

## Κεφ. 1.5. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 – Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας [www.arnos.gr](http://www.arnos.gr) για το Course Των Μαθηματικών, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύψος της Τράπεζας.

#### Θέμα 2 - Κωδικοί:

14586, 14953, 15038, 15073, 15186, 15252, 15317, 15379, 15463, 15825, 15852, 15996,  
16141, 16144, 16426, 16427, 16428, 17075, 20685, 20888, 22170, 22554

#### 1.Θέμα 14586 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία  $A(1,2)$ ,  $B(3,4)$  και  $\Gamma(5,-2)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{A\Gamma}$  και να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{A}$  είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) Αν  $M$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$ , να βρείτε τα μέτρα των  $\overrightarrow{AM}$  και  $\overrightarrow{B\Gamma}$ . (Μονάδες 8)

γ) Να γραφεί το  $\overrightarrow{B\Gamma}$  ως γραμμικός συνδυασμός των  $\overrightarrow{A\Gamma}$  και  $\overrightarrow{AM}$ . (Μονάδες 8)

Έξυπνα & Εύκολα!

**2.Θέμα 14953 Αρχέτυπο**

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(-2, 5), B(7, 8), \Gamma(1, -4)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{A\Gamma}$ .

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία  $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ .

(Μονάδες 5)

**3.Θέμα 15038 Αρχέτυπο**

Θεωρούμε διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  τέτοια ώστε  $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$  και  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ .

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα  $\vec{\alpha}^2$  και  $\vec{\beta}^2$ .

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι  $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$ .

(Μονάδες 10)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**4.Θέμα 15073**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1,2)$  και  $\vec{\beta} = (2,3)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ .

(Μονάδες 9)

**5.Θέμα 15186 Αρχέτυπο**

Δίνονται τα σημεία  $A(2,1)$ ,  $B(6,3)$ ,  $\Delta(1,-2)$  και  $\Gamma(9,2)$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο  $M$  του τμήματος  $AB$  έχει συντεταγμένες  $(4,2)$  και το μέσο  $N$  του τμήματος  $\Gamma\Delta$  έχει συντεταγμένες  $(5,0)$ .

(Μονάδες 8)

β)  $\overrightarrow{MN} = (1,-2)$  και  $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8,4)$ .

(Μονάδες 8)

γ)  $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ .

(Μονάδες 9)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**6.Θέμα 15252 Αρχέτυπο**

Δίνονται τα διανύσματα  $\overline{AB} = (2,1)$  και  $\overline{AG} = (3,-1)$ .

α) Να δείξετε ότι  $\overline{BG} = (1,-2)$ .

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 8)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**7.Θέμα 15317**

