Κεφ. 1.5. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 – Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course Των Μαθηματικών, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

14586, 14953, 15038, 15073, 15186, 15252, 15317, 15379, 15463, 15825, 15852, 15996, 16141, 16144, 16426, 16427, 16428, 17075, 20685, 20888, 22170, 22554

1.Θέμα 14586 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(3,4) και Γ(5,-2).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{A}$ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) Αν Μ είναι το μέσο του ΒΓ, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 8)

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (3-1, 4-2) = (2,2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (5-1, -2-2) = (4,-4)$.

Οπότε $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = 2\cdot 4 + 2\cdot(-4) = 0$. Άρα $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$, οπότε $\hat{A} = 90^{o}$.

β) Το Μ είναι το μέσο του ΒΓ, άρα οι συντεταγμένες του είναι $\left(\frac{3+5}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)$, δηλαδή $M(4,1)$

και $\overrightarrow{AM} = (3,-1)$, άρα $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α και η ΑΜ είναι διάμεσος, άρα (ΒΓ)=2(ΑΜ) και επομένως $|\overrightarrow{B\Gamma}| = 2|\overrightarrow{AM}| = 2\sqrt{10}$.

γ) $\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{M\Gamma} = 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{A\Gamma}) = -2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{A\Gamma}$.

2.Θέμα 14953 Αρχέτυπο

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-2,5), B(7,8), \Gamma(1,-4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$

$\overrightarrow{AB} = (7-(-2),\ 8-5) = (9,3)$

$\overrightarrow{A\Gamma} = (1-(-2),\ -4-5) = (3,-9)$

β) Σύμφωνα με την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου, θα έχουμε:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = 9\cdot 3 + 3\cdot(-9) = 27 - 27 = 0.$

γ) Αν $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}}\right) = B\hat{A}\Gamma$, γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{A\Gamma}|$συνθ, άρα συνθ $= 0$.

Αλλά $0 \leq \theta \leq \pi$, έτσι $\theta = 90^0$.

3.Θέμα 15038 Αρχέτυπο

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}) = 15$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται από το τύπο

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$ συν $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$=3·4·συν$\frac{\pi}{3} = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$.

Άρα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 6$.

β) $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 = 3^2 = 9$ *και* $\vec{\beta}^2 = |\vec{\beta}|^2 = 4^2 = 16$.

γ) $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 3\vec{\alpha}^2 - \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} - 9\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 = 3\vec{\alpha}^2 - 10\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 3\vec{\beta}^2 =$

$$= 3 \cdot 9 - 10 \cdot 6 + 3 \cdot 16 = 15.$$

4.Θέμα 15073

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2 \cdot (1,2) + (2,3) = (2+2, 4+3) = (4,7)$.

β) Έχουμε: $|\vec{\gamma}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$.

γ) Βρίσκουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = (1,2) \cdot (4,7) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 18$.

5.Θέμα 15186 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1,-2)$ και $\Gamma(9,2)$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$.

(Μονάδες 8)

β) $\overrightarrow{MN} = (1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8,4)$.

(Μονάδες 8)

γ) $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Αν $M(x_M, y_M)$ και $N(x_N, y_N)$, είναι

$$x_M = \frac{6+2}{2} = 4, \qquad y_M = \frac{3+1}{2} = 2$$

και

$$x_N = \frac{9+1}{2} = 5, \qquad y_N = \frac{2-2}{2} = 0.$$

β) Είναι $\overrightarrow{MN} = (5-4, 0-2) = (1,-2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \big(9-1, 2-(-2)\big) = (8,4)$.

γ) Έχουμε ότι:

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma} = (1,-2) \cdot (8,4) = 1 \cdot 8 + (-2) \cdot 4 = 8 - 8 = 0.$$

Άρα, $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

6.Θέμα 15252 Αρχέτυπο

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,-1)$.

α) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma}=(1,-2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}=(3,-1)-(2,1)=(1,-2)$.

β) Είναι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=(2,1)\cdot(1,-2)=2-2=0$ οπότε $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$.

Επίσης $\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$ και $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

Αφού $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

γ) Είναι $(AB\Gamma)=\dfrac{(AB)\cdot(B\Gamma)}{2}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|}{2}=\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{2}=\dfrac{5}{2}$.

