Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Έστω $\Sigma(\nu)$ το άθροισμα των ψηφίων του θετικού ακέραιου ν. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους ν που ικανοποιούν την ισότητα: $\Sigma(\nu)=2025-\nu$.

Λύση

1ος τρόπος

Επειδή $\Sigma(\nu)=2025-\nu>0\Rightarrow\nu<2025$, το άθροισμα των ψηφίων του ν μπορεί να πάρει τιμές από το 1, για τους αριθμούς 1,10,100, 1000, μέχρι 28, για τον αριθμό 1999. Επομένως, έχουμε

$$1\le\Sigma(\nu)=2025-\nu\le 28\Leftrightarrow -2024\le-\nu\le-1997\Leftrightarrow 1997\le\nu\le 2024,$$

οπότε πρέπει να βρούμε ποιοι από τους ακέραιους από το 1997 μέχρι και το 2024 ικανοποιούν την ισότητα $\Sigma(\nu)=2025-\nu$. Με έλεγχο βρίσκουμε ότι την ισότητα αυτή ικανοποιούν μόνο οι αριθμοί 1998 και 2016.

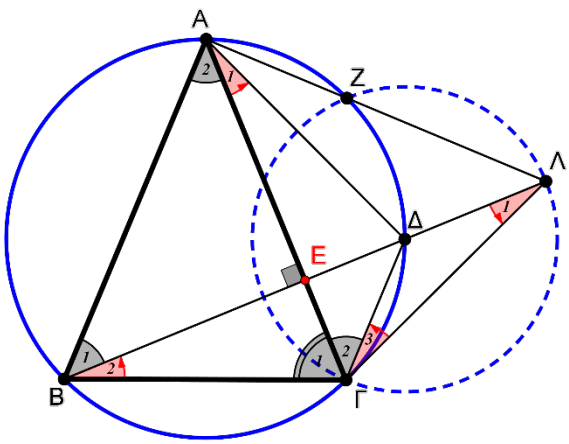
2ος τρόπος

Από το κριτήριο διαιρετότητας με το 9, ξέρουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $9\,|\,\nu-\Sigma(\nu)$. Από τη συνθήκη του προβλήματος έχουμε $9\,|\,2025=\nu+\Sigma(\nu)$. Επομένως $9\,|\,(\nu-\Sigma(\nu))+(\nu-\Sigma(\nu))=2\nu$, οπότε $9\,|\,\nu$. Επομένως από τους αριθμούς $1997\le\nu\le 2024$, μένει να ελέγξουμε μόνο τα πολλαπλάσια του 9, που είναι οι αριθμοί 1998, 2007 και 2016, από τους οποίους μόνο οι 1998, 2016 ικανοποιούν τη συνθήκη.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB=A\Gamma)$ με $\hat{A}=45°$. Θεωρούμε το ύψος BE του τριγώνου $AB\Gamma$, του οποίου η προέκταση τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του, έστω $C_{AB\Gamma}$, στο σημείο Δ. Η προέκταση του ύψους BE τέμνει επίσης στο σημείο Λ την εφαπτόμενη του κύκλου $C_{AB\Gamma}$ στο σημείο του Γ. Η $A\Lambda$ τέμνει τον κύκλο $C_{AB\Gamma}$ στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $A\Gamma\Lambda$ και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $Z\Gamma\Lambda$.

Λύση



Σχήμα 2

Εφόσον $\hat{A} = \hat{A}_2 = 45°$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\hat{B} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma} = 67{,}5° \quad (1)\,.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο AEB, έχουμε:

$$\hat{A}_2 = \hat{B}_1 = 45° \qquad (2)$$

και κατά συνέπεια

$$\hat{B}_2 = 22{,}5° \qquad (3).$$

Οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{B}_2$ είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο $C_{AB\Gamma}$ και βαίνουν στο τόξο $\Gamma\Delta$. Άρα

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_2 \overset{(3)}{=} 22{,}5° \qquad (4).$$

