# Κεφ. 1.4. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 –

# Μαθηματικά Προσανατολισμού Β’ Λυκείου

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course Των Μαθηματικών, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

**Θέμα 2 - Κωδικοί**

**14666, 15002, 15043, 15854, 16147, 16151, 16579, 16580, 16581, 17070, 19038, 22557**

**1. Θέμα 14666 Αρχέτυπο**

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-3)$ και $\vec{\beta}=(-2,-1)$ και ορίζουμε τα διανύσματα

$$\vec{u}=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v}=5\vec{\alpha}-9\vec{\beta}.$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν τα $\vec{\beta},\vec{w},\vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

α) $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} = 3(1,-3) - 5(-2,-1) = (3,-9) - (-10,-5) = (13,-4)$

και

$\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta} = 5(1,-3) - 9(-2,-1) = (5,-15) - (-18,-9) = (23,-6)$.

β) $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v} = 2(3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}) - (5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}) = 6\vec{\alpha} - 10\vec{\beta} - 5\vec{\alpha} + 9\vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

γ) $\overrightarrow{K\Lambda} = \vec{w} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και

$\overrightarrow{\Lambda M} = \vec{u} - \vec{w} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} - \vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2\vec{\alpha} - 4\vec{\beta} = 2(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 2 \cdot \overrightarrow{K\Lambda}$

Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{K\Lambda}$ και $\overrightarrow{\Lambda M}$ είναι παράλληλα, οπότε τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά.

**2. Θέμα 15002 Αρχέτυπο**

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (3,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (3,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $\Gamma$ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3,6)$.

(Μονάδες 11)

β)

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α) Αν $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ τότε:

$$\overrightarrow{A\Gamma} = (3,1) \Leftrightarrow (x_\Gamma - 0, y_\Gamma - 5) = (3,1) \Leftrightarrow$$

$$x_\Gamma = 3 \text{ και } y_\Gamma - 5 = 1 \Leftrightarrow y_\Gamma = 6.$$

Άρα, $\Gamma(3,6)$.

β)

i. Είναι

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (4-3, 5-6) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} = (1,-1).$$

ii. Έχουμε ότι:

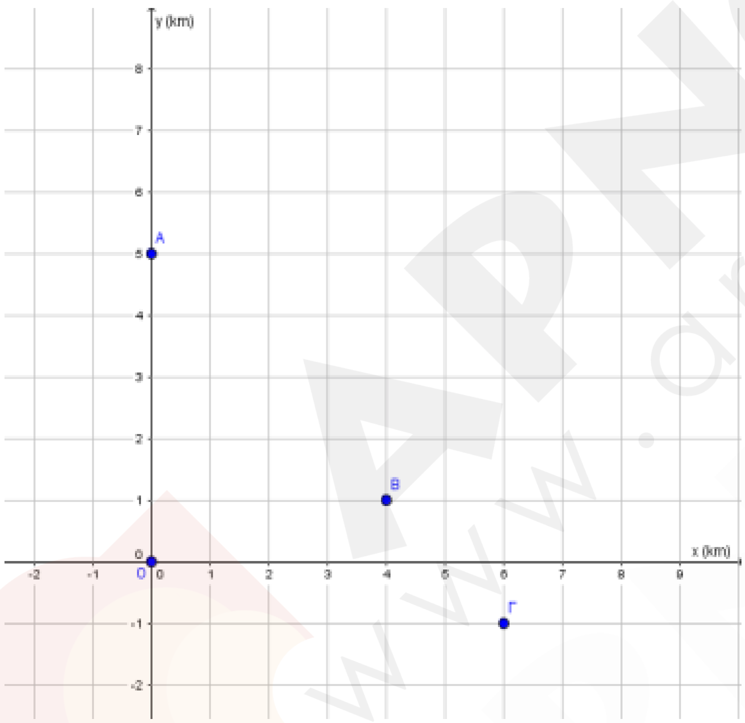
$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - (-3)\cdot 1 = -3 + 3 = 0.$$

*(Εναλλακτικά:* $\overrightarrow{AB} = (3,-3) = 3(1,-1) = 3\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.)

Άρα, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι παράλληλα.

**3. Θέμα 15043 Αρχέτυπο**

Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5), B(4,1)$ και $\Gamma(6,-1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.




