

Κεφ. 6.2. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Α' Λυκείου**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ****Θέμα 2 - Κωδικοί:**

**1259, 1299, 1301, 1305, 1345, 1358, 12680, 12686, 12729, 12910,
12913, 13322, 14072, 14306, 14596, 14603, 14628**

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. Θέμα 1259

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το σημείο

$M(\alpha, \frac{1}{8})$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 12)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 \neq 0 \text{ και } x + 1 \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \neq 1 \text{ και } x \neq -1)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

β) Το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν:

$$f(\alpha) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2 - 1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 3)(\alpha + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 3 = 0 \text{ ή } \alpha + 3 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha = 3 \text{ ή } \alpha = -3)$$

2. Θέμα 1299 Αρχέτυπο

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = x^3 - x^2 + 3x - 3.$$

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3}{x}$ και

$g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1, 3)$.

(Μονάδες 12)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned} A &= x^3 - x^2 + 3x - 3 = \\ &= x^2(x - 1) + 3(x - 1) = \\ &= (x - 1)(x^2 + 3) \end{aligned}$$

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}^*$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \frac{3}{x} = x^2 - x + 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 = x(x^2 - x + 3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 = x^3 - x^2 + 3x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 1 = 0 \text{ ή } x^2 + 3 = 0, \text{ αδύνατη}) \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 3$. Άρα το σημείο τομής των C_f , C_g είναι το $A(1, 3)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

3. Θέμα 1301 Αρχέτυπο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε. (Μονάδες 13)

β) Αν A, O, B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0,0)$, να αποδείξετε ότι A, B είναι συμμετρικά ως προς το O . (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^3 - x &= 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x=0 \text{ ή } x-1=0 \text{ ή } x+1=0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1) \end{aligned}$$

- Για $x=0$: $f(0) = 0^3 = 0$
- Για $x=1$: $f(1) = 1^3 = 1$
- Για $x=-1$: $f(-1) = (-1)^3 = -1$

Τελικά τα σημεία τομής των C_f, C_g είναι τα:

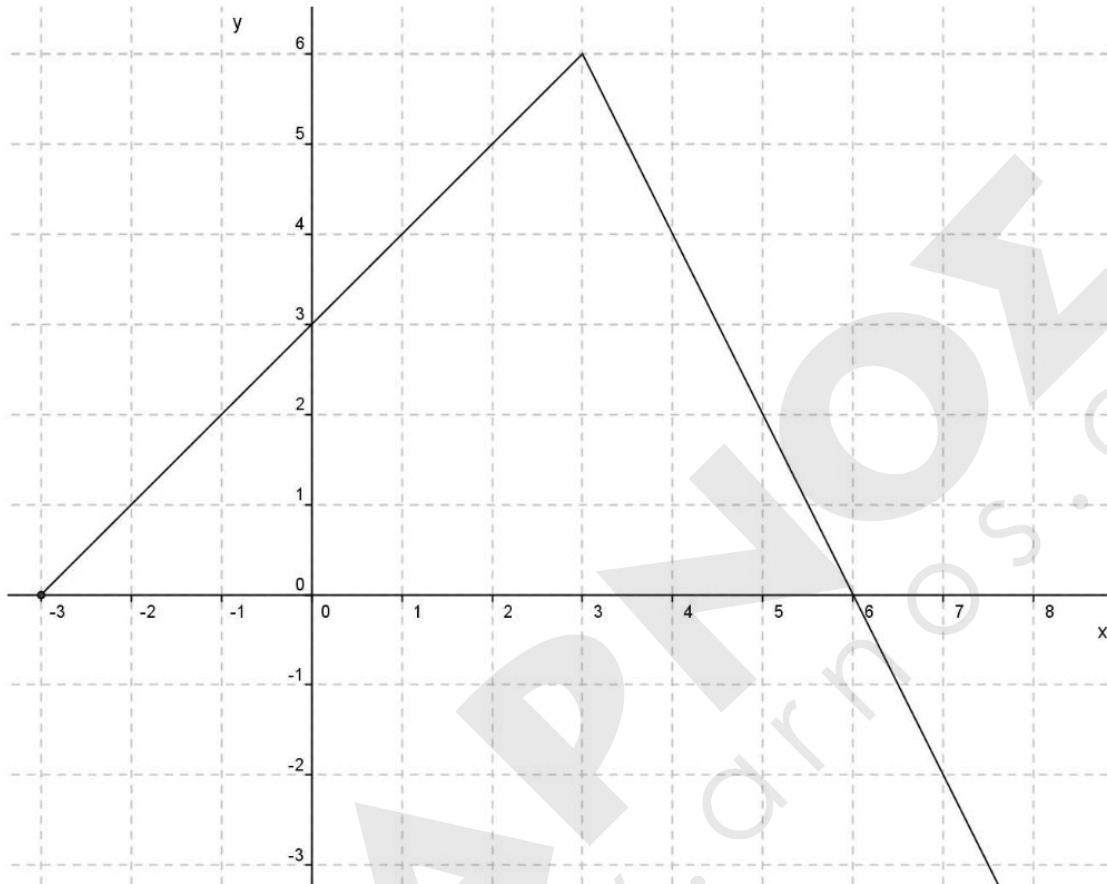
$$O(0, 0), A(1, 1) \text{ και } B(-1, -1)$$

β) Ισχύει ότι:

$$x_A = -x_B \text{ και } y_A = -y_B$$

Άρα τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς το O .

Έξυπνα & Εύκολα!

