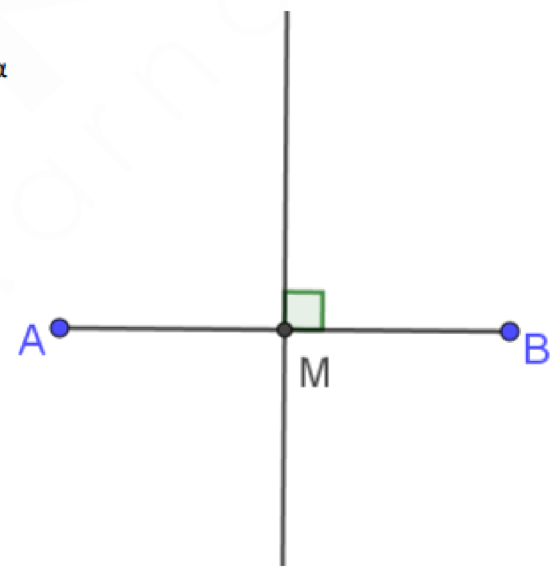
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι $\lambda = \frac{5-(-1)}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$.

β) Το μέσο Μ του ΑΒ έχει συντεταγμένες $\mathrm{M}(\frac{1+3}{2}, \frac{-1+5}{2})$ δηλαδή Μ(2,2).

γ) Αν (ε) η ζητούμενη μεσοκάθετος τότε $(\varepsilon) \perp \mathrm{AB}$ οπότε $\lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\mathrm{AB}} = -1$ και άρα $\lambda_{\varepsilon} \cdot 3 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = -\frac{1}{3}$.

Η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Μ(2,2) και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon} = -\frac{1}{3}$, οπότε $(\varepsilon): y-2 = -\frac{1}{3}(x-2)$.

2.Θέμα 15044

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $B(6,-1)$.

α)

i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB, είναι το σημείο $M(3,2)$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος AB.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι $\lambda_{AB} = \lambda_1 = \frac{-1-5}{6-0} = -1$.

ii. Αν $M(x_M, y_M)$, ισχύει: $\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 3 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \end{cases}$

β) Η μεσοκάθετη ευθεία (ε) του ευθύγραμμου τμήματος AB διέρχεται από το σημείο $M(3,2)$ και έχει κλίση λ, η οποία προκύπτει από την εξίσωση:

$$\lambda \cdot \lambda_1 = -1 \Leftrightarrow \lambda \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Επομένως η εξίσωσή της είναι η $y - 2 = 1 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow \ (\varepsilon): y = x - 1$.

3.Θέμα 15271 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ και $\Gamma(-13, -7)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα Α, Β έχει εξίσωση $y = x + 5$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ΑΒ.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α, Β έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{6-2}{1+3} = 1$.

β) Η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$ και διέρχεται από το σημείο Α, οπότε έχει εξίσωση $y - 2 = 1(x+3)$ δηλαδή είναι η $y = x + 5$.

γ) Το σημείο Γ είναι πάνω στην ευθεία ΑΒ μόνο όταν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ΑΒ. Με $x = -13$ στον τύπο της ευθείας ΑΒ έχουμε:

$$y = -13 + 5 = -8 \neq y_\Gamma = -7$$

Άρα το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ΑΒ.

4.Θέμα 15657 Αρχέτυπο

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$.

α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο M.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 : 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε το κοινό σημείο των ευθειών ε_1 και ε_2 θα λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 6 \\ -2x + 4y = 4 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5y = 10 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2. \end{cases}$$

Οπότε το σημείο M έχει συντεταγμένες $M(2,2)$.

β) Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 : 3x - y = 4$ θα διέρχονται από το ίδιο σημείο, εάν η ευθεία $3x - y = 4$ διέρχεται από το $M(2,2)$, δηλαδή εάν: $3 \cdot 2 - 2 = 4$, που ισχύει.

5.Θέμα 16002

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A(3,-2)$ και $\Gamma(5,2)$. Αν το σημείο $M\left(3,\frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $B(1,-1)$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΓ.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Αν $B(x,y)$, τότε έχουμε:

$$\frac{x+5}{2}=3 \text{ και } \frac{y+2}{2}=\frac{1}{2}$$

οπότε $x=1$ και $y=-1$, άρα $B(1,-1)$.

β) Το μήκος της πλευράς ΒΓ είναι $(B\Gamma)=\sqrt{(5-1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

γ) Η ευθεία ΑΓ διέρχεται από το σημείο $A(3,-2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda=\frac{2+2}{5-3}=\frac{4}{2}=2$$

οπότε η εξίσωσή της είναι η $y+2=2(x-3)$, που γράφεται $y=2x-8$.