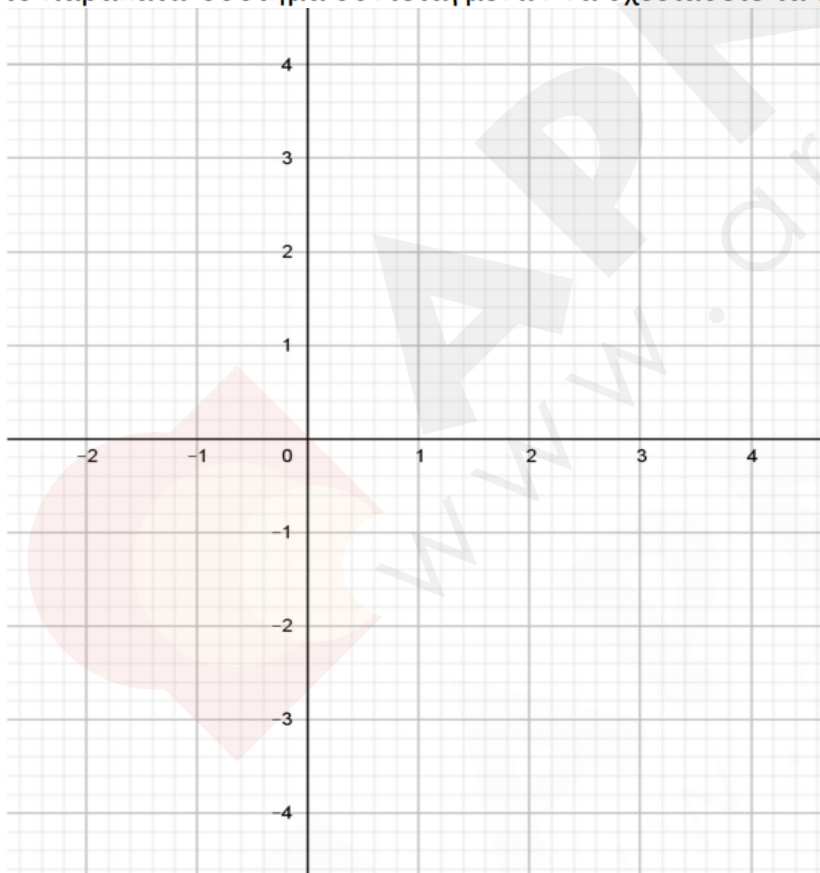
Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{v} = (3, 0)$  και  $\vec{w} = (-3, 4)$ .

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

β)

i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα  $\vec{v}$  και  $\vec{w}$ .



(Μονάδες 10)

ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας  $\theta$  που σχηματίζουν τα διανύσματα.

(Μονάδες 3)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**8.Θέμα 15379**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1,3)$ ,  $\vec{\beta} = (3,-1)$ .

Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ .

(Μονάδες 13)

β) το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

(Μονάδες 12)

**9.Θέμα 15463**

Δίνονται τα διανύσματα  $\overline{AB} = (2,1)$  και  $\overline{AG} = (3,-1)$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\overline{BG} = (1,-2)$ .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι  $\overline{AB} \perp \overline{BG}$ .

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι  $|\overline{AB}| = |\overline{BG}|$ .

(Μονάδες 8)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**10.Θέμα 15825 Αρχέτυπο**

Θεωρούμε τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}|=2, |\vec{\beta}|=4, (\vec{\alpha}, \vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$  και το  $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$ .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$ .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη  $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$ .

(Μονάδες 7)

**11.Θέμα 15852**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (3,2), \vec{\beta} = (-2,1)$ .

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα  $\vec{\nu} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ .

(Μονάδες 7)

β) το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  και το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha}$ .

(Μονάδες 6)

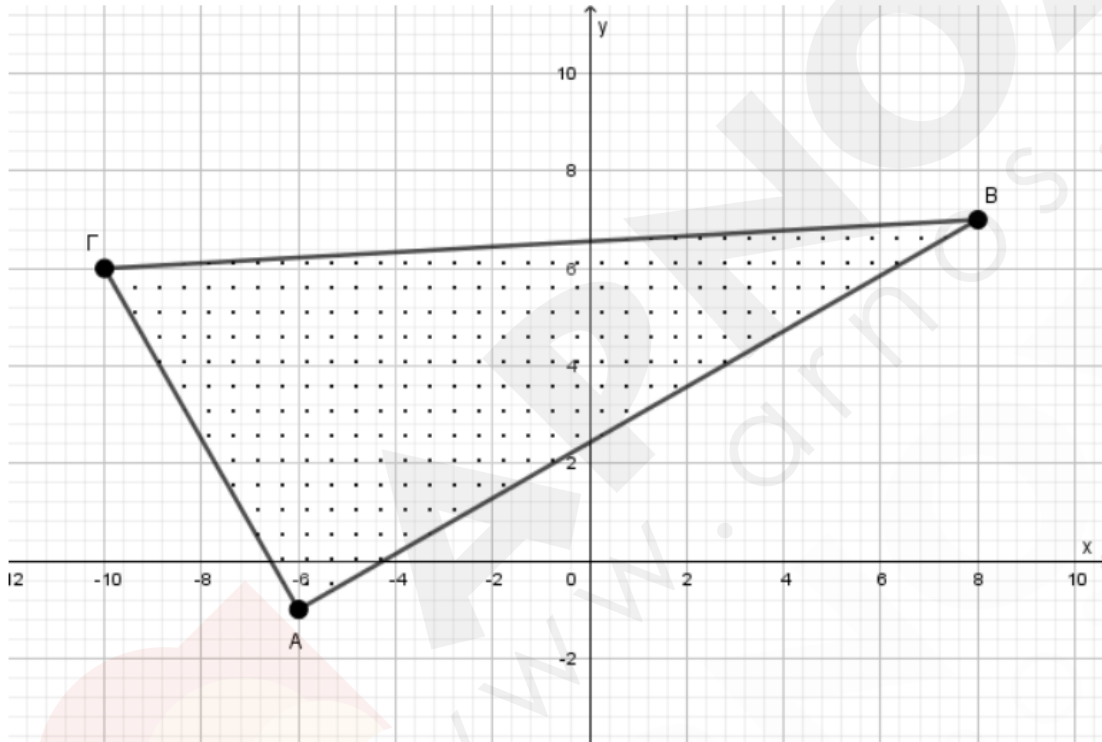
γ) το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu}$ .