7.Θέμα 15317

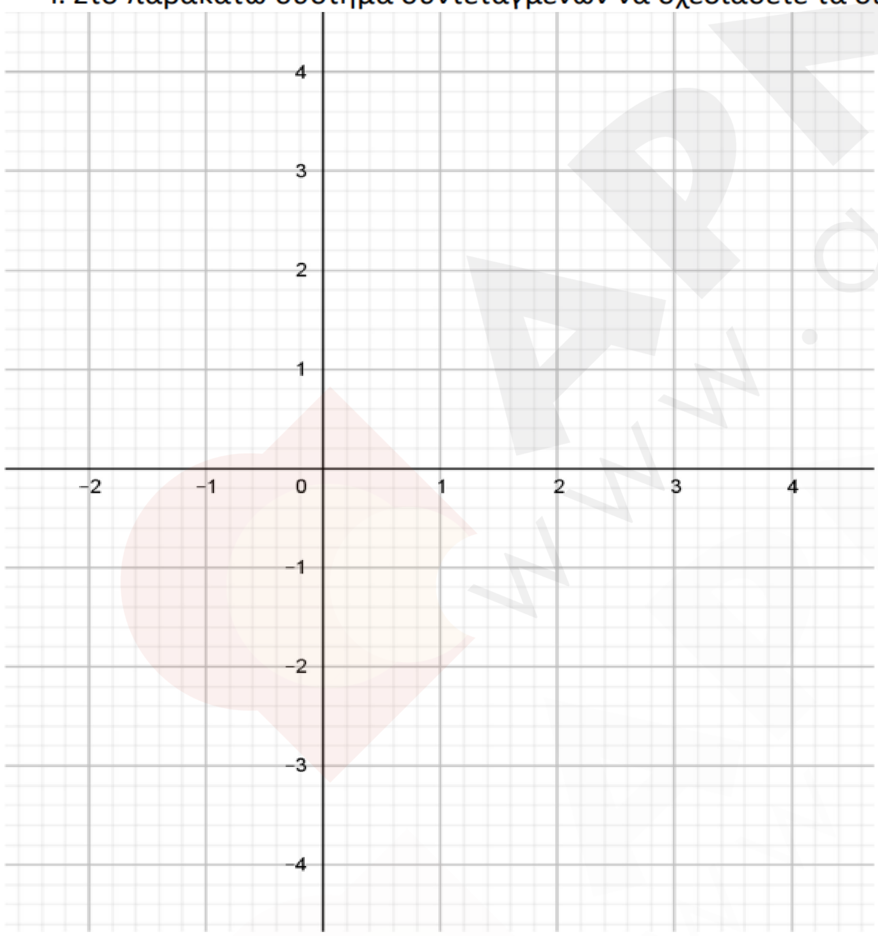
Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v}=(3,0)$ και $\vec{w}=(-3,4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

β)

i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$.



(Μονάδες 10)

ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

(Μονάδες 3)

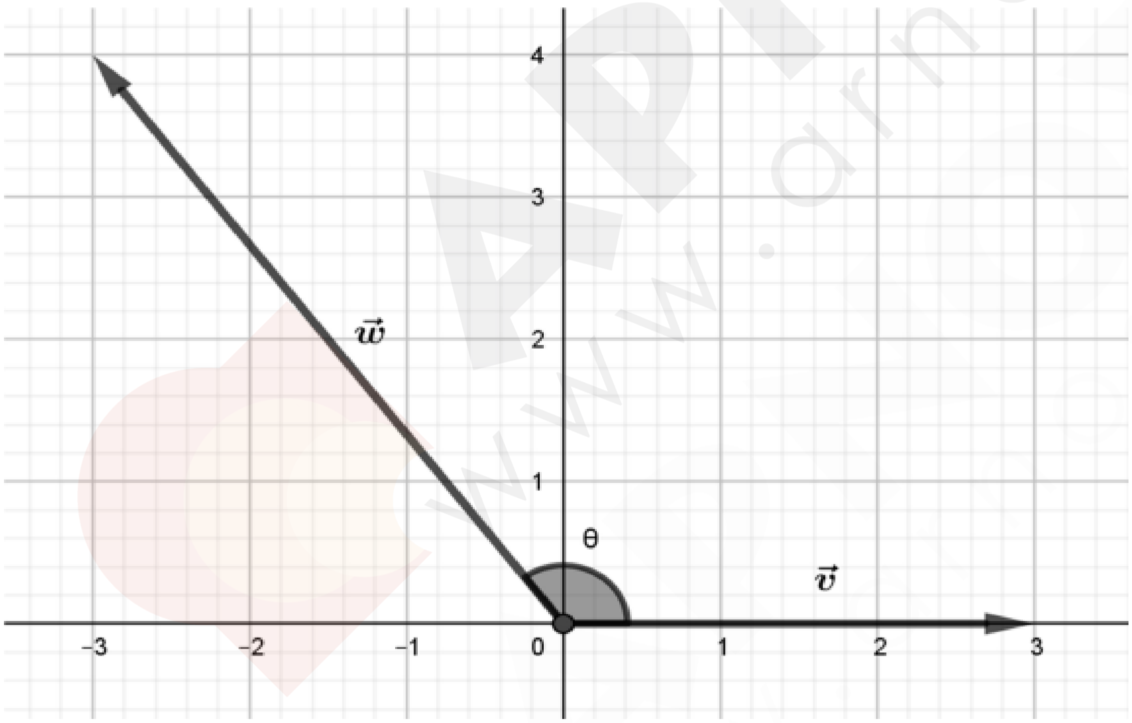
ΛΥΣΗ

α) Τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα, διότι

$$\det(\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=12-0=12\neq 0$$

β)

i. Στο σύστημα συντεταγμένων σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{v}=(3,0)$ και $\vec{w}=(-3,4)$ ως εξής:



ii. Με βάση το σχήμα στο βi) ερώτημα, η γωνία θ που σχηματίζουν τα διανύσματα είναι αμβλεία.

8.Θέμα 15379

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3), \vec{\beta} = (3,-1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται από το τύπο

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 3 - 3 = 0.$$

Επειδή $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ αν και μόνο αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, δηλαδή τα διανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα και η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ορθή.