4. Θέμα 1305 **Αρχέτυπο**


Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Μονάδες 7)

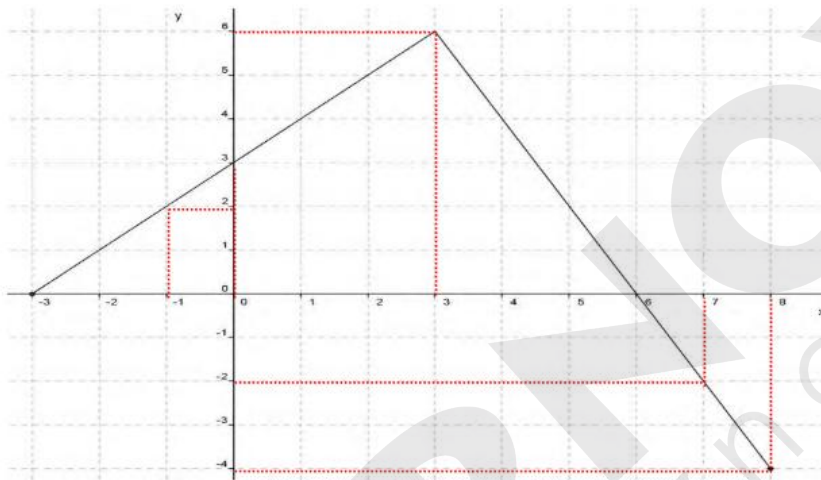
Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Προβάλλουμε τη γραφική παράσταση της f στον άξονα $x'x$ και βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το:

$$A = [-3, 8]$$

β) Από τη γραφική παράσταση της f συμπληρώνουμε τον πίνακα που ακολουθεί:



x	-3	-1	0	3	7	8
y	0	2	3	6	-2	-4

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία:

$$A(-3, 0) \text{ και } B(6, 0)$$

και τον άξονα $y'y$ στο σημείο:

$$\Gamma(0, 3)$$

δ) Το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές, δηλαδή αυτό για το οποίο βρίσκεται «πάνω» από τον άξονα $x'x$ είναι το $(-3, 6)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

5. Θέμα 1345

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$ με:

$$x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{3\}$.

Θα παραγοντοποιήσουμε το $x^2 - 5x + 6$.

Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Τότε:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = x - 2, \quad x \neq 3$$

γ) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(2, 0)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = 0 - 2 = -2$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -2)$.

6. Θέμα 1358

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1) + f(0) + f(1)$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

- $f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 15 = 1 - 2 - 15 = -16$
- $f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 15 = 0 + 0 - 15 = -15$
- $f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 15 = 1 + 2 - 15 = -12$

Τότε:

$$f(-1) + f(0) + f(1) = -16 - 15 - 12 = -43$$

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 + 2x - 15$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -15$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{-2+8}{2} = 3 \\ \frac{-2-8}{2} = -5 \end{cases}$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(3, 0)$ και $B(-5, 0)$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 15 = 0 + 0 - 15 = -15$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, -15)$.

7. Θέμα 12680

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει και αρκεί να ισχύει: $x \geq 0$ και $\sqrt{x} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A = [0,1) \cup (1, +\infty)$.

β) Έχουμε: $f(4) = \frac{3}{\sqrt{4}-1} = 3$, άρα το σημείο Μ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ) Το $x = -1$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . Άρα το σημείο Ν δεν μπορεί να ανήκει στη γραφική της παράσταση.

8. Θέμα 12686 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται αν και μόνον αν $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

β) Το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f μόνο όταν $f(2) = 4$.

Είναι: $f(2) = \frac{2 \cdot 2}{2-1} = 4$, άρα το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ) Για να βρούμε τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει και τους δύο άξονες στο κοινό τους σημείο $O(0,0)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

9. Θέμα 12729 Αρχέτυπο

Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α. Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;

(Μονάδες 6)

β. Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

(Μονάδες 6)

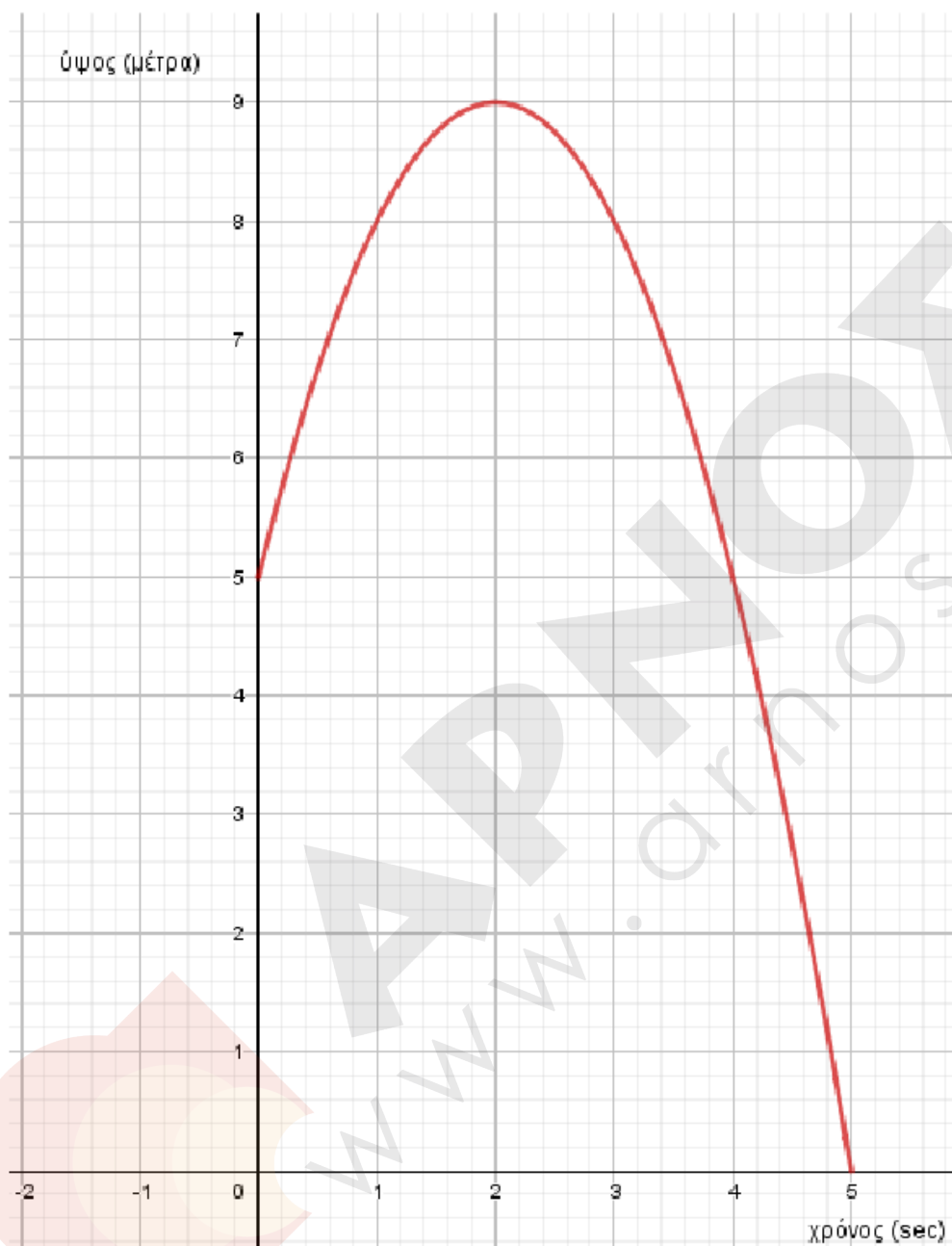
γ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.