α)

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 06)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A, B, \Gamma$ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού $B$ από τον οικισμό $A$ είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού $B$ από τον οικισμό $\Gamma$.

(Μονάδες 12)

**ΛΥΣΗ**

α)

i. Είναι $\overrightarrow{AB} = (4-0, 1-5) = (4,-4)$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = (6-4, -1-1) = (2,-2)$.

ii. Είναι $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8+8 = 0$.

Επομένως $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{B\Gamma}$ και αφού υπάρχει κοινό σημείο το *Β*, τότε τα σημεία *Α, Β, Γ* είναι συνευθειακά.

β) Είναι:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+(-4)^2} = \sqrt{2\cdot 16} = 4\sqrt{2}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{2\cdot 4} = 2\sqrt{2}$.

Επομένως έχουμε ότι $|\overrightarrow{AB}| = 2\,|\overrightarrow{B\Gamma}|$.

<u>2$^{ος}$ τρόπος</u>:

Επειδή $\overrightarrow{AB} = (4,-4) = 2\cdot\ (2,-2) = 2\,\overrightarrow{B\Gamma} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 2\,|\overrightarrow{B\Gamma}|$.

**4. Θέμα 15854 Αρχέτυπο**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,1)$ και $\vec{\beta} = (-8,-4)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι παράλληλα τότε $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.

Άρα, $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-4) - (-8) \cdot 1 = -8 + 8 = 0$, ισχύει.

β) Το διάνυσμα $\vec{\beta}$ γίνεται

$\vec{\beta} = (-8, -4) = -4(2, 1) = -4\vec{\alpha}$.

γ) Παίρνουμε τα μέτρα στη σχέση του ερωτήματος β).

Άρα, $|\vec{\beta}| = |-4||\vec{\alpha}| = 4|\vec{\alpha}|$ .

**5. Θέμα 16147 Αρχέτυπο**

Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$ , $\vec{\beta} = \sqrt{2}\,\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

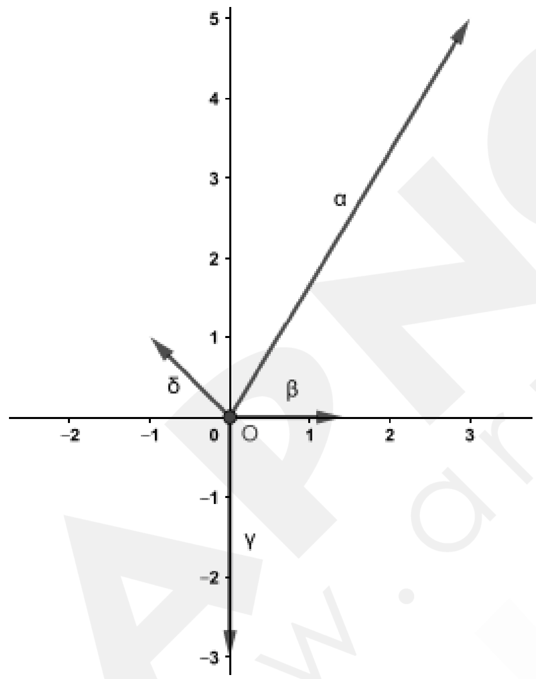
α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.

(Μονάδες 09)

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 06)

**ΛΥΣΗ**




Τα διανύσματα που δίνονται έχουν συντεταγμένες $\vec{\alpha} = (3\,,\,3\sqrt{3}\,)$ , $\vec{\beta} = (\sqrt{2}\,,\,0)$ , $\vec{\gamma} = (0\,,-3\,)$ και $\vec{\delta} = (-1\,,\,1)$.

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος, όταν η τετμημένη του δεν είναι μηδέν, ορίζεται ως το πηλίκο τεταγμένη του διανύσματος προς τετμημένη του διανύσματος. Οπότε

$\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ , $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$ , $\lambda_{\vec{\delta}} = \frac{1}{-1} = -1$ .

β) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει ένα διάνυσμα με το θετικό ημιάξονα Οx ισούται με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος.

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με το θετικό ημιάξονα Οx, επειδή $\lambda_{\vec{\alpha}} = \sqrt{3}$ (από ερώτημα α), θα ισχύει εφω = $\sqrt{3}$. Επιπλέον το πέρας του διανύσματος βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο, αφού έχει θετικές συντεταγμένες, άρα ω = $60^{o}$.