β) Δίνονται οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε

$\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2(1,3) - (3,-1) = (2,6) - (3,-1) = (-1,7).$

9.Θέμα 15463

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(2,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,-1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma}=(1,-2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{B\Gamma}|$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}=(3,-1)-(2,1)=(1,-2)$.

β) Είναι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=(2,1)\cdot(1,-2)=2-2=0$ οπότε $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$.

γ) Είναι $|\overrightarrow{B\Gamma}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$ και $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ οπότε $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{B\Gamma}|$.

10.Θέμα 15825 **Αρχέτυπο**

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=4$, $(\vec{\alpha} \hat{,} \vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη $\left(\vec{\alpha} \hat{,} \vec{\gamma}\right)$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha} \hat{,} \vec{\beta})=2\cdot4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=8\cdot\frac{1}{2}=4$.

β) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2-4=4-4=0$.

γ) Αφού $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\perp\vec{\gamma} \Leftrightarrow \left(\vec{\alpha} \hat{,} \vec{\gamma}\right)=\frac{\pi}{2}$.

11.Θέμα 15852

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,2)$, $\vec{\beta} = (-2,1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

(Μονάδες 7)

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 6)

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{v}$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Δίνονται οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε

$$\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = 2(3,2) + 3(-2,1) = (0,7).$$

β) Υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

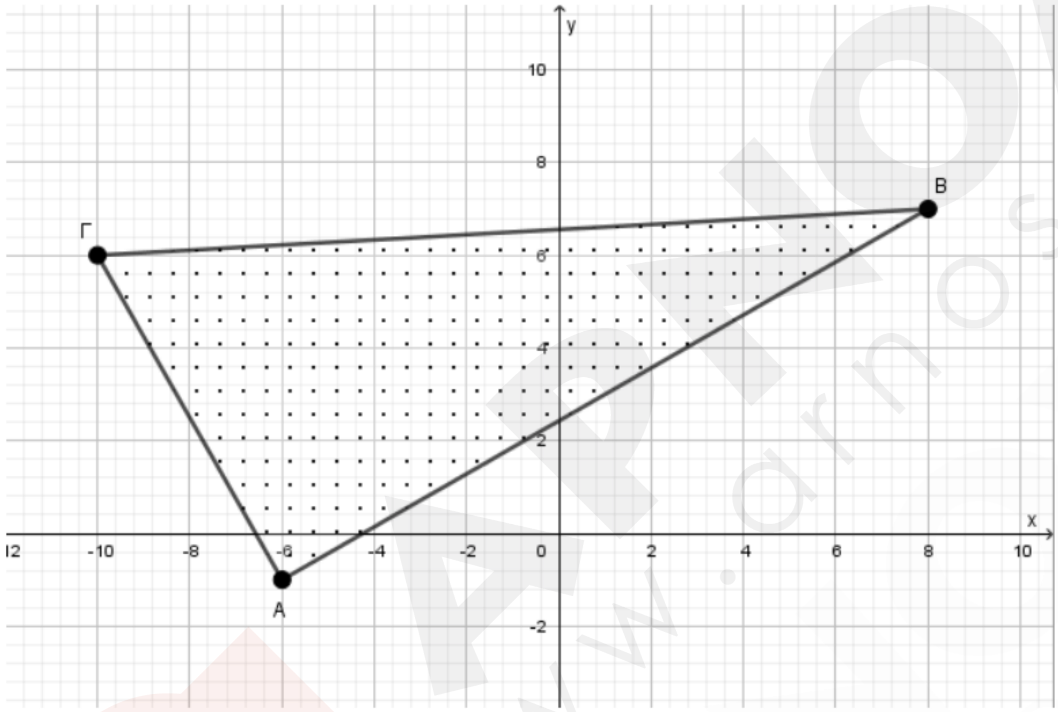
- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -6 + 2 = -4.$
- $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$

γ) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{v}$ υπολογίζεται

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \left(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}\right) = 2|\vec{\alpha}|^2 + 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 \cdot 13 + 3(-4) = 26 - 12 = 14.$$

12.Θέμα 15996 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία $A(-6,-1)$, $B(8,7)$, $\Gamma(-10,6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

(Μονάδες 15)