(Μονάδες 7)

δ. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος.

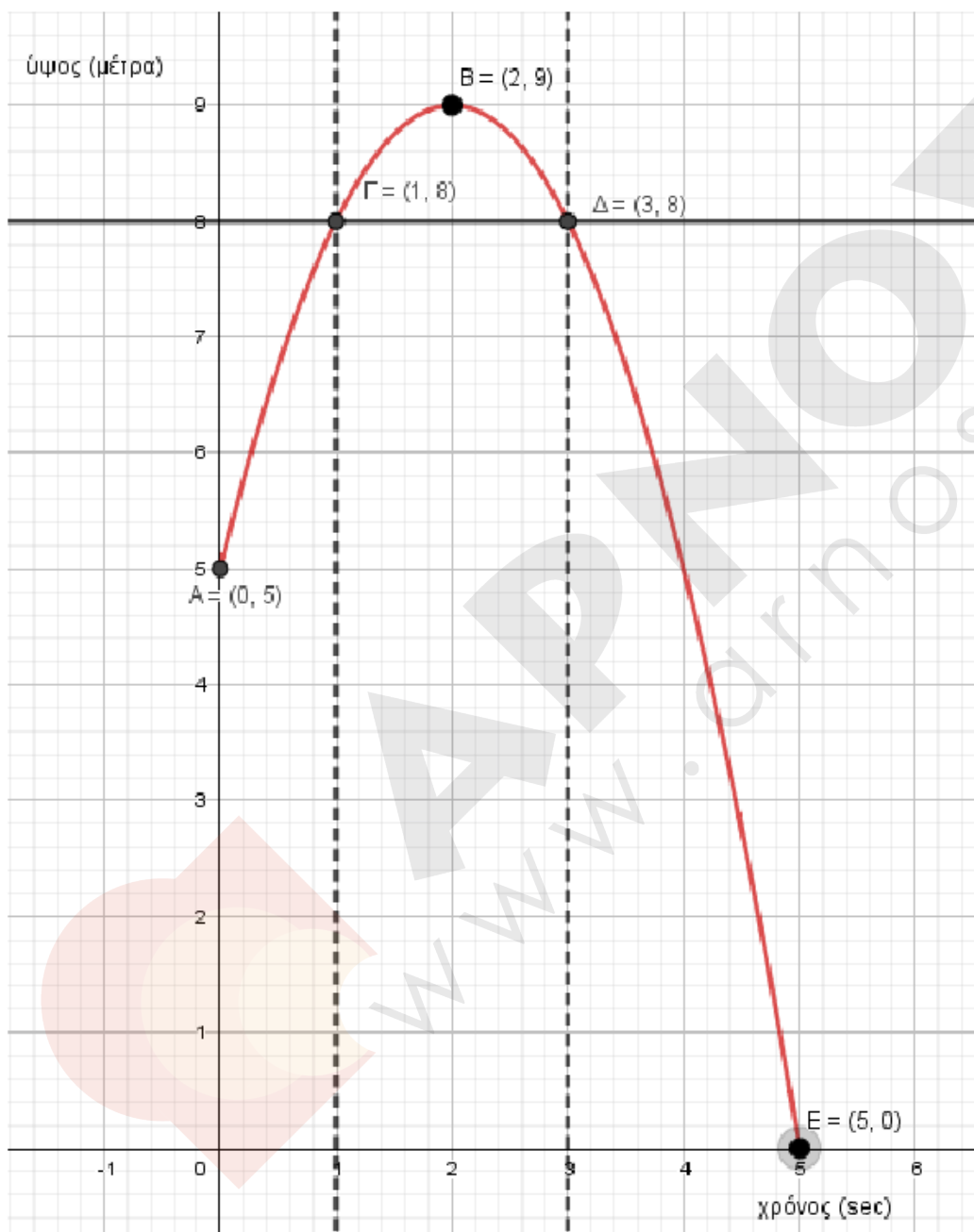
(Μονάδες 6)

Έξυπνα & Εύκολα!



Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

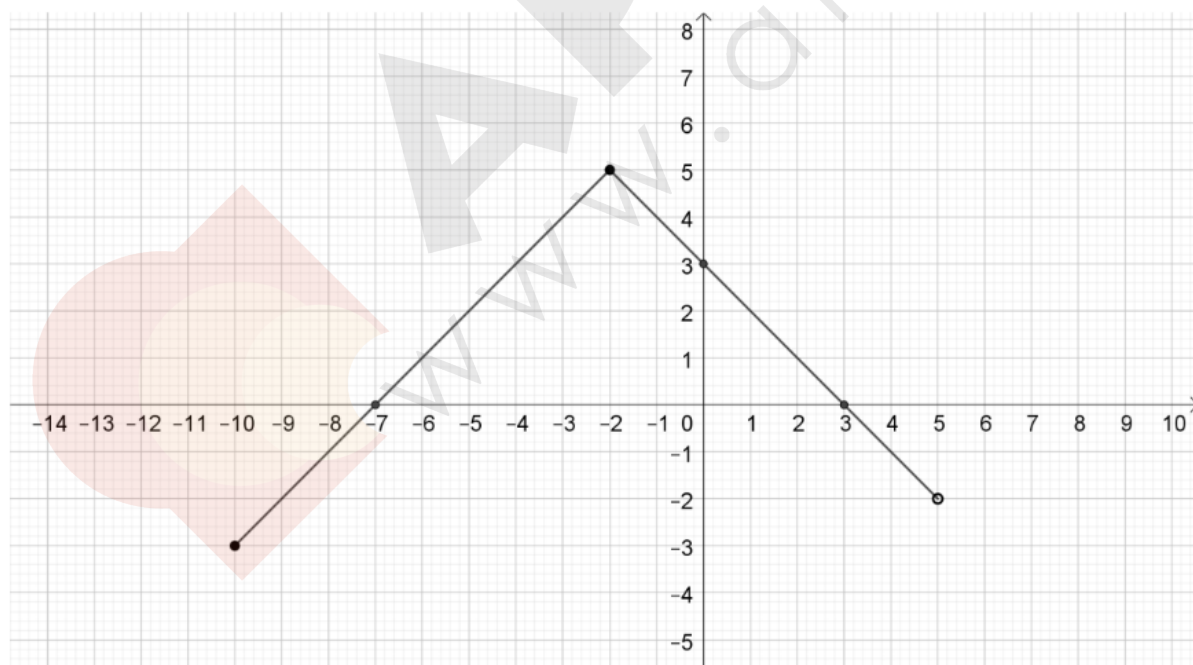


Έξυπνα & Εύκολα!

- α. Ως αρχή της μέτρησης έχουμε το σημείο A (0,5). Οπότε για τη χρονική στιγμή $t_1=0$ sec το σώμα βρίσκεται σε ύψος 5 μέτρα.
- β. Το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το σώμα αντιστοιχεί στο σημείο B (2,9). Οπότε για τη χρονική στιγμή $t_2=2$ sec το σώμα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος 9 μέτρα.
- γ. Αν φέρουμε την ευθεία $y=8$ που αντιστοιχεί σε ύψος 8 μέτρων θα δούμε ότι τέμνει το διάγραμμα σε δύο σημεία. Αυτά είναι το Γ(1,8) και Δ(3,8). Οπότε το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα τις χρονικές στιγμές $t_3=1$ sec και $t_4=3$ sec.
- δ. Το έδαφος αντιστοιχεί στον άξονα $x'x$ (ύψος=0 μέτρα). Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, το Ε που αντιστοιχεί και στο τέλος της μέτρησης. Οπότε το σώμα συναντά στο έδαφος τη χρονική στιγμή $t_5=5$ sec.

10. Θέμα 12910

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Έξυπνα & Εύκολα!

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της $f(A)$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$.

(Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 0$.

(Μονάδες 4)

δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) $A = [-10, 5)$ και $f(A) = [-3, 5]$.

β) $f(-2) = 5$, $f(0) = 3$, $f(3) = 0$.

γ) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -7$ ή $x = 3$ (οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον x').

δ) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-10, -7) \cup (3, 5)$ (οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον x').

Έξυπνα & Εύκολα!

11. Θέμα 12913

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της παραπάνω συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 4)

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Τα τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$, οπότε έχει δύο ρίζες

$$\text{άνισες τις } x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

και παραγοντοποιείται ως εξής: $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$.

β)

i. Πρέπει $x - 1 \neq 0$ δηλαδή $x \neq 1$ οπότε το πεδίο ορισμού είναι το $A = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii. Από το α) ερώτημα δείξαμε ότι $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$ οπότε

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x - 1)} = x + 3 \text{ για κάθε } x \in A = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Έξυπνα & Εύκολα!