6.Θέμα 16766 Αρχέτυπο

Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $x-3y=4$ και $9x+3y=6$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(1,-1)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $x-3y-4=0$

και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=-\frac{A}{B}=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$

Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση $9x+3y-6=0$

και συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=-\frac{A}{B}=-\frac{9}{3}=-3$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda_1\lambda_2=\frac{1}{3}(-3)=-1$$

Άρα, οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β) Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, οπότε:

$$10x = 10 \text{ ή } x = 1$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $9x + 3y = 6$ και έχουμε διαδοχικά:

$$9 + 3y = 6$$

$$3y = -3$$

$$y = -1$$

Άρα, το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι το $A(1, -1)$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = x_o$. Επομένως, η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι $x = 1$.

7.Θέμα 18236 Αρχέτυπο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A(-1, 5)$ και $B(2, 1)$. Αν οι πλευρές ΑΓ και ΒΓ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1 : y = -x + 4$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma(4, 0)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε:

i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ

(Μονάδες 6)

ii. την εξίσωση του ύψους ΒΔ.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α)Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και προσδιορίζεται από τη λύση του αντίστοιχου συστήματος. Είναι:

$$\begin{cases} y=-x+4 \\ y=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+4=-\frac{1}{2}x+2 \\ y=-x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x=4-8 \\ y=-x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$$

οπότε $\Gamma(4,0)$.

β) i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ είναι

$$\lambda_{A\Gamma}=\frac{0-5}{4+1}=-1$$

ii. Το ύψος ΒΔ είναι κάθετο στην πλευρά ΑΓ, οπότε $\lambda_{B\Delta}\cdot\lambda_{A\Gamma}=-1$ με $\lambda_{A\Gamma}=-1$, οπότε $\lambda_{B\Delta}=1$. Επομένως η εξίσωση του ύψους ΒΔ είναι:

$$y-1=1(x-2)\Leftrightarrow y=x-1$$

8.Θέμα 18351

Δίνονται τα σημεία Α(-1,5), Β(3,3). Να υπολογίσετε:

α) Τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 8)

β) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

(Μονάδες 8)

γ) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ είναι:

$$\mathrm{M}\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = (1,4)$$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-5}{3-(-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

γ) Για τη μεσοκάθετο (η) του τμήματος ΑΒ ισχύει:

$$\eta \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\eta \cdot \lambda_{AB} = -1$$

Επομένως, $\lambda_\eta = 2$.

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος ΑΒ είναι:

$$y - y_M = \lambda_\eta (x - x_M)$$
$$y - 4 = 2(x - 1)$$
$$y = 2x + 2$$

9.Θέμα 21964 Αρχέτυπο

Δίνονται το σημείο Α(4,-2) και η ευθεία (ε_1) με εξίσωση: $x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:

α) την ευθεία (ε_2) που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία (ε_1).

(Μονάδες 8)

β) το σημείο τομής Β, των ευθειών (ε_1) και (ε_2): $y = -x + 2$. (Μονάδες 8)

γ) το συμμετρικό Γ του σημείου Α, ως προς την ευθεία (ε_1). (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση: y = x + 2, συνεπώς συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 1$. Η ευθεία (ε_2) είναι κάθετη στην ευθεία ε_1, συνεπώς το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των δύο ευθειών θα ισούται με -1, άρα $\lambda_2 = -1$. Επιπλέον η ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο Α, άρα η εξίσωσή της θα είναι:

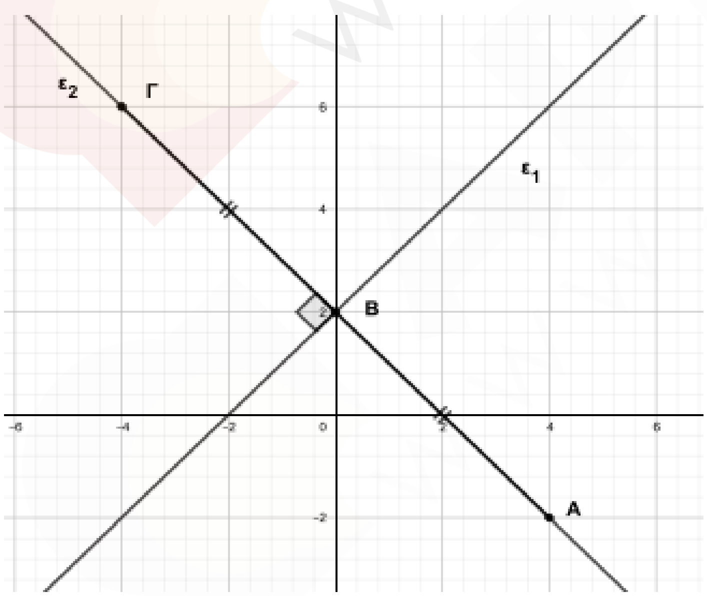
$y - y_A = \lambda_2 \cdot (x - x_A)$ ή $y - (-2) = -1\cdot(x - 4)$ ή $y + 2 = -x + 4$ ή $y = -x + 2$. Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε_2) είναι: y = -x + 2.