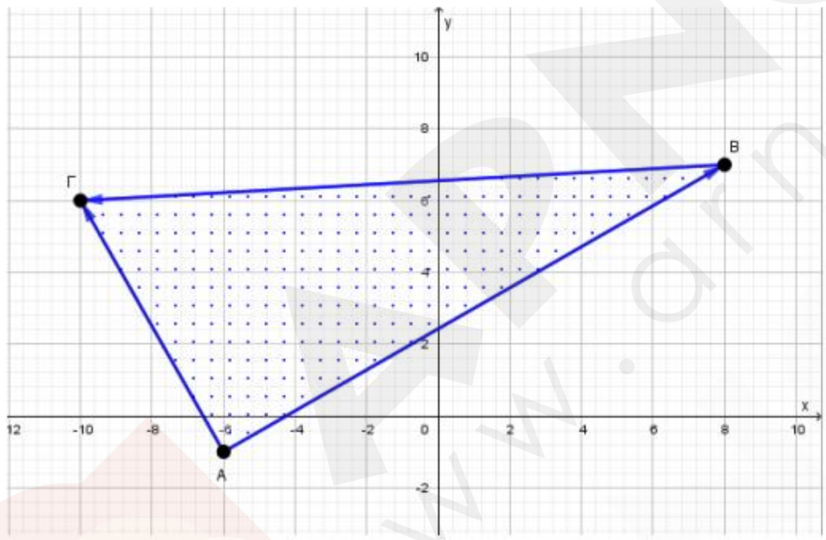
ΛΥΣΗ

α) $\overrightarrow{AB} = (8-(-6),\ 7-(-1)) = (14,8)$,

$\overrightarrow{B\Gamma} = (-10-8, 6-7) = (-18,-1)$,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} = (-10-(-6), 6-(-1)) = (-4,7)$.

β)



Στο σχήμα “φαίνεται” ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο, με ορθή γωνία την $\hat{A}$. Αλλά είναι αναγκαία η μαθηματική απόδειξη του ισχυρισμού. Πραγματικά είναι

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 14 \cdot (-4) + 8 \cdot 7 = -56 + 56 = 0$$

Επομένως, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

Εναλλακτική προσέγγιση: $\lambda_{AB} = \frac{4}{7}$, $\lambda_{A\Gamma} = -\frac{7}{4}$ και $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$.

13.Θέμα 16141 **Αρχέτυπο**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 10 και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ.

α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

i. $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}\right)$

ii. $\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}}\right)$

iii. $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}}\right)$

iv. $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}}}\right)$

v. $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{\Gamma M}}, \overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}}\right)$

(Μονάδες 10)

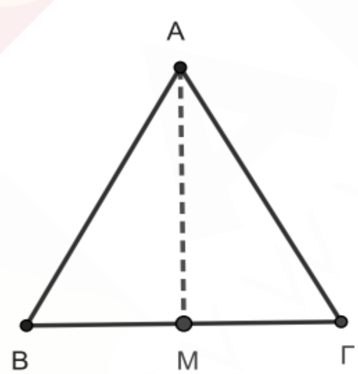
β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

ii. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$

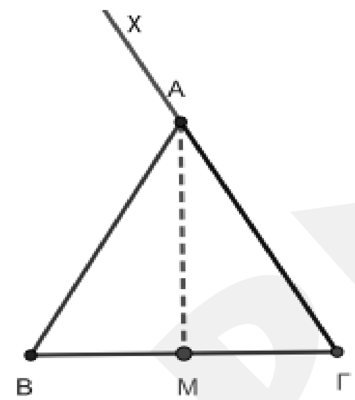
iii. $\overrightarrow{\Gamma M} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}$

(Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α)



i. $(\widehat{\vec{AB},\vec{A\Gamma}}) = 60^o$.

ii. $(\widehat{\vec{AM},\vec{B\Gamma}}) = 90^o$.

iii. $(\widehat{\vec{AM},\vec{\Gamma A}}) = \widehat{xAM} = 180^o - 30^o = 150^o$. Καθώς η διάμεσος προς τη βάση είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

iv. $(\widehat{\vec{BM},\vec{\Gamma M}}) = 180^o$.

v. $(\widehat{\vec{\Gamma M},\vec{\Gamma B}}) = 0^o$.

β) Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$ και $\vec{B\Gamma}$ είναι 10 αφού το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Για το μέτρο του διανύσματος $\vec{AM}$ έχουμε από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΜΓ : $AM^2 = A\Gamma^2 - M\Gamma^2$ ή $AM^2 = 10^2 - 5^2 = 75$ ή ΑΜ = 25 ·3 ή ΑΜ = 5 $\sqrt{3}$.

i. $\vec{AM} \cdot \vec{B\Gamma} = |\vec{AM}|\,|\vec{B\Gamma}|$συν$(\widehat{\vec{AM},\vec{B\Gamma}}) = 5\sqrt{3} \cdot 10 \cdot$συν$\,90^o = 0$

ii. $\vec{AM} \cdot \vec{\Gamma A} = |\vec{AM}|\,|\vec{B\Gamma}|$συν$(\widehat{\vec{AM},\vec{\Gamma A}}) = 5\sqrt{3} \cdot 10 \cdot$συν$\,150^o = 50\sqrt{3} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -75$

iii. $\vec{\Gamma M} \cdot \vec{\Gamma B} = |\vec{\Gamma M}|\,|\vec{\Gamma B}|$συν$(\widehat{\vec{\Gamma M},\vec{\Gamma B}}) = 5 \cdot 10 \cdot$συν$0^o = 5 \cdot 10 \cdot 1 = 50$.