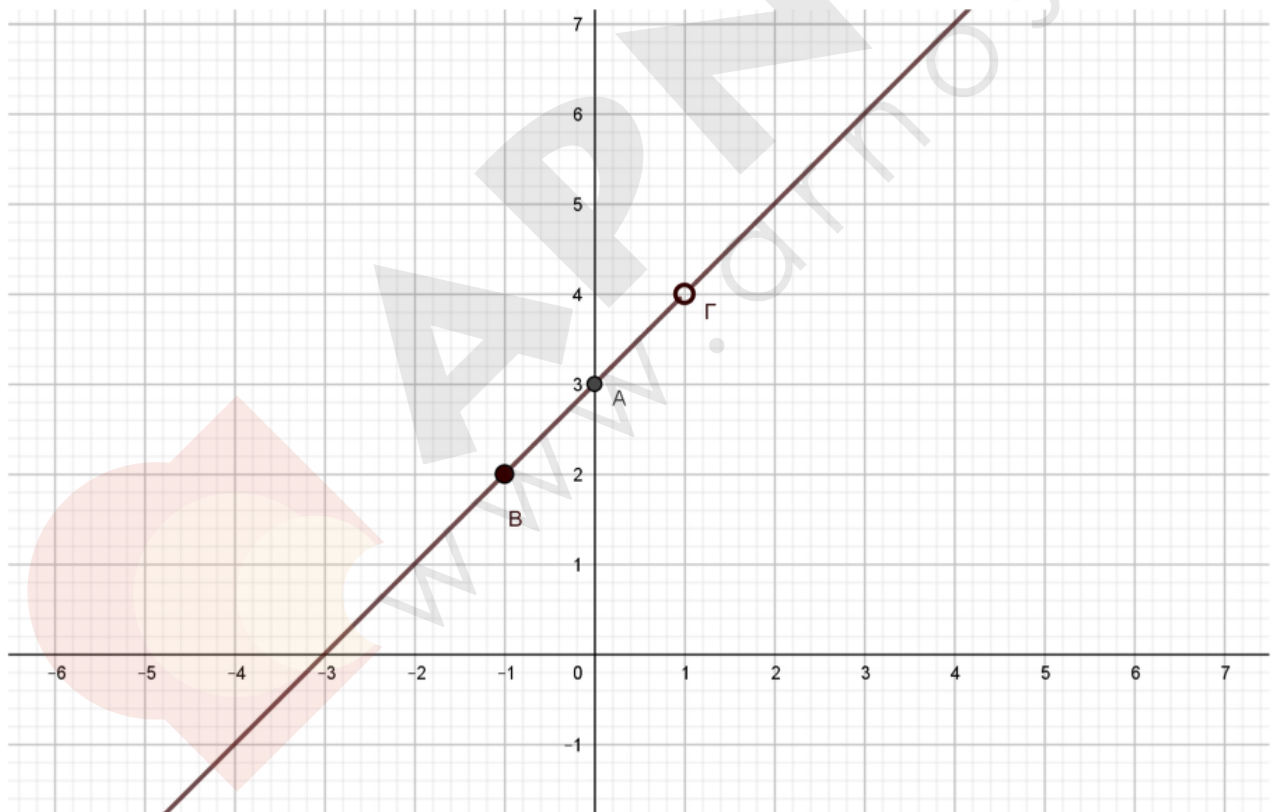
iii. Η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία με εξίσωση $y = x + 3$ από την οποία θα εξαιρέσουμε το σημείο που έχει τετμημένη 1, αφού το 1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

Για $x = 0$ έχουμε $y = 0 + 3$ οπότε ένα σημείο της ευθείας $y = x + 3$ είναι το $A(0, 3)$.

Για $x = -1$ έχουμε $y = -1 + 3 = 2$ οπότε ένα σημείο της ευθείας $y = x + 3$ είναι το $B(-1, 2)$.

Για $x = 1$ έχουμε $y = 1 + 3 = 4$ οπότε το σημείο της ευθείας $y = x + 3$ που θα εξαιρέσουμε είναι το $\Gamma(1, 4)$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έξυπνα & Εύκολα!

12. Θέμα 13322

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2 + 2} + \sqrt{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x = 1$, $x = -2$, $x = 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα;

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται όταν $x-1 \geq 0$, δηλαδή όταν $x \geq 1$, γιατί $x^2 + 2 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A_g = [1, +\infty)$.

β) Για $x = 1$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $g(1) = \frac{1}{1+2} + \sqrt{1-1} = \frac{1}{3}$.

Δεν ορίζεται η τιμή της συνάρτησης για $x = -2$, διότι $-2 \notin A_g$.

Για $x = 2$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $g(2) = \frac{2}{2^2+2} + \sqrt{2-1} = \frac{2}{6} + \sqrt{1} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g δεν τέμνει τον $y'y$ άξονα, διότι το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Έξυπνα & Εύκολα!

13. Θέμα 14072

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Ανήκει το σημείο $M(1,3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$\begin{aligned} x - 2 &\neq 0 \Leftrightarrow \\ x &\neq 2. \end{aligned}$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

β) Το σημείο $M(1,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , γιατί

$$f(1) = \frac{1-4}{1-2} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $y'y$ άξονα στο σημείο $(0,2)$ και τον $x'x$ άξονα στο σημείο $(-2,0)$, αφού

$$\text{για } x = 0, \text{ έχουμε: } f(0) = \frac{0-4}{0-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \text{ και}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

για $y = f(x) = 0$, έχουμε: $0 = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, οπότε

$$x^2 - 4 = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$(x + 2)(x - 2) = 0, \text{ οπότε}$$

$$x + 2 = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 \text{ και τελικά}$$

$$x = -2 \text{ (δεκτή) ή } x = 2 \text{ (απορρίπτεται).}$$

14. Θέμα 14306

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{5} + 3$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το $f(-24)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $(1,3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση;

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται όταν $1 - x \geq 0$, δηλαδή όταν $x \leq 1$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A_f = (-\infty, 1]$.

β) Για $x = -24 < 1$ η τιμή της συνάρτησης είναι:

$$f(-24) = \frac{\sqrt{1-(-24)}}{5} + 3 = \frac{\sqrt{25}}{5} + 3 = 1 + 3 = 4.$$

γ) Για $x = 1$ η τιμή της συνάρτησης είναι: $f(1) = \frac{\sqrt{1-1}}{5} + 3 = 0 + 3 = 3$.

Άρα το σημείο $(1,3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Έξυπνα & Εύκολα!

15. Θέμα 14596

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+1}$ με $x \neq -1$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x - 3$ για κάθε $x \neq -1$.

(Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Για να απλοποιήσουμε τον τύπο της συνάρτησης παραγοντοποιούμε το τριώνυμο $x^2 - 2x - 3$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x - 3$ είναι: $\Delta = 4 - 4 \cdot (-3) = 16$
και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3 \text{ και } x_2 = -1.$$

Άρα: $x^2 - 2x - 3 = (x + 1) \cdot (x - 3)$.