β) οι συντεταγμένες του σημείου τομής Β, των δύο ευθειών (ε_1) και (ε_2) θα προκύψει από τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 = -x + 2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = x + 2 \\ 2x = 0 \end{cases}$ ή

$\begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$. Άρα Β(0,2).

γ) Αν Γ το συμμετρικό του Α ως προς το Β τότε τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά και μάλιστα το Β είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ, άρα θα ισχύει:

$\begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} \end{cases}$ ή $\begin{cases} 0 = \frac{4 + x_\Gamma}{2} \\ 2 = \frac{-2 + y_\Gamma}{2} \end{cases}$ ή $\begin{cases} x_\Gamma = -4 \\ y_\Gamma = 6 \end{cases}$. Οπότε το συμμετρικό του σημείο Α ως προς την ευθεία (ε1) είναι το σημείο Γ(-4,6).



10.Θέμα 21965 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία Α(2, -4) και Β(0, -2)

α) Να βρείτε το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 5)

γ) Αν (ζ): y = x – 4 και (ε): y = 2·x-6, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ), (ε). (Μονάδες 9)

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία (ε) είναι η $(x-2)^2+(y+2)^2=4$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Για το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ ισχύει: Μ$\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ ή Μ$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-4+(-2)}{2}\right)$ ή Μ(1, -3).

β) Η κλίση του ΑΒ είναι $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2-(-4)}{0-2}=\frac{2}{-2}=-1$. Η κλίση της μεσοκαθέτου (ζ) του ΑΒ θα πρέπει να είναι λ = 1 (αφού το γινόμενο των δύο κλίσεων θα πρέπει να ισούται με -1). Η εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του τμήματος ΑΒ θα είναι: $y-y_M=\lambda\cdot(x-x_M)$ ή y - (-3) = 1 (x – 1) ή y + 3 = x - 1 ή y = x - 4.

γ) το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ζ) θα έχει συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος:

$\begin{cases} y=x-4 \\ y=2x-6 \end{cases}$ ή x – 4 = 2x – 6 ή x = 2 και y = -2. Άρα το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το σημείο (2, -2).

δ) το κέντρο Κ του κύκλου θα πρέπει να ανήκει ταυτόχρονα στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ, την ευθεία (ζ) και στην ευθεία (ε) άρα θα πρέπει να είναι το σημείο τομής τους που βρήκαμε στο ερώτημα β), δηλαδή το Κ(2, -2). Η ακτίνα του κύκλου θα είναι ρ = (ΚΑ) = (ΚΒ) αλλά ρ = (ΚΒ) = $\sqrt{(2-0)^2+(-2+2)^2}$ = $\sqrt{4+0}$ = 2.

Η εξίσωση του κύκλου θα είναι: $(x-2)^2+(y+2)^2=4$

11.Θέμα 22071 Αρχέτυπο

Οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχουν εξισώσεις x+2y+1=0 και 2x+y+5=0 αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο Κ(1,2).

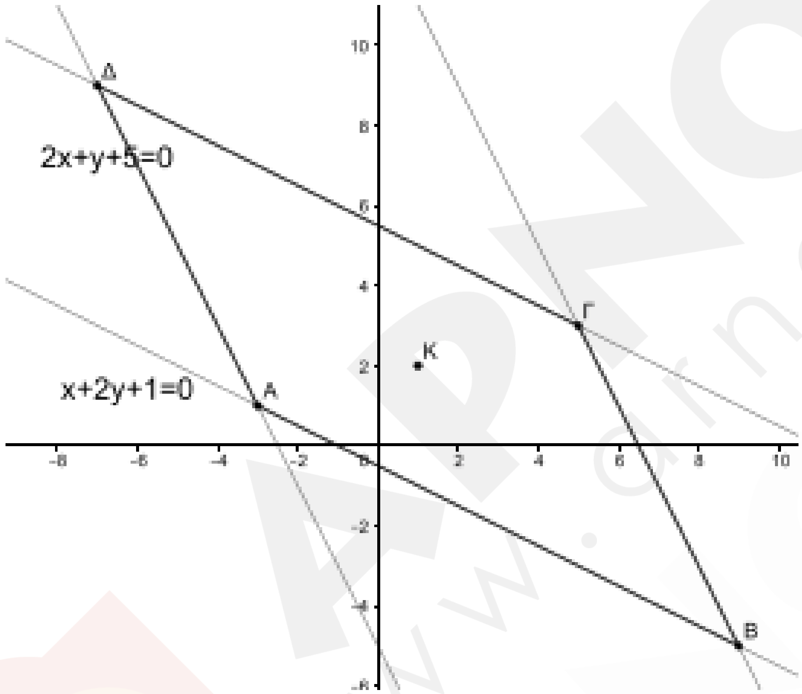
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η κορυφή Α του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Α(-3, 1). (Μονάδες 08)

ii. Η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Γ(5, 3). (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του ΒΓ και ΓΔ. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ



α)

i. Έστω ΑΒΓΔ το παραλληλόγραμμο στο οποίο είναι ΑΒ: x+2y+1=0 και ΑΔ: 2x+y+5=0. Το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΑΔ είναι το σημείο Α, του οποίου οι συντεταγμένες προκύπτουν από τη λύση του παρακάτω συστήματος.

$$(\Sigma): \begin{cases} x+2y+1=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-4y-2=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y+3=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

Άρα Α(-3, 1).

ii. Το σημείο Κ είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, οπότε είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ. Αν $\Gamma(x_\Gamma,y_\Gamma)$, τότε για το σημείο Κ έχουμε, $K\left(\frac{-3+x_\Gamma}{2},\frac{1+y_\Gamma}{2}\right)$. Όμως οι συντεταγμένες του Κ είναι (1,2), οπότε $\frac{-3+x_\Gamma}{2}=1 \Leftrightarrow x_\Gamma=5$ και $\frac{1+y_\Gamma}{2}=2 \Leftrightarrow y_\Gamma=3$.

Άρα Γ(5,3).

β) Η πλευρά ΒΓ διέρχεται από το σημείο Γ(5,3) και ΒΓ//ΑΔ. Η εξίσωση της ευθείας ΑΔ είναι: 2x+y+5=0 με $λ_{ΑΔ} = -2$. Άρα $λ_{ΒΓ} = -2$, οπότε η εξίσωση της ΒΓ είναι

$$ΒΓ: y - y_Γ = -2(x - x_Γ) \text{ ή } y-3 = -2\cdot(x-5) \Leftrightarrow 2x+y-13=0.$$

Η πλευρά ΓΔ διέρχεται από το Γ(5,3) και ΓΔ//ΑΒ. Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι x+2y+1=0 με $λ_{ΑΒ} = -\frac{1}{2}$. Άρα $λ_{ΓΔ} = -\frac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση της ΓΔ είναι:

$$ΓΔ: y - y_Γ = -\frac{1}{2}(x - x_Γ) \text{ ή } y-3 = -\frac{1}{2}(x-5) \Leftrightarrow x+2y-11=0$$

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

12.Θέμα 22173 Αρχέτυπο

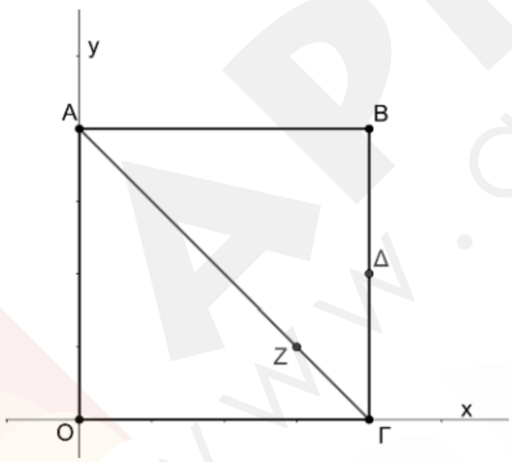
Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΟ με κορυφές τα σημεία Α(0,4), Β(4,4), Γ(4,0), Ο(0,0). Στην διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$. Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της ΒΓ.

α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ. (Μονάδες 07)

ii. Τις συντεταγμένες του σημείου Ζ. (Μονάδες 09)

β) Αν το σημείο Δ είναι το (4,2) και το σημείο Ζ το (3,1), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΔ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ. (Μονάδες 09)



ΛΥΣΗ

α)

i. Οι συντεταγμένες του μέσου Δ του ΒΓ δίνονται από τους τύπους

$$x_\Delta = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} = \frac{4+4}{2} = 4 \text{ και } y_\Delta = \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = \frac{4+0}{2} = 2.$$

Επομένως, είναι Δ(4,2).

ii. Έστω Ζ(x,y). Τότε $\overrightarrow{AZ} = (x_Z - x_A, y_Z - y_A) = (x-0, y-4) = (x, y-4)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A) = (4-0, 0-4) = (4,-4)$.

Όμως $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$, άρα $(x, y-4) = \frac{3}{4}(4,-4) = (3,-3)$.

Επομένως x = 3 και y – 4 = -3, δηλαδή y = 1. Άρα, είναι Ζ(3,1).

Θέμα 4 – Κωδικοί:

14970, 15029, 15275, 15658, 17078, 18568

13.Θέμα 14970 Αρχέτυπο

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο $M(2,1)$.

α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της.

ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

(Μονάδες 6) (2+4)

β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x′x και y′y στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ.

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

(Μονάδες 19) (6+7+6)

ΛΥΣΗ

ΛΥΣΗ

α) i. Αφού η ευθεία διέρχεται από το Μ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, η εξίσωση της είναι $y-1=\lambda(x-2)$ που γράφεται $y=\lambda x-2\lambda+1$.

ii. Σε κάθε περίπτωση που ισχύει $\lambda \neq 0$ η ευθεία τέμνει και τους δυο άξονες και όταν δεν διέρχεται από την αρχή Ο, δηλαδή όταν $\lambda \neq \frac{1}{2}$, σχηματίζει τρίγωνο .