14.Θέμα 16144 Αρχέτυπο

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο, πλευρά 4 και $\widehat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$

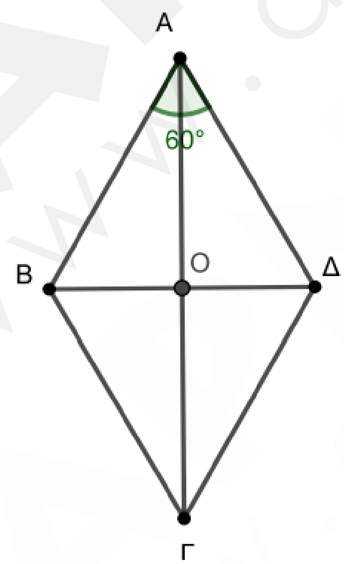
β) $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

γ) $\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{AO}$

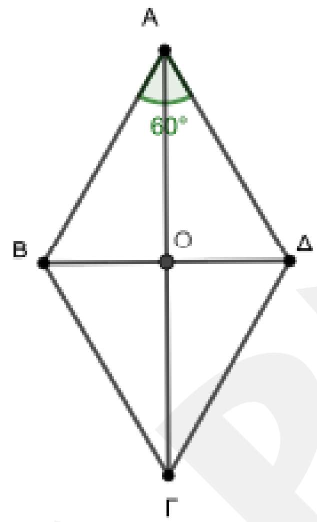
δ) $\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{OB}$

ε) $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(Μονάδες 25)



ΛΥΣΗ



α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Delta} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{A\Delta}| \cdot$ συν $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta}}) = 4 \cdot 4 \cdot$ συν $60^o = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$.

β) Τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι ομόρροπα οπότε σχηματίζουν γωνία 0^o. Οπότε,

$\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = |\overrightarrow{A\Delta}| \cdot |\overrightarrow{B\Gamma}| \cdot$ συν $(\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{B\Gamma}}) = 4 \cdot 4 \cdot$ συν $0^o = 16 \cdot 1 = 16$

γ) Οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούνται, οπότε $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{O\Gamma}$, και τέμνονται κάθετα, οπότε τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Delta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$ σχηματίζουν γωνία 90^o και έχουν εσωτερικό γινόμενο μηδέν. Συνεπώς $\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{O\Gamma} = 0$

δ) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές αφού οι δυο πλευρές του είναι πλευρές του ρόμβου, με γωνία της κορυφής 60^o. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο με πλευρά 4. Το Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, οπότε ΒΟ = ΟΔ = 2.

$\overrightarrow{O\Delta} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{O\Delta}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot$ συν $(\widehat{\overrightarrow{O\Delta}, \overrightarrow{OB}}) = 2 \cdot 2$ συν $180^o = 4\,(-1) = -4$.

ε) Για τη γωνία $(\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}})$ ισχύει : $(\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}}) = (\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{BA}}) = 180^o - 60^o = 120^o$. Οπότε,

$\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta} = |\overrightarrow{A\Delta}| \cdot |\overrightarrow{\Gamma\Delta}| \cdot$ συν $(\widehat{\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}}) = 4 \cdot 4 \cdot$ συν $120^o = 16\,(-\frac{1}{2}) = -8$.

15.Θέμα 16426 Αρχέτυπο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2 , -1)$ και $\vec{\beta} = (-3 , 2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x , y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = 2\cdot(2 , -1) - (-3 , 2) = (4 , -2) + (3 , -2) = (7 , -4)$, οπότε

$\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = (2 , -1)\cdot (7 , -4) = 14 + 4 = 18$.

β) Επίσης: $\vec{\gamma} = (x , y)$ και $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow (x , y)\cdot (2 , -1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow$

$y = 2x$ (1).

Λόγω της (1) το διάνυσμα γ γράφεται: $\vec{\gamma} = (x , 2x)$.

Έτσι το $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5x^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$

$x = -1$ ή $x = 1$.

Για $x = -1$ το $\vec{\gamma} = (-1 , -2)$, ενώ για $x = 1$ το $\vec{\gamma} = (1 , 2)$.

16.Θέμα 16427 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία Α(-2 , 3), Β (0 , 8), Γ (5 , 3) και Δ (10 , 5). Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 12)

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα x'x. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\ ,\ y_B - y_A) = (\ 0 + 2\ ,\ 8 - 3) = (2\ ,\ 5)$.

Επίσης: $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (x_\Delta - x_\Gamma\ ,\ y_\Delta - y_\Gamma) = (\ 10 - 5\ ,\ 5 - 3) = (5\ ,\ 2)$.

Οπότε: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta} = (2\ ,\ 5) \cdot (5\ ,\ 2) = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 10 + 10 = 20$.

β) Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u}$ με τον άξονα x΄x, τότε εφω$= \lambda_{\vec{u}}$

όπου $\lambda_{\vec{u}}$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{u}$.

Είναι: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = (2\ ,\ 5) + (5\ ,\ 2) = (7\ ,\ 7)$, άρα εφω $= \lambda_{\vec{u}} = \dfrac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}} = \dfrac{7}{7} = 1$.

Αφού το διάνυσμα $\vec{u}$ έχει θετικές συντεταγμένες, θα βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Έτσι από τις σχέσεις εφω = 1 και $0 \leq \omega < \pi/2$, προκύπτει ότι $\omega = \dfrac{\pi}{4}$.

17.Θέμα 16428 **Αρχέτυπο**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με: $|\vec{\alpha}| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \dfrac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\dfrac{3}{8}$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

Έχουμε: $|\vec{\alpha}| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (1) , $|\vec{\beta}| = \dfrac{1}{2}$ (2) και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$ (3).