Επομένως έχουμε: $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+1} = \frac{(x+1) \cdot (x-3)}{x+1} = x - 3$.

β) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f από το σημείο $A(1, -4)$ θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση της συνάρτησης. Δηλαδή θα πρέπει $f(1) = -4$.

Είναι $f(1) = -2 \neq -4$. Άρα το σημείο $A(1, -4)$ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Έξυπνα & Εύκολα!

16. Θέμα 14603 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 6)

β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $y'y$ άξονα.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$f(-1) = 2(-1) - 5 = -7,$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \text{ και}$$

$$f(5) = 5^2 = 25.$$

β) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων, πρέπει $f(0) = 0$. Όμως $f(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5 \neq 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Για τον $y'y$ άξονα είναι $x = 0$ και $f(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$, οπότε το σημείο τομής με τον $y'y$ άξονα είναι το $(0, -5)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

17. Θέμα 14628

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$.

(Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4, -3)$ είναι σημείο της C_f .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 3$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(4) = 3$.

Με $x = 4$ έχουμε: $f(4) = \frac{4^2 - 4}{4} = \frac{16 - 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$, οπότε η C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$

β) Ισχύει:

$$f(-4) = \frac{(-4)^2 - 4}{-4} = \frac{16 - 4}{-4} = -\frac{12}{4} = -3$$

οπότε και το σημείο $B(-4, -3)$ είναι πάνω στην C_f .

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 3$.

Με $x \neq 0$ έχουμε:

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 4 . Επιπλέον, $f(-1) = 3$ και $f(4) = 3$,

οπότε τα αντίστοιχα σημεία της C_f έχουν τεταγμένη $y = 3$.

Επομένως, τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία είναι το $A(4, 3)$ και το $\Gamma(-1, 3)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

Θέμα 3 – Κωδικοί: 14604, 14673, 14752, 14754

18. Θέμα 14604 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 6)

γ) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη $y = 21$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι σε μορφή διαστήματος το εξής:

$$A = [-\infty, 10).$$

β) Έχουμε:

$$f(-1) = 2(-1) - 5 = -7,$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \text{ και}$$

$$f(5) = 5^2 = 25.$$

γ) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων, πρέπει $f(0) = 0$.

Όμως $f(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5 \neq 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Έξυπνα & Εύκολα!

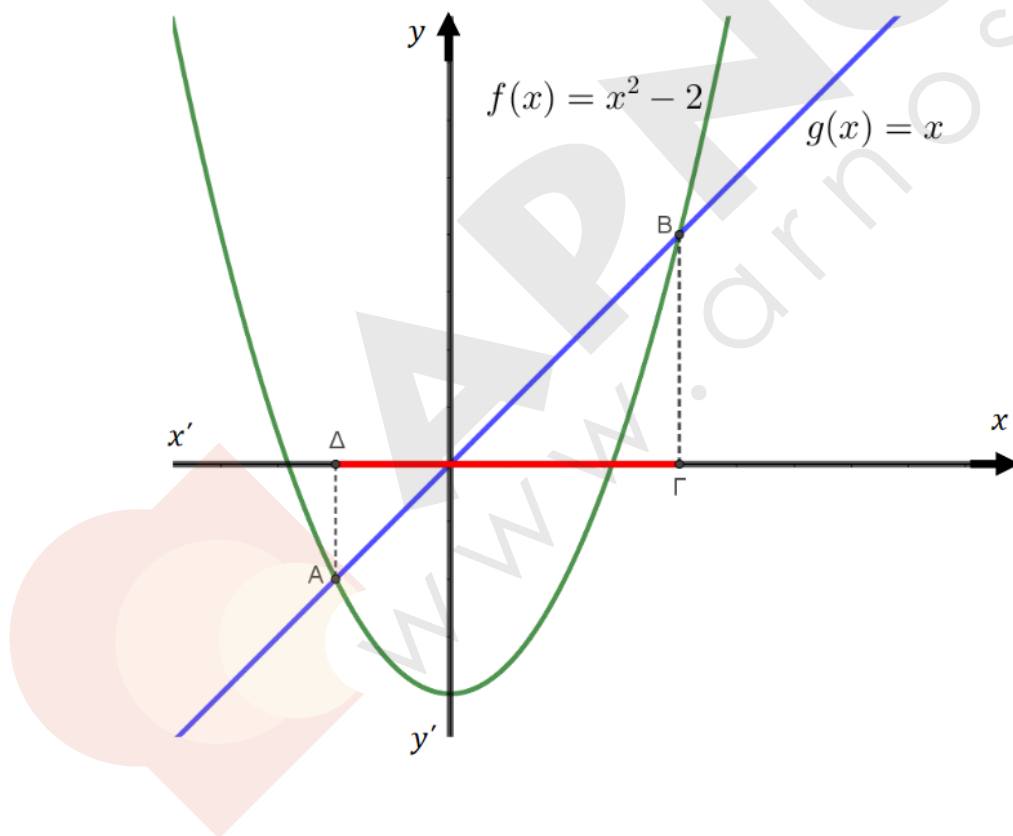
δ) Έχουμε δυο περιπτώσεις:

- $y = f(x) = 21 \Leftrightarrow 2x - 5 = 21 \Leftrightarrow 2x = 26 \Leftrightarrow x = 13 \notin (-\infty, 3]$
- $y = f(x) = 21 \Leftrightarrow x^2 = 21 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{21}$. Από τις δυο αυτές τιμές του x δεκτή είναι η $\sqrt{21}$ διότι $\sqrt{21} \in (3, 10)$.

Κατά συνέπεια το ζητούμενο σημείο είναι $(\sqrt{21}, 21)$.