Το διάνυσμα $\vec{\beta} = (\sqrt{2}\ ,\ 0)$, έχει τεταγμένη 0, άρα $\vec{\beta}$//x'x, και επειδή το $\vec{\beta}$ έχει θετική τετμημένη σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Ox γωνία $0^o$.

Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (0\ ,\ -3)$, έχει τετμημένη 0, άρα $\vec{\gamma}$//y'y , και επειδή το $\vec{\gamma}$ έχει αρνητική τεταγμένη σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Ox γωνία $270^o$.

Αν φ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox, επειδή $\lambda_{\vec{\delta}} = -1$ (από ερώτημα α), θα ισχύει εφφ = -1. Επιπλέον το διάνυσμα έχει αρνητική τετμημένη και θετική τεταγμένη, οπότε το πέρας του βρίσκεται στο $2^o$ τεταρτημόριο, άρα φ = $145^o$.

γ) $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$

$|\vec{\gamma}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$.

**6. Θέμα 16151**

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσής των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 16)

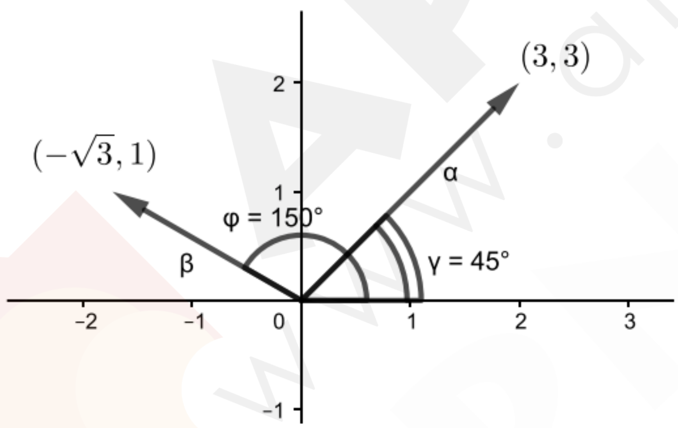
β) Να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$. (Μονάδες 09)

**ΛΥΣΗ**

α) $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{3}{3}$ =1 και $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα x'x και φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x'x, τότε εφω=$\lambda_{\vec{\alpha}}$ = 1 και εφφ = $\lambda_{\vec{\beta}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ βρίσκεται στο 1$^o$ τεταρτημόριο, άρα ω=45$^o$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ βρίσκεται στο 2$^o$ τεταρτημόριο, άρα φ=150$^o$.

β) Η γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ ισούται με τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x'x αν αφαιρέσουμε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον x'x.

Δηλαδή $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 150^o - 45^o = 105^o$.




**7. Θέμα 16579**

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$ και $B(6,7)$ του καρτεσιανού επιπέδου $Oxy$.

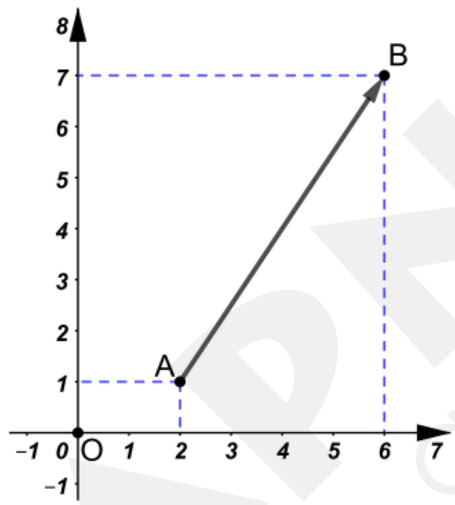
α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 07)

β) Αν $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$. (Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα. (Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

α) Σχεδιάζουμε τους άξονες του καρτεσιανού επιπέδου και τα δύο σημεία $A(2,1)$ και $B(6,7)$. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με αρχή το Α και πέρας το Β.




β) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A) = (6-2, 7-1) = (4,6)$.

γ) Παρατηρούμε ότι $\vec{u} = (-8,-12) = (-2 \cdot 4, -2 \cdot 6) = -2 \cdot (4,6) = -2 \cdot \vec{v}$.