(Μονάδες 12)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**12.Θέμα 15996 Αρχέτυπο**

Δίνονται τα σημεία  $A(-6, -1)$ ,  $B(8,7)$ ,  $\Gamma(-10,6)$ , τα οποία ορίζουν τρίγωνο  $AB\Gamma$ .



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\vec{AB}$ ,  $\vec{B\Gamma}$  και του αθροίσματος τους  $\vec{AB} + \vec{B\Gamma}$ .

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

(Μονάδες 15)

**Έξυπνα & Εύκολα!**



**13.Θέμα 16141 Αρχέτυπο**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  πλευράς 10 και το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$ .

α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

i.  $(\widehat{AB}, \widehat{A\Gamma})$

ii.  $(\widehat{AM}, \widehat{B\Gamma})$

iii.  $(\widehat{AM}, \widehat{\Gamma A})$

iv.  $(\widehat{BM}, \widehat{\Gamma M})$

v.  $(\widehat{\Gamma M}, \widehat{\Gamma B})$

(Μονάδες 10)

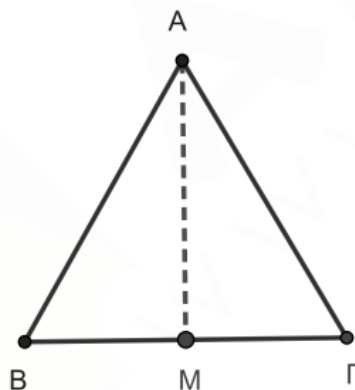
β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

i.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

ii.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$

iii.  $\overrightarrow{\Gamma M} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}$

(Μονάδες 15)



*Έξυπνα & Εύκολα!*

**14.Θέμα 16144 Αρχέτυπο**

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και  $\hat{A} = 60^\circ$ . Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

α)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

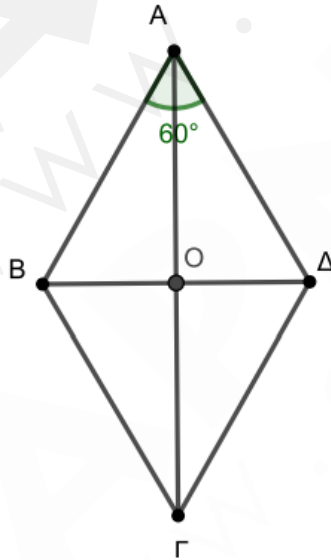
β)  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG}$

γ)  $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AO}$

δ)  $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB}$

ε)  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{GD}$

(Μονάδες 25)