α) Από την (3) $\Leftrightarrow |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow (3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow$

$9\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -8\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}^2 = -\dfrac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2$.

Η τελευταία σχέση, λόγω της (1) δίνει: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4} = -\dfrac{3}{8}$.

β) Επίσης: $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$.

Η τελευταία ισότητα λόγω του ερωτήματος (α) και των (1), (2) δίνει:

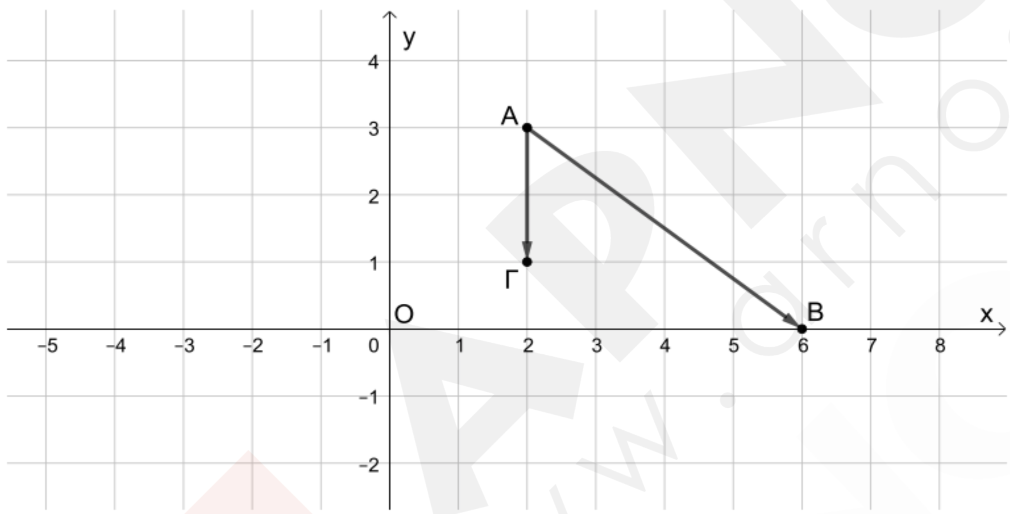
$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \dfrac{-\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}} = -\dfrac{3\cdot 4}{8\cdot\sqrt{3}} = -\dfrac{3}{2\cdot\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, άρα $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \dfrac{5\pi}{6}$ ή 150^0.

18.Θέμα 17075

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4\,,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (0\,,-2)$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 13)



ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι τα σημεία $A\,,B$ και Γ έχουν συντεταγμένες $A(2\,,3)$, $B(6\,,0)$ και $\Gamma(2\,,1)$. Επομένως οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ θα είναι

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,,y_B - y_A) = (6-2\,,\ 0-3\,) = (4\,,\ -3\,) \text{ και}$$

$$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A\,,y_\Gamma - y_A) = (2-2\,,\ 1-3\,) = (0\,,\ -2\,)\,.$$

β) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$, όπου $(x_1\,,\ y_1)$ και $(x_2\,,y_2)$ είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$, από το προηγούμενο ερώτημα, θα έχουμε

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = 4\cdot 0 + (-3)\cdot(-2) = 0 + 6 = 6.$$

19.Θέμα 20685 Αρχέτυπο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{w} = (-10,2)$ και τα σημεία Α$(-1,2)$, Β$(\beta, 0)$, Γ$(0, \gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι $\overrightarrow{AB} = (\beta - (-1), 0 - 2) = (\beta + 1, -2)$.

Αφού τα διανύσματα $\vec{u}, \overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα θα ισχύει $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Άρα $1 \cdot (\beta + 1) + 1 \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow \beta + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$.

β) Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι $\overrightarrow{A\Gamma} = (0 - (-1), \gamma - 2) = (1, \gamma - 2)$.

Αφού τα διανύσματα $\vec{w}, \overrightarrow{A\Gamma}$ είναι παράλληλα, η ορίζουσά τους θα ισούται με μηδέν, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} -10 & 2 \\ 1 & \gamma - 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -10(\gamma - 2) - 2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{9}{5}.$$

γ) Από τα ερωτήματα α), β) έχουμε ότι $\overrightarrow{AB} = (2, -2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \left(1, -\frac{1}{5}\right)$.

Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ είναι

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}.$$

20.Θέμα 20888

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$

και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$ (1) και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - \vec{\gamma} = 0$ (2).

Οπότε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot$συν$(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$, από την οποία λόγω των (1) παίρνουμε:

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 4\cdot 5\cdot \text{συν}\frac{2\pi}{3} = 20\cdot(-\frac{1}{2}) = -10$.

β) Έχουμε: $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} \Longrightarrow \vec{\gamma}^2 = (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})^2 \Longrightarrow$

$|\vec{\gamma}|^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 \Longrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 + 12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 9|\vec{\beta}|^2$,

η οποία λόγω της (1) και του ερωτήματος (α) γράφεται:

$|\vec{\gamma}|^2 = 4\cdot 4^2 + 12\cdot(-10) + 9\cdot 5^2 \Longrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 64 - 120 + 225 \Longrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 169 \Longrightarrow |\vec{\gamma}| = 13$.