19. Θέμα 14673 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 2$ και $g(x) = x$.



Έξυπνα & Εύκολα!

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $A(-1, -1)$ και $B(2, 2)$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - x - 2 < 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται στα σημεία A και B, άρα οι τετμημένες των σημείων A και B θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ δηλαδή της εξίσωσης $x^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$, η διακρίνουσα της οποίας είναι

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9, \text{ άρα } x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}. \text{ Όστε } x = 2 \text{ ή } x = -1.$$

Τότε $f(2) = g(2) = 2$ και $f(-1) = g(-1) = -1$.

β) Για το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχουμε βρει ότι οι ρίζες του είναι οι αριθμοί $x = 2$ ή $x = -1$.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	-	+	

Άρα οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι $-1 < x < 2$.

Σημείωση: Η ανίσωση μπορεί να λυθεί και γεωμετρικά με βάση το α) ερώτημα.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Έχουμε $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0 \Leftrightarrow |\omega|^2 - |\omega| - 2 < 0$ η οποία γράφεται στη μορφή $x^2 - x - 2 < 0$, αν θέσουμε $|\omega| = x$.

Με βάση το α) ερώτημα παίρνουμε $-1 < |\omega| < 2$.

Αλλά η σχέση $-1 < |\omega|$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Έτσι, πρέπει να ισχύει $|\omega| < 2$, η οποία γράφεται $-2 < \omega < 2$.

Ωστε οι λύσεις της ανίσωσης $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0$ είναι οι αριθμοί $\omega \in (-2, 2)$.

20. Θέμα 14752

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι το σημείο $M(1, -\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες xx' , yy' .

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει : $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει ρίζες τις $x_1 = 2, x_2 = 3$ αφού $2 + 3 = 5$ και $2 \cdot 3 = 6$ και το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	○	○	+

Συνεπώς $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ ή $x \geq 3$.

Τελικά $A = (-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Το σημείο $M(1, -\sqrt{2})$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν $f(1) = -\sqrt{2}$.

Είναι

$$f(1) = \frac{\sqrt{1^2 - 5 \cdot 1 + 6}}{1 - 2} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

οπότε το σημείο $M(1, -\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

γ) Για $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = \frac{\sqrt{0^2 - 5 \cdot 0 + 6}}{0 - 2} = \frac{\sqrt{6}}{-2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον yy' στο σημείο $(0, -\frac{\sqrt{6}}{2})$.

Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον xx' είναι οι λύσεις της εξίσωσης :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

Η λύση $x = 2$ απορρίπτεται, αφού $2 \notin A$, ενώ η $x = 3$, είναι δεκτή, αφού $3 \in A$, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον xx' στο σημείο $(3, 0)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

21. Θέμα 14754 Αρχέτυπο

α) Να δείξετε ότι $x^2 + 2x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left| \frac{x^3 - 8}{x - 2} \right|$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

(Μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 + 2x + 4$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της g , όπου $g(x) = 6x$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 + 3 = (x + 1)^2 + 3 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εναλλακτικά, το τριώνυμο $x^2 + 2x + 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -12 < 0$, οπότε είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ομόσημο του $a = 1 > 0$, δηλαδή $x^2 + 2x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \neq 2$, οπότε $A = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

γ) Είναι: $f(x) = \left| \frac{x^3 - 8}{x - 2} \right| = \left| \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} \right| = |x^2 + 2x + 4| = x^2 + 2x + 4$, αφού δείξαμε στο α)

ερώτημα ότι $x^2 + 2x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς $f(x) = x^2 + 2x + 4$ για κάθε $x \in A$.

Έξυπνα & Εύκολα!

δ) Το πεδίο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}$. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f, g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ με $x \neq 2$.

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = 6x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 - 6x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Η λύση $x = 2$ που βρήκαμε απορρίπτεται οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινά σημεία.

Θέμα 4 – Κωδικοί:

1393, 1408, 1433, 1444, 1446, 1449, 1468, 1470, 1490, 1514, 1524, 12628, 12788, 12914, 12941, 12944, 13027, 13030, 13090, 13120, 13168, 13313, 13454, 13479, 13557, 14185, 14190, 14225, 14307, 14459, 14665, 14745, 14760, 14810, 14925, 14926, 14961

22. Θέμα 1393 Αρχέτυπο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $g(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x + \alpha$. Να δείξετε ότι:

i) αν $\alpha > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) αν $\alpha < 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 15)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων τομής των C_f , C_g αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$. Τότε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 3x + 2 = x + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -1$$

Άρα οι C_f , C_g έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, το $A(-1, g(-1))$ δηλαδή το $A(-1, 0)$ (η ευθεία εφάπτεται της παραβολής).

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f , C_h είναι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = h(x)$. Δηλαδή:

$$f(x) = h(x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 3x + 2 = x + \alpha \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + (2 - \alpha) = 0, \alpha \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - \alpha) = 4 - 8 + 4\alpha = 4\alpha - 4 = 4(\alpha - 1)$$

i) Αν $\alpha > 1$, τότε $\Delta > 0$ και η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες το οποίο σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν $\alpha < 1$, τότε $\Delta < 0$ και η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες το οποίο σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , h δεν έχουν κοινά σημεία.

Έξυπνα & Εύκολα!

23. Θέμα 1408 Αρχέτυπο

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$

και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

- α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 8)
- β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 8)
- γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g , να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 = \lambda x + (1 - \lambda) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \lambda x + (\lambda - 1) = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Άρα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές, οπότε οι C_f , C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Η (1) έχει μια ρίζα διπλή, δηλαδή οι C_f , C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda$$

Τότε, για $\lambda \neq 2$ έχουμε:

$$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 = |\lambda| + 2 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda|^2 - |\lambda| - 2 = 0 \quad (2)$$

Θέτουμε $|\lambda| = \alpha > 0$ και η εξίσωση (2) γράφεται: $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ με ρίζες $\alpha = 2$, $\alpha = -1$ (απορρίπτεται).
Άρα:

$$|\lambda| = 2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = -2 \text{ ή } \lambda = 2 \text{ (απορρίπτεται)}$$

Οπότε $\lambda = -2$.