Επομένως, η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες μόνο όταν $\lambda \in \mathbb{R}-\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.

β) i. Με $y=0$ στην εξίσωση της ευθείας, παίρνουμε $x=\frac{2\lambda-1}{\lambda}$, οπότε $A\left(\frac{2\lambda-1}{\lambda}, 0\right)$, ενώ με $x=0$ παίρνουμε $y=-2\lambda+1$, οπότε $B(0,-2\lambda+1)$. Επομένως τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ είναι:

$$(OA)=\frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|} \text{ και } (OB)=|-2\lambda+1|=|2\lambda-1|$$

ii. Η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, μόνο όταν $(OA)=(OB)$. Είναι:

$$(OA)=(OB) \Leftrightarrow \frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|}=|2\lambda-1| \Leftrightarrow |2\lambda-1|(|\lambda|-1)=0 \Leftrightarrow |\lambda|-1=0$$

αφού $\lambda \neq \frac{1}{2}$. Άρα η ευθεία σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο, όταν $\lambda=-1$ ή $\lambda=1$.

iii. Αν $\lambda=-1$, τότε $(OA)=3$ και $(OB)=3$, οπότε το εμβαδόν (OAB) του τριγώνου ΟΑΒ είναι $(OAB)=\frac{9}{2}$

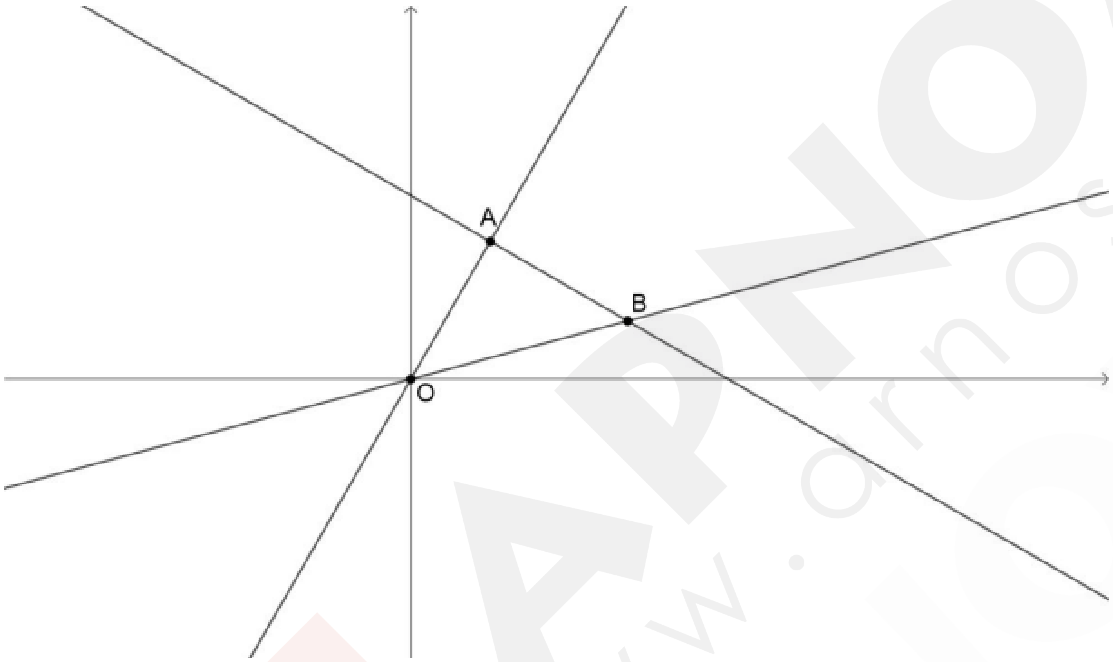
Αν $\lambda=1$, τότε $(OA)=1$ και $(OB)=1$, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $(OAB)=\frac{1}{2}$

Σχόλιο

Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (υποτείνουσα) με τον άξονα $x'x$ είναι 45° ή 135°. Έτσι, έχουμε $\lambda=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$ ή $\lambda=\varepsilon\varphi 135^\circ=-1$ που είναι οι τιμές που βρήκαμε παραπάνω.

14.Θέμα 15029 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και τη γωνία ϕ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$.

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι $\varepsilon\phi 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η κλίση της ευθείας ΟΑ είναι $\lambda_{OA} = \frac{\sqrt{3}-0}{1-0} = \sqrt{3}$ και επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση $y = \sqrt{3}\cdot x$. Η γωνία ω που σχηματίζει με τον $x'x$ έχει εφαπτομένη $\sqrt{3}$, οπότε είναι $\omega = 60^\circ$.