21.Θέμα 22170 Αρχέτυπο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1,3)$, $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$ και $\vec{v} = (x^2, x-1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u} = (3,4)$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά;

(Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

α) $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = (-1,3) - 2(-2, -\frac{1}{2}) = (-1,3) + (4,1) = (-1+4, 3+1) = (3,4)$

β) Για να είναι κάθετα τα διανύσματα θα πρέπει το εσωτερικό τους γινόμενο να είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ ή $(3,4)\cdot(x^2, x-1) = 0$ ή $3x^2+4(x-1) = 0$ ή $3x^2+4x-4 = 0$. Η διακρίνουσα είναι 64 και οι ρίζες $x = \frac{2}{3}$ και $x = -2$.

γ) Για να είναι τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{\beta}$ συγγραμμικά πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών τους να είναι μηδέν.

$\begin{vmatrix} x^2 & x-1 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$ ή $-\frac{1}{2}x^2 - (-2)(x-1) = 0$ ή $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = 0$ ή $x^2 - 4x + 4 = 0$ ή $x = 2$.

22.Θέμα 22554

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy, με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x′x, y′y τα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσεως $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\overrightarrow{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$.

Έστω Μ ένα σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}(2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$, (Μονάδες 8)

ii. $\overrightarrow{OM} = \vec{j}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM}$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι

i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 6\vec{i} - \vec{j} - (3\vec{i} + 2\vec{j}) = 6\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{i} - 2\vec{j} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$.

ii) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}(2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{5}(2(3\vec{i} + 2\vec{j}) - (6\vec{i} - \vec{j})) = \frac{1}{5}(6\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{5}(5\vec{j}) = \vec{j}$.

β) Για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ ισχύουν $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ και $\vec{j}^2 = 1$. Επομένως,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = (3\vec{i} - 3\vec{j}) \cdot \vec{j} = (3\vec{i}) \cdot \vec{j} - (3\vec{j}) \cdot \vec{j} = 3(\vec{i} \cdot \vec{j}) - 3 \cdot \vec{j}^2 = 3 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3$.

Θέμα 3 - Κωδικοί:

18243

23.Θέμα 18243 Αρχέτυπο

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=4$,$(\vec{\alpha} \hat{,} \vec{\beta})=\dfrac{\pi}{3}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το $\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\gamma} \hat{,} \vec{\delta})$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}=2\cdot4\cdot\dfrac{1}{2}=4$.

β) Είναι

$$\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}=\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=2\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-\vec{\beta}^2=2|\vec{\alpha}|^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-|\vec{\beta}|^2=2\cdot2^2-4-4^2=-12$$

γ) Είναι $|\vec{\gamma}|^2=\vec{\gamma}^2=\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\,\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=12$ οπότε $|\vec{\gamma}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Επίσης

$|\vec{\delta}|^2=\vec{\delta}^2=\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\,\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=48$ οπότε $|\vec{\delta}|=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

δ) Είναι $\sigma\upsilon\nu(\vec{\gamma} \hat{,} \vec{\delta})=\dfrac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\delta}}{|\vec{\gamma}|\cdot|\vec{\delta}|}=\dfrac{-12}{2\sqrt{3}\cdot4\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$, οπότε $(\vec{\gamma} \hat{,} \vec{\delta})=\dfrac{2\pi}{3}$.

Θέμα 4 – Κωδικοί:

15320, 18520, 18547

24.Θέμα 15320 Αρχέτυπο

Δίνεται παραλληλόγραμμο $\mathrm{OA\Gamma B}$ με $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i. $\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2$.

(Μονάδες 9)

ii. $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\left|\vec{\beta}\right|^2$.

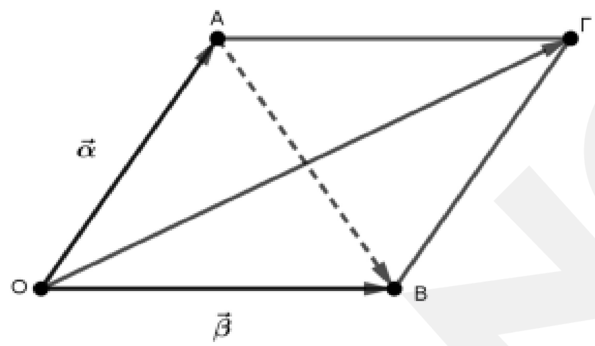
(Μονάδες 9)

β) Αν $\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$, να δείξετε ότι το $\mathrm{OA\Gamma B}$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το παραλληλόγραμμο $\mathrm{OA\Gamma B}$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Οπότε από τον λεγόμενο «κανόνα του παραλληλογράμμου» προκύπτει: $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Επίσης $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$.

i. Έχουμε:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right)^2 = \left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2.$$

ii. Έχουμε:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^2 = \left(\vec{\beta}-\vec{\alpha}\right)^2 = \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}^2 = |\vec{\beta}|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + |\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2.$$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \Leftrightarrow$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \Leftrightarrow$$
$$|\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$$
$$4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \overset{\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow}$$
$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}.$$

Άρα το παραλληλόγραμμο $\mathrm{OA\Gamma B}$ είναι ορθογώνιο γιατί η γωνία $\hat{\mathrm{O}}$ είναι ορθή.