**Έξυπνα & Εύκολα!**

**15.Θέμα 16426 Αρχέτυπο**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (2, -1)$  και  $\vec{\beta} = (-3, 2)$ .

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (x, y)$  όταν  $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$  και  $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$ . (Μονάδες 15)

**16.Θέμα 16427 Αρχέτυπο**

Δίνονται τα σημεία  $A(-2, 3)$ ,  $B(0, 8)$ ,  $\Gamma(5, 3)$  και  $\Delta(10, 5)$ . Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ . (Μονάδες 12)

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$  με τον άξονα  $x'$ . (Μονάδες 13)

**17.Θέμα 16428 Αρχέτυπο**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  με:  $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$  και  $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$ .

α) Να αποδείξετε ότι:  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$ . (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ . (Μονάδες 10)

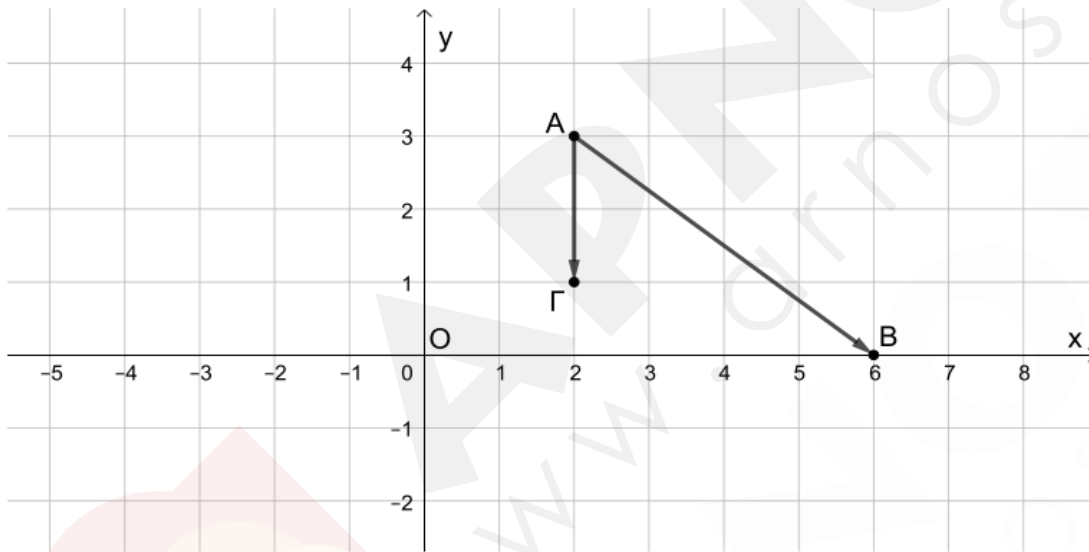
Έξυπνα & Εύκολα!

**18.Θέμα 17075**

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα  $\vec{AB}$  και  $\vec{AG}$  του καρτεσιανού επιπέδου  $Oxy$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\vec{AB} = (4, -3)$  και  $\vec{AG} = (0, -2)$ . (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{AB}$  και  $\vec{AG}$ . (Μονάδες 13)



**Έξυπνα & Εύκολα!**

**19.Θέμα 20685 Αρχέτυπο**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{u} = (1,1)$ ,  $\vec{w} = (-10,2)$  και τα σημεία  $A(-1,2)$ ,  $B(\beta, 0)$ ,  $\Gamma(0,\gamma)$ . Τα διανύσματα  $\vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  είναι κάθετα και το διάνυσμα  $\vec{w}$  είναι παράλληλο στο διάνυσμα  $\overrightarrow{A\Gamma}$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\overrightarrow{AB}$  και να αποδείξετε ότι  $\beta = 1$ .

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\overrightarrow{A\Gamma}$  και να αποδείξετε ότι  $\gamma = \frac{9}{5}$ .

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ .

(Μονάδες 7)

**20.Θέμα 20888**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$ , για τα οποία ισχύουν:  $|\vec{\alpha}| = 4$ ,  $|\vec{\beta}| = 5$ ,  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$

και  $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ . Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ .

(Μονάδες 10)

β) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$ .

(Μονάδες 15)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**21.Θέμα 22170 Αρχέτυπο**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (-1,3)$ ,  $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$  και  $\vec{\nu} = (x^2, x - 1)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ . (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τους αριθμούς  $x$  για τους οποίους τα διανύσματα  $\vec{u} = (3,4)$  και  $\vec{\nu}$  είναι κάθετα.  
(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε τους αριθμούς  $x$  για τους οποίους τα διανύσματα  $\vec{\nu}$  και  $\vec{\beta}$  είναι συγγραμμικά;  
(Μονάδες 09)

**22.Θέμα 22554**

Στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$ , με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων  $x'x$ ,  $y'y$  τα  $\vec{i}, \vec{j}$  αντίστοιχα, τα σημεία  $A$  και  $B$  έχουν διανύσματα θέσεως  $\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$  και  $\vec{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$ .

Έστω  $M$  ένα σημείο τέτοιο ώστε  $\vec{OM} = \frac{1}{5}(2\vec{OA} - \vec{OB})$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\vec{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ , (Μονάδες 8)

ii.  $\vec{OM} = \vec{j}$ . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{AB} \cdot \vec{OM}$ . (Μονάδες 9)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

Θέμα 3 - Κωδικός:

18243

**23. Θέμα 18243 Αρχέτυπο**

Θεωρούμε τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}|=2$ ,  $|\vec{\beta}|=4$ ,  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$  και τα διανύσματα

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \text{ και } \vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}.$$

α) Να βρείτε το  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το  $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$ .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα  $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη γωνία  $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$ .

(Μονάδες 5)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

Θέμα 4 - Κωδικοί:

15320, 18520, 18547

**24.Θέμα 15320 Αρχέτυπο**

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με  $\overline{OA} = \vec{\alpha}$  και  $\overline{OB} = \vec{\beta}$ , όπου  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i.  $|\overline{OG}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2.$

(Μονάδες 9)

ii.  $|\overline{AB}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2.$

(Μονάδες 9)

β) Αν  $|\overline{OG}| = |\overline{AB}|$ , να δείξετε ότι το ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 7)

**Έξυπνα & Εύκολα!**



**25.Θέμα 18520 Αρχέτυπο**

α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  ισχύει:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad (1)$$

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο  $OAGB$  με  $\vec{OA} = \vec{\alpha}$  και  $\vec{OB} = \vec{\beta}$ .

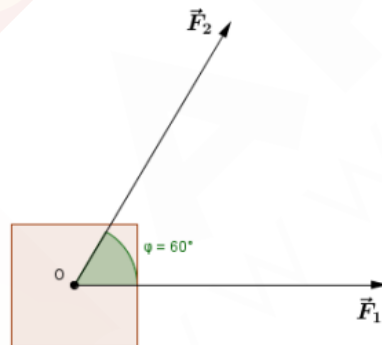
i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ .

(Μονάδες 05)

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

(Μονάδες 04)

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις  $\vec{F}_1$  και  $\vec{F}_2$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα  $10 \text{ N}$  (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι  $60^\circ$ . Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη  $\vec{F}$  και να βρείτε το μέτρο της.



(Μονάδες 10)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**26.Θέμα 18547 Αρχέτυπο**

Δίνονται τα σημεία  $A(0, -1)$ ,  $B(\lambda, 1)$  και  $\Gamma(\lambda-2, \lambda-3)$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε :

- i. Τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)
- ii. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  να είναι ορθογώνιο με  $\hat{A} = 90^\circ$ . (Μονάδες 7)

β) Για  $\lambda = -2$ , να βρείτε:

- i. Το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ . (Μονάδες 4)
- ii. Το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 6)

**Έξυπνα & Εύκολα!**