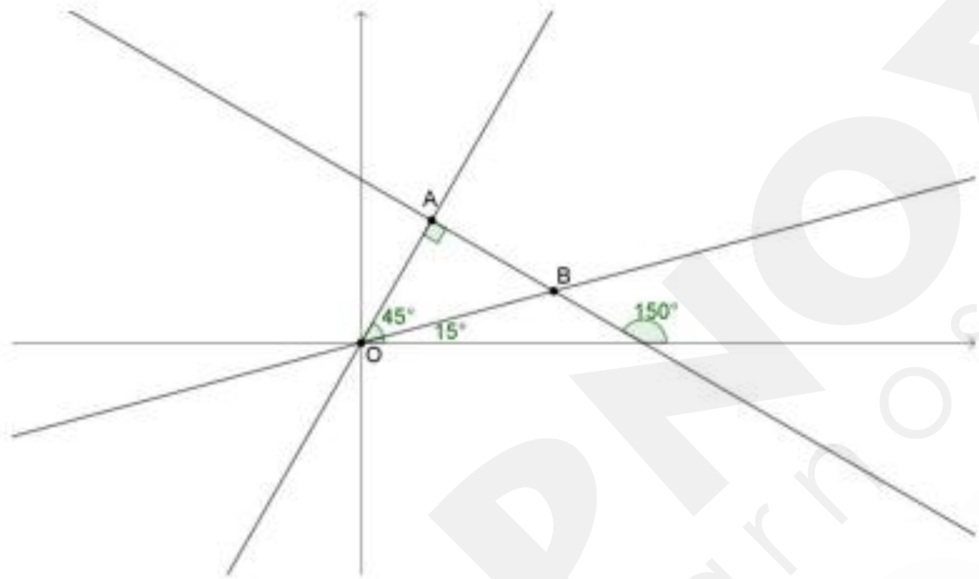
β) Η κλίση της ευθείας ΑΒ είναι $\lambda_{AB} = \frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1-1} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και αφού διέρχεται από το σημείο $A(1,\sqrt{3})$ έχει εξίσωση $y-\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Η γωνία ϕ που σχηματίζει με τον $x'x$ έχει εφαπτομένη $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε είναι $\phi = 150^\circ$.

γ) Είναι $\lambda_{OA}\cdot\lambda_{AB} = \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1$, δηλαδή $OA \perp AB$, οπότε το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

Επίσης $(OA) = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\sqrt{3}-0\right)^2} = 2$, $(AB) = \sqrt{(\sqrt{3}+1-1)^2 + (\sqrt{3}-1-\sqrt{3})^2} = 2$ και αφού $(OA) = (AB)$ το ΟΑΒ είναι και ισοσκελές.

δ) Αν θ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΟΒ με τον $x'x$, είναι $\theta = \omega - A\hat{O}B = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$, αφού $A\hat{O}B = 45^\circ$ δεδομένου ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$. Όμως $\varepsilon\phi\theta = \varepsilon\phi 15^\circ$ είναι η κλίση της ευθείας ΟΒ δηλαδή $\frac{\sqrt{3}-1-0}{\sqrt{3}+1-0} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$. Συνεπώς $\varepsilon\phi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.


A
B
O
45°
15°
150°

15.Θέμα 15275 Αρχέτυπο

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο $M(2,1)$.

α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της.

(Μονάδες 2)

ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

(Μονάδες 5)

β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

(Μονάδες 6)

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) i. Αφού η ευθεία διέρχεται από το Μ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, η εξίσωση της είναι $y-1=\lambda(x-2)$ που γράφεται $y=\lambda x-2\lambda+1$.

ii. Σε κάθε περίπτωση που ισχύει $\lambda\neq 0$ η ευθεία τέμνει και τους δυο άξονες και όταν δεν διέρχεται από την αρχή Ο, δηλαδή όταν $\lambda\neq\frac{1}{2}$, σχηματίζει τρίγωνο.

Επομένως, η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες μόνο όταν $\lambda\in\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$.

β) i. Με $y=0$ στην εξίσωση της ευθείας, παίρνουμε $x=\dfrac{2\lambda-1}{\lambda}$, οπότε $A\left(\dfrac{2\lambda-1}{\lambda},0\right)$, ενώ με $x=0$ παίρνουμε $y=-2\lambda+1$, οπότε $B(0,-2\lambda+1)$. Επομένως τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ είναι:

$$(OA)=\frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|} \text{ και } (OB)=|-2\lambda+1|=|2\lambda-1|$$

ii. Η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, μόνο όταν $(OA)=(OB)$. Είναι:

$$(OA)=(OB)\Leftrightarrow\frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|}=|2\lambda-1|\Leftrightarrow|2\lambda-1|(|\lambda|-1)=0\Leftrightarrow|\lambda|-1=0$$