Εφόσον υπάρχει αρνητικός πραγματικός αριθμός $\lambda = -2$, ώστε $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$, τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα.

**8. Θέμα 16580 Αρχέτυπο**

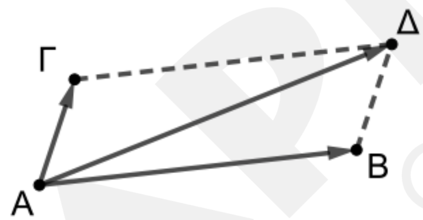
Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(11,5)$, $\Gamma(3,7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$. (Μονάδες 08)

γ) του σημείου Δ. (Μονάδες 05)




**ΛΥΣΗ**

α) Για τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{AB}$ είναι:

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,, y_B - y_A) = (11-2, 5-4) = (9,1)$.

Όμοια:

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A\,, y_\Gamma - y_A) = (3-2, 7-4) = (1,3)$.

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι ίσο με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}$.

Άρα $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = (9+1, 1+3) = (10,4)$.

γ) Έχουμε $\overrightarrow{A\Delta} = (x_\Delta - x_A\,, y_\Delta - y_A)$. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου A και τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$, η τελευταία ισότητα γίνεται:

$$(10,4) = (x_\Delta - 2\,, y_\Delta - 4) \text{ ή } \begin{cases} x_\Delta - 2 = 10 \\ y_\Delta - 4 = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x_\Delta = 12 \\ y_\Delta = 8 \end{cases}$$

Άρα $\Delta(12,8)$.

**9. Θέμα 16581 Αρχέτυπο**

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνονται τα σημεία $A(-1,6)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(3,-2)$.

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A$, $B$ και $\Gamma$ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το $B$ είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 07)

**ΛΥΣΗ**

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,, y_B - y_A) = (1-(-1), 2-6) = (2,-4)$.

Επίσης $\overrightarrow{B\Gamma} = (x_\Gamma - x_B\,, y_\Gamma - y_B) = (3-1, -2-2) = (2,-4)$.

β) Από την απάντηση στο ερώτημα α) παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}$. Επομένως τα διανύσματα είναι συγγραμμικά και εφόσον το $B$ είναι κοινό σημείο συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

γ) Εφόσον $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}$ συμπεραίνουμε ότι το Β είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

**10. Θέμα 17070 Αρχέτυπο**

Στο καρτεσιανό επίπεδο $Oxy$ δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(4,2)$.

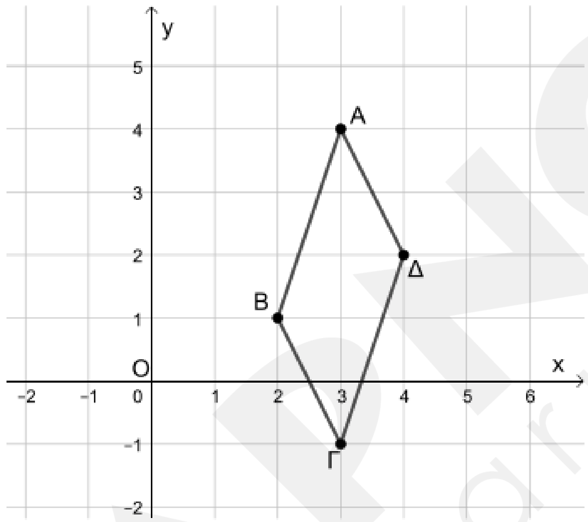
α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία $A, B, \Gamma$ και $\Delta$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ . (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α)




β) Είναι $A(3,4)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(4,2)$, οπότε οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ θα είναι

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,, y_B - y_A) = (2-3,\ 1-4) = (-1,-3)\,,$$

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (x_\Gamma - x_\Delta\,, y_\Gamma - y_\Delta) = (3-4\,,-1-2) = (-1\,,-3).$$

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ . Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ θα έχουν ίσα μέτρα και θα είναι παράλληλα χωρίς να συμπίπτουν. Επομένως οι πλευρές $AB$ και $\Delta\Gamma$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ θα είναι ίσες και παράλληλες, οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

**11. Θέμα 19038**

Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,3)$, $\vec{\beta} = (-1,1)$ και $\vec{\gamma} = (-5,-5)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α) Για τη γωνία ω που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y_{\vec{\beta}}}{x_{\vec{\beta}}} = \frac{1}{-1} = -1$$

Αφού είναι $x_{\vec{\beta}} < 0$ και $y_{\vec{\beta}} > 0$, για τη γωνία ω θα ισχύει:

$$\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$$

Άρα, $\omega = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

β) Είναι:

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{x_{\vec{\gamma}}^2 + y_{\vec{\gamma}}^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{x_{\vec{\beta}}^2 + y_{\vec{\beta}}^2} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Επομένως, $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.