Οι γωνίες $\hat{\Gamma}_2$ και $\hat{B}_1$ είναι (επίσης) εγγεγραμμένες στο κύκλο $C_{AB\Gamma}$ και βαίνουν στο τόξο $A\Delta$.
Άρα

$$\hat{\Gamma}_2 = \hat{B}_1 \overset{(2)}{=} 45° \qquad (5).$$

Η γωνία $\hat{\Gamma}_3$ σχηματίζεται (στο κύκλο $C_{AB\Gamma}$) από τη χορδή $\Gamma\Delta$ και την εφαπτομένη $\Gamma\Lambda$. Άρα

$$\hat{\Gamma}_3 = \hat{A}_1 = \hat{B}_2 \overset{(4)}{=} 22{,}5° \qquad (6).$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ισότητες γωνιών, έχουμε:

$$\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma} \overset{(1)}{=} 67{,}5° = \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 \overset{(5),(6)}{=} 45° + 22{,}5°\,.$$

Δηλαδή (στο τρίγωνο $B\Gamma\Lambda$) η ΓE είναι ύψος και διχοτόμος οπότε το τρίγωνο $B\Gamma\Lambda$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια $\hat{\Gamma}_3 = \hat{\Lambda}_1 \overset{(6)}{=} 22{,}5°$ (7) και $\Gamma B = \Gamma\Lambda$.
Από την ισότητα (7) καθώς και το γεγονός ότι η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος της $B\Lambda$.
Άρα τα τρίγωνα $A\Gamma\Lambda$ και $\Delta\Gamma\Lambda$ είναι ισοσκελή. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $A\Delta \perp \Gamma\Lambda$, το οποίο σε συνδυασμό με τη καθετότητα $\Lambda E \perp A\Gamma$, μας δίνει ότι το σημείο Δ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $A\Delta\Lambda$.
Προηγουμένως αποδείξαμε ότι η $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος της $\Gamma\Lambda$. Άρα η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της $\Gamma\hat{A}\Lambda$. Οπότε $\Delta\Gamma = \Delta Z$ και επειδή $\Delta\Gamma = \Delta\Lambda$, το σημείο Δ είναι περίκεντρο του τριγώνου $Z\Gamma$.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + c$, όπου οι a, b, c είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $b > 2a$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, τότε να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \frac{a+b+c}{b-2a}\,.$$

Λύση

Έχουμε ότι $a + b + c = f(1)$ και

$$f(1) - f(-3) = (a+b+c) - (9a - 3b + c) = 4b - 8a = 4(b - 2a)$$

Οπότε $A = \dfrac{a+b+c}{b-2a} = \dfrac{f(1)}{\dfrac{f(1)-f(-3)}{4}} = \dfrac{4f(1)}{f(1)-f(-3)}$. Όμως από την εκφώνηση έχουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, οπότε

$$f(1)-f(-3)\le f(1)\Rightarrow 4\le \frac{4f(1)}{f(1)-f(-3)}\Rightarrow A\ge 4\,.$$

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνο αν, $f(-3)=0$, και το τριώνυμο $(x+3)^2=x^2+6x+9$ είναι ένα τέτοιο παράδειγμα για το οποίο επιπλέον ισχύει $b>2a$.

2ος τρόπος: Αφού $f(x)\ge 0$, η διακρίνουσα του τριωνύμου θα είναι μη θετική και $a>0$, οπότε έπεται ότι $b^2\leqslant 4ac$, δηλαδή $c\ge \frac{b^2}{4a}$. Επομένως, έχουμε:

$$A=\frac{a+b+c}{b-2a}\ge \frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-2a}=\frac{\lambda^2+4\lambda+4}{4(\lambda-2)}\,,$$

όπου $\lambda=\frac{b}{a}>2$. Όμως

$$\frac{\lambda^2+4\lambda+4}{4(\lambda-2)}=\frac{(\lambda-2)^2+8(\lambda-2)+16}{4(\lambda-2)}=\frac{\lambda-2}{4}+\frac{4}{\lambda-2}+2\ge 2+2=4\,,$$

με ισότητα για λ = 6.