αφού $\lambda\neq\frac{1}{2}$. Άρα η ευθεία σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο, όταν $\lambda=-1$ ή $\lambda=1$.

iii. Αν $\lambda=-1$, τότε $(OA)=3$ και $(OB)=3$, οπότε το εμβαδόν (OAB) του τριγώνου ΟΑΒ είναι $(OAB)=\frac{9}{2}$

Αν $\lambda=1$, τότε $(OA)=1$ και $(OB)=1$, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $(OAB)=\frac{1}{2}$

Σχόλιο

Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (υποτείνουσα) με τον άξονα $x'x$ είναι 45° ή 135°. Έτσι, έχουμε $\lambda=\varepsilon\varphi45^\circ=1$ ή $\lambda=\varepsilon\varphi135^\circ=-1$ που είναι οι τιμές που βρήκαμε παραπάνω.

16.Θέμα 15658 Αρχέτυπο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-2)$ και $\vec{\beta}=(1,1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο $\mathrm{K}(2,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB,

i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $\mathrm{A}(4,-1)$ και $\mathrm{B}(3,2)$.

(Μονάδες 5)

ii. να δείξετε ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$.

(Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB και $|\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot 1+(-2)\cdot 1=0$, άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

β)

i. Το σημείο $\mathrm{K}(2,1)$ είναι η αρχή και το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}=(2,-2)$, οπότε: $x_\mathrm{A}-x_\mathrm{K}=2 \Leftrightarrow x_\mathrm{A}-2=2 \Leftrightarrow x_\mathrm{A}=4$.

$$y_\mathrm{A}-y_\mathrm{K}=-2 \Leftrightarrow y_\mathrm{A}-1=-2 \Leftrightarrow y_\mathrm{A}=-1.$$

Άρα $\mathrm{A}(4,-1)$. Το σημείο $\mathrm{K}(2,1)$ είναι η αρχή και το σημείο B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}=(1,1)$, οπότε: $x_\mathrm{B}-x_\mathrm{K}=1 \Leftrightarrow x_\mathrm{B}-2=1 \Leftrightarrow x_\mathrm{B}=3$.

$$y_\mathrm{B}-y_\mathrm{K}=1 \Leftrightarrow y_\mathrm{B}-1=1 \Leftrightarrow y_\mathrm{B}=2.$$

Άρα $\mathrm{B}(3,2)$.

17.Θέμα 17078 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία $A(3,2\alpha)$, $B(4,\alpha)$, $\Gamma(\alpha+1,1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha,1)$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση $y=-\alpha x+5\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν $\alpha=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

(Μονάδες 7)

iii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha\neq\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

(Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) i) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(3,2\alpha)$ και $B(4,\alpha)$ είναι

$$\lambda=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\alpha-2\alpha}{4-3}=\frac{-\alpha}{1}=-\alpha\,,$$

οπότε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση

$y-y_A=\lambda(x-x_A)$ ή $y-2\alpha=-\alpha(x-3)$ ή $y-2\alpha=-\alpha x+3\alpha$ ή $y=-\alpha x+5\alpha$.

ii) Τα σημεία $\Gamma(\alpha+1,1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha,1)$ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της, $y=-\alpha x+5\alpha$. Έχουμε διαδοχικά

$1-\alpha=-\alpha(\alpha+1)+5\alpha$ ή $1-\alpha=-\alpha^2-\alpha+5\alpha$ ή $\alpha^2-5\alpha+1=0$ ή $\alpha=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$,

επίσης $1=-\alpha\cdot\alpha+5\alpha$ ή $1=-\alpha^2+5\alpha$ ή $\alpha^2-5\alpha+1=0$ ή $\alpha=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

iii) Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,, y_B - y_A) = (4-3\,,\ \alpha - 2\alpha\,) = (1\,, -\alpha\,)$ και

$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (x_\Gamma - x_\Delta\,, y_\Gamma - y_\Delta) = (\alpha + 1 - \alpha\ \,,\ 1 - \alpha - 1) = (1\,, -\alpha\,)$.

Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} = (1\,, -\alpha\,)$. Όμως από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι, όταν $\alpha \neq \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ τα σημεία Γ και Δ δεν ανήκουν στην ευθεία AB. Τότε, επειδή $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$, τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Delta\Gamma$ θα είναι παράλληλα, επίσης θα έχουν ίσα μήκη, οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Έστω ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο για κάποιο $\alpha \neq \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. Τότε θα έχουμε $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Delta}|$. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\overrightarrow{AB} = (1\,, -\alpha\,)$, άρα $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-\alpha)^2} = \sqrt{1+\alpha^2}$. Επίσης είναι $\overrightarrow{A\Delta} = (x_\Delta - x_A\,, y_\Delta - y_A) = (\alpha - 3, 1 - 2\alpha)$, άρα $|\overrightarrow{A\Delta}| = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (1-2\alpha)^2} = \sqrt{5\alpha^2 - 10\alpha + 10}$.