γ) Ζητάμε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ για τους οποίους ισχύει η ισότητα:

$$\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$(-5,-5) = \lambda(2,3) + \mu(-1,1)$$

$$(-5,-5) = (2\lambda-\mu, 3\lambda + \mu)$$

Επομένως, είναι:

$$2\lambda-\mu = -5 \quad (1) \quad \text{και} \quad 3\lambda + \mu = -5 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$5\lambda = -10 \ \text{ή} \ \lambda = -2$$

Αντικαθιστούμε στην (2), οπότε:

$$3(-2) + \mu = -5 \ \text{ή} \ \mu = -5 + 6 = 1$$

Άρα, το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ γράφεται ως εξής:

$$\vec{\gamma} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

**12. Θέμα 22557 Αρχέτυπο**

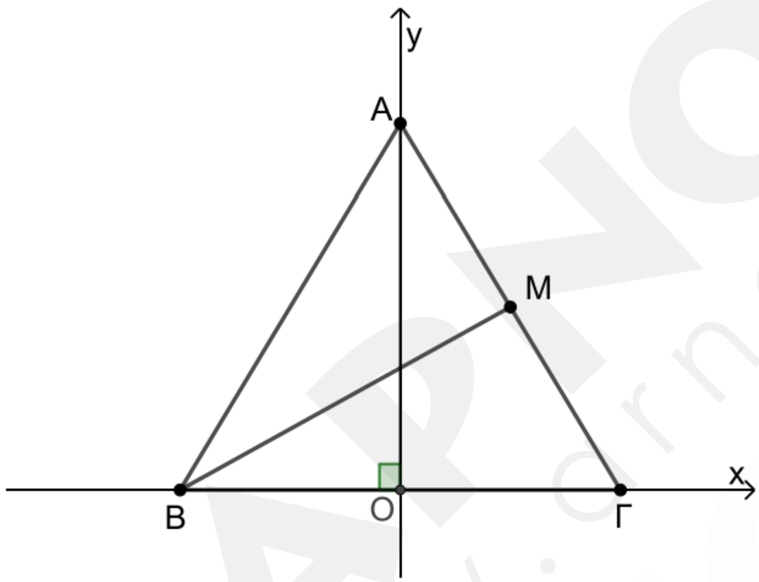
Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει βάση ΒΓ και ύψος ΑΟ. Η κορυφή Α είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές Β και Γ είναι σημεία του άξονα $x'x$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω $(ΒΓ) = 12$ , $(ΑΟ) = 8$ και Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $Α(0,8)$, $Β(-6,0)$ και $Γ(6,0)$. (Μονάδες 9)

ii. $Μ(3,4)$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΒΜ. (Μονάδες 7)




**ΛΥΣΗ**

α) i) Επειδή το Α είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και $(OA) = 8$ θα είναι $y_A = 8$, επομένως $A(0\,,8)$ .

Το $O$ είναι το μέσο του ΒΓ και τα Β και Γ είναι σημεία του αρνητικού και του θετικού ημιάξονα των $x$ , αντίστοιχα.

Επειδή $(\text{Β}\Gamma) = 12$, θα είναι $|x_B| = |x_\Gamma| = \frac{(\text{Β}\Gamma)}{2} = \frac{12}{2} = 6$, επομένως $B(-6\,,0)$ και $\Gamma(6\,,0)$.

ii) Οι συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΓ είναι:

$x_M = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{0+6}{2} = 3$ ,

$y_M = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{8+0}{2} = 4$ ,

άρα $M(3\,,4)$.

β) Το μήκος της διαμέσου ΒΜ είναι

$(BM) = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} = \sqrt{(3+6)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{97}$ .