Εναλλακτικά, με δεδομένο ότι $\left|\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$, το παραλληλόγραμμο $\mathrm{OA\Gamma B}$ είναι ορθογώνιο γιατί οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

25. Θέμα 18520 Αρχέτυπο

α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=2|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\beta}|^2 \quad (1)$$

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο $OA\Gamma B$ με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$.

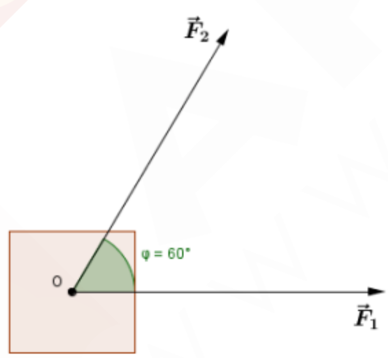
i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

(Μονάδες 05)

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1).

(Μονάδες 04)

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα $10\ N$ (Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι $60°$. Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$ και να βρείτε το μέτρο της.



(Μονάδες 10)

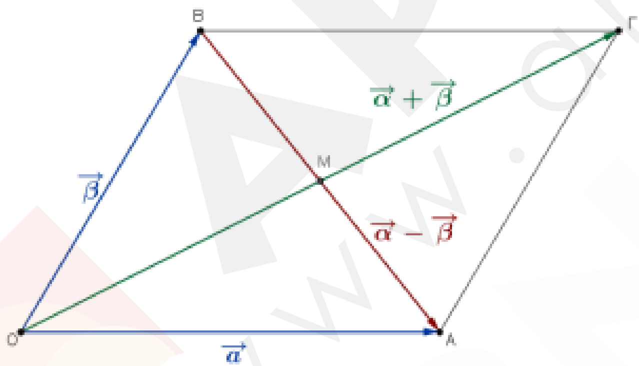
ΛΥΣΗ

α) Ισχύει:

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2+(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2+\vec{\alpha}^2-2\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=$$
$$2\vec{\alpha}^2+2\vec{\beta}^2=2|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\beta}|^2.$$

β)

i. Σε κάθε παραλληλόγραμμο $ΟΑΓΒ$, αν οι δύο πλευρές του συμβολισθούν με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, τότε η μία διαγώνιος εκφράζει το άθροισμα τους, δηλαδή $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και η άλλη διαγώνιος εκφράζει τη διαφορά τους, δηλαδή $\overrightarrow{BA}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.



ii. Επομένως, σε κάθε παραλληλόγραμμο $ΟΑΓΒ$ ισχύει:

$$(O\Gamma)^2+(AB)^2=2(OA)^2+2(OB)^2 \text{ ή}$$

$$(O\Gamma)^2+(AB)^2=2[(OA)^2+(OB)^2]$$

Δηλαδή, το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το διπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων δύο διαδοχικών πλευρών του.

γ) Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων είναι το διανυσματικό τους άθροισμα, δηλαδή

$$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$$

Είναι $|\vec{F_1}|=|\vec{F_2}|=10\ N$. Επομένως $(OA)=(OB)=10$.

26.Θέμα 18547 Αρχέτυπο

Δίνονται τα σημεία Α(0 -1), Β(λ, 1) και Γ(λ-2, λ-3), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

i. Τα σημεία Α, Β και Γ να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^o$. (Μονάδες 7)

β) Για λ = - 2 ,να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 4)

ii. Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α)

i. Για να σχηματίζουν τα σημεία Α, Β και Γ τρίγωνο θα πρέπει να μην βρίσκονται στην ίδια ευθεία ή αλλιώς τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ να μην είναι παράλληλα. Είναι $\overrightarrow{AB} = (\lambda, 1+1) = (\lambda, 2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (\lambda-2, \lambda-3+1) = (\lambda-2, \lambda-2)$. Γνωρίζουμε ότι : $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2) - 2(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow$ $(\lambda-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

Δηλαδή τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι παράλληλα $\Leftrightarrow \lambda = 2$. Οπότε τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο για κάθε τιμή του λ που είναι διαφορετική από το 2.

ii. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^o$, το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ θα ισούται με μηδέν.

Όμως $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2) + 2(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow$ $\lambda + 2 = 0$ ή $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -2$.

Στο ερώτημα αi) δείξαμε ότι για λ = 2 τα σημεία Α , Β και Γ δεν σχηματίζουν τρίγωνο, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^o$ μόνο για την τιμή λ = -2.

β) Για λ = -2, $\overrightarrow{AB}$ = (-2, 2) , $\overrightarrow{A\Gamma}$ = (-4 , -4) και από ερώτημα αii) τα σημεία Α(0, -1), Β(-2, 1) και Γ(-4, -5) σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^o$.

i. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0$.

ii. $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right|$, αλλά

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(-4) - 2(-4) = 16$, οπότε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$.

Ή εναλλακτικά Β' τρόπος : $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\ |\overrightarrow{AB}|\ \ |\overrightarrow{A\Gamma}|$, όμως $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ και $|\overrightarrow{A\Gamma}| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$, οπότε $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\, 2\sqrt{2}\, 4\sqrt{2} = 8$.