Επομένως θα έχουμε $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Delta}|$ ή $\sqrt{1+\alpha^2} = \sqrt{5\alpha^2 - 10\alpha + 10}$ ή $5\alpha^2 - 10\alpha + 10 = 1 + \alpha^2$ ή $4\alpha^2 - 10\alpha + 9 = 0$.

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = (-10)^2 - 4\cdot 4\cdot 9 = -44 < 0$, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

18.Θέμα 18568 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία Α(2,4), Β(-1,0) και Γ(3,-2).

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 04)

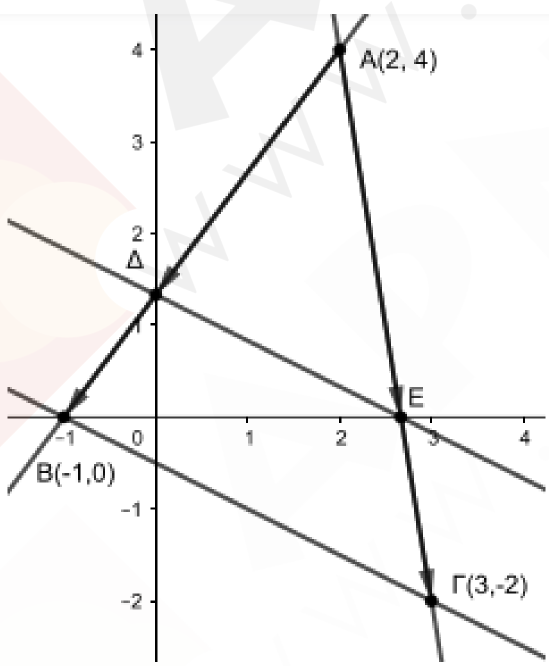
β) Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τον άξονα y'y σε ένα σημείο Δ και η ευθεία ΑΓ τέμνει τον άξονα x'x σε ένα σημείο Ε, τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε. (Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta\mathrm{B}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{E}\Gamma}$. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ. (Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ



α) Οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ΑΒ και ΑΓ ορίζονται και είναι

$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-4}{-1-2} = \frac{4}{3}$ και $\lambda_{A\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A} = \frac{-2-4}{3-2} = \frac{-6}{1} = -6$. Επειδή $\lambda_{AB} \neq \lambda_{A\Gamma}$ οι ευθείες ΑΒ και ΑΓ δεν είναι παράλληλες, οπότε τα σημεία Α,Β και Γ δεν είναι συνευθειακά και αποτελούν κορυφές τριγώνου.

β) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{4}{3}$ από το α) ερώτημα και διέρχεται από το σημείο Α(2,4), άρα η εξίσωσή της είναι: (ΑΒ): $y - y_A = \lambda(x - x_A)$ ή $y - 4 = \frac{4}{3}(x-2)$ ή $4x - 3y + 4 = 0$.

Η ευθεία ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης -6 από το α) ερώτημα και διέρχεται από το σημείο Γ(3,-2), άρα η εξίσωσή της είναι: (ΑΓ): $y - y_\Gamma = \lambda(x - x_\Gamma)$ ή $y + 2 = -6(x-3)$ ή $6x + y - 16 = 0$.

i. Στην εξίσωση της ευθείας ΑΒ θέτουμε x=0 για να βρούμε το σημείο που τέμνει τον άξονα y'y και έχουμε: $4 \cdot 0 - 3y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}$. Άρα $\Delta\left(0, \frac{4}{3}\right)$. Ομοίως στην εξίσωση της ευθείας ΑΓ θέτουμε y=0 για να βρούμε το σημείο που τέμνει τον άξονα x'x και έχουμε: $6x + 0 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$. Άρα $E\left(\frac{8}{3}, 0\right)$.

ii. $\overrightarrow{A\Delta} = (0-2, \frac{4}{3} - 4) = (-2, -\frac{8}{3}) = 2 \cdot (-1, -\frac{4}{3})$ και $\overrightarrow{\Delta B} = (-1-0, 0-\frac{4}{3}) = (-1, -\frac{4}{3})$, οπότε προφανώς $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta B}$. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}$ έχουμε:

$\overrightarrow{\Delta E} = (\frac{8}{3} - 2,\ 0 - 4) = (\frac{2}{3}, -4) = 2 \cdot (\frac{1}{3}, -2)$ και $\overrightarrow{E\Gamma} = (3 - \frac{8}{3}, -2 - 0) = (\frac{1}{3}, -2)$ και ισχύει επίσης ότι $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{E\Gamma}$.

γ) $\lambda_{\Delta E} = \frac{\frac{4}{3} - 0}{0 - \frac{8}{3}} = -\frac{1}{2}$ και $\lambda_{B\Gamma} = \frac{-2-0}{3+1} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. Άρα $\lambda_{\Delta E} = \lambda_{B\Gamma}$, επομένως η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ευθείας ΒΓ.