**Θέμα 4 - Κωδικοί:**

**17076, 17077**

**13. Θέμα 17076 Αρχέτυπο**

Δίνονται τα σημεία $A(-3,-1)$ , $B(0,3)$ και $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου $Oxy$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$ , $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$ , $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \geq 5$. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών $(x,y)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2} + \sqrt{x^2+(y-3)^2} = 4$ .»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

α) Οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$ , $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι αντίστοιχα

$$\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A\,, y_M - y_A) = (x+3\,, y+1)\,,$$

$$\overrightarrow{MB} = (x_B - x_M\,, y_B - y_M) = (-x\,, 3-y)\,,$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,, y_B - y_A) = (3\,,4)\ .$$

β) Τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$ , $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι αντίστοιχα

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x_M - x_A)^2+(y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}\,,$$

$$|\overrightarrow{MB}| = \sqrt{(x_B - x_M)^2+(y_B - y_M)^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}\,,$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2+(y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

γ) Για το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων ισχύει

$|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}| \le |\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|$ ή $|\overrightarrow{AB}| \le |\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|$ ή $5 \le |\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}|$, άρα

$$|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}| \ge 5.$$

δ) Από το γ) ερώτημα για οποιοδήποτε σημείο $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου ισχύει

$|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{MB}| \ge 5$, οπότε αντικαθιστώντας από το β) ερώτημα θα έχουμε

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2} \ge 5\,.$$

Οπότε δεν υπάρχει ζεύγος $(x,y)$ πραγματικών αριθμών ώστε να ισχύει

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2} = 4.$$

Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

**14. Θέμα 17077 Αρχέτυπο**

Στο καρτεσιανό επίπεδο $Oxy$ τα σημεία $A$ και $B$ έχουν διανύσματα θέσεως

$$\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+\lambda\vec{j} \text{ και } \overrightarrow{OB}=(\lambda+1)\vec{i}+(\lambda+3)\vec{j}\text{, με } \lambda\in\mathbb{R}\,.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}=(\lambda-1)\vec{i}+3\vec{j}$ . (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων $A$ και $B$ ως συνάρτηση του $\lambda$. (Μονάδες 7)

γ) Για ποιές τιμές του $\lambda$ η απόσταση των σημείων $A$ και $B$ είναι ίση με 5; (Μονάδες 7)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός $\lambda$ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων $A$ και $B$ να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

**ΛΥΣΗ**

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$

$$= (\lambda+1)\vec{i} + (\lambda+3)\vec{j} - 2\vec{i} - \lambda\vec{j} = (\lambda+1-2)\vec{i} + (\lambda+3-\lambda)\vec{j} = (\lambda-1)\vec{i} + 3\vec{j}.$$

β) Η απόσταση των σημείων $A$ και $B$ είναι ίση με

$$(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\lambda-1)^2+3^2} = \sqrt{(\lambda-1)^2+9},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

γ) Είναι $(AB) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda-1)^2+9} = 5 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2+9 = 25 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 16$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (\lambda-1=4 \text{ ή } \lambda-1=-4) \Leftrightarrow \lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -3.$$

δ) Για κάθε πραγματικό αριθμό $\lambda$ έχουμε

$(\lambda-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2+9 \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda-1)^2+9} \geq \sqrt{9} \Leftrightarrow (AB) \geq 3,$

όπου η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $(\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$

Άρα, για κάθε πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 1$ η απόσταση των σημείων $A$ και $B$ είναι $(AB) > 3.$

Όταν $\lambda = 1$ η απόσταση των σημείων $A$ και $B$ είναι $(AB) = 3$ και αυτή είναι η μικρότερη δυνατή τιμή της.

(Άλλος τρόπος: Η απόσταση των σημείων $A$ και $B$ γράφεται:

$$(AB) = \sqrt{(\lambda-1)^2+9} = \sqrt{\lambda^2-2\lambda+10},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

και παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή, όταν το τριώνυμο $\lambda^2-2\lambda+10$, παρουσιάζει ελάχιστο.

Αυτό συμβαίνει όταν $\lambda = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ . Είναι $\alpha = 1$, $\beta = -2$ και $\gamma = 10$ , οπότε το τριώνυμο

$\lambda^2-2\lambda+10$, παρουσιάζει ελάχιστο για $\lambda = -\dfrac{-2}{2\cdot 1} = 1.$ )

Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.