24. Θέμα 1433

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax - \alpha + 2$ και $g(x) = x^2 - \alpha + 3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α . (Μονάδες 7)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του α . (Μονάδες 4)

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής. (Μονάδες 10)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ αν και μόνο αν:

$$f(1) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot 1 - \alpha + 2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$2 = 2, \text{ ισχύει}$$

β) i) Αφού οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ένα κοινό σημείο με τετμημένη 1, ισχύει ότι:

$$f(1) = g(1) \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \alpha + 2 = 1^2 - \alpha + 3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 2$$

ii) Για $\alpha = 2$ οι τύποι των f, g γίνονται:

$$f(x) = 2x - 2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 2x \text{ και}$$

$$g(x) = x^2 - 2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα κοινά σημεία των C_f και C_g προκύπτουν από τη λύση του συστήματος: $y = f(x)$ και $y = g(x)$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1$$

Επομένως δεν υπάρχει άλλο κοινό σημείο εκτός από αυτό με τετμημένη 1.

Έξυπνα & Εύκολα!

Για να έχουν οι C_f , C_g δύο κοινά σημεία, πρέπει η εξίσωση $f(x) = g(x)$ να έχει δύο ρίζες άνισες.

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$

$$\alpha x - \alpha + 2 = x^2 - \alpha + 3 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - \alpha x + 1 = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow$$

$$(-\alpha)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha < -2 \text{ ή } \alpha > 2$$

25. Θέμα 1444 Αρχέτυπο

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με

$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$. (Μονάδες 3)

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο. (Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 10)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$ αν και μόνο αν:

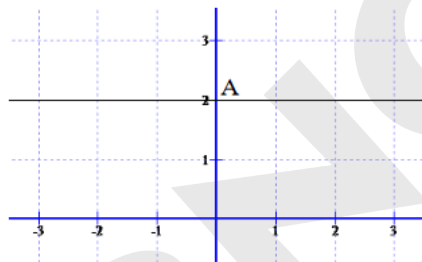
$$f(0) = 2 \Leftrightarrow (\lambda + 1) \cdot 0^2 - (\lambda + 1) \cdot 0 + 2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2,$$

το οποίο ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για $\lambda = -1$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = (-1 + 1)x^2 - (-1 + 1)x + 2 = 2$$

Επομένως η γραφική παράσταση της f είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ που διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.



γ) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$ και επομένως διέρχεται από αυτό αν και μόνο αν:

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1) \cdot 2^2 - (\lambda + 1) \cdot 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1) \cdot 4 - 2\lambda - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda + 4 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

Για $\lambda = -2$ έχουμε: $f(x) = (-2 + 1)x^2 - (-2 + 1)x + 2 = -x^2 + x + 2$. Η γραφική παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε ένα σημείο σημαίνει ότι η τεταγμένη του σημείου είναι 0.

Γνωρίζουμε ότι τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο $(2, 0)$ άρα για να βρούμε το άλλο σημείο $(\rho, 0)$

αρκεί να βρούμε την άλλη λύση ρ της εξίσωσης: $-x^2 + x + 2 = 0$. Εφόσον $S = -2$ έχουμε:

$$-2 = 2 + \rho \text{ οπότε } \rho = -4. \text{ Άρα το άλλο σημείο είναι το } (-4, 0).$$

Έξυπνα & Εύκολα!

δ) Για $\lambda = 1$ ο τύπος της f γράφεται:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+1)x^2 - (1+1)x + 2 = \\ &= 2x^2 - 2x + 2 = 2(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

Το τριώνυμο $x^2 - x + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

οπότε είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2 , δηλαδή του $\alpha = 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως ισχύει ότι:

$$x^2 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

26. Θέμα 1446 Αρχέτυπο

Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (Μονάδες 10)
- γ) Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (Μονάδες 10)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

οπότε είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2 , δηλαδή του $a = 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως ισχύει ότι:

$$x^2 + x + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$ και επομένως δεν τον τέμνει.

β) Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$ προκύπτουν από την επίλυση της ανίσωσης:

$$f(x) < 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 < 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	○	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (-1, 2)$$

Έξυπνα & Εύκολα!

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} |2x - 1| < 3 &\Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2 \end{aligned}$$

Επομένως, λόγω του ερωτήματος β, το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 3$.

27. Θέμα 1449

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, $\alpha < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 - 2x = 3x - 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \end{aligned}$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

- Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1 - 2 = -1$
- Για $x = 4$ είναι $f(4) = 16 - 8 = 8$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων είναι τα:

$$A(1, -1) \text{ και } B(4, 8)$$

β) Τα διαστήματα για τα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g είναι εκείνα για τα οποία ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x) < g(x) &\Leftrightarrow x^2 - 2x < 3x - 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \end{aligned}$$

Τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 5x + 4$ τις προσδιορίσαμε στο σκέλος (α).

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$x^2 - 5x + 4$	+	○	-	○	+

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (1, 4)$$

γ) Κάθε ευθεία της μορφής $y = a$, με $a < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν ισχύει:

$$f(x) > a \text{ για κάθε } a < -1$$

Τότε:

$$x^2 - 2x > a \Leftrightarrow x^2 - 2x - a > 0$$

Η ανίσωση ισχύει διότι το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma &= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) = \\ &= 4 + 4a = 4(1 + a) < 0, \end{aligned}$$

για κάθε $a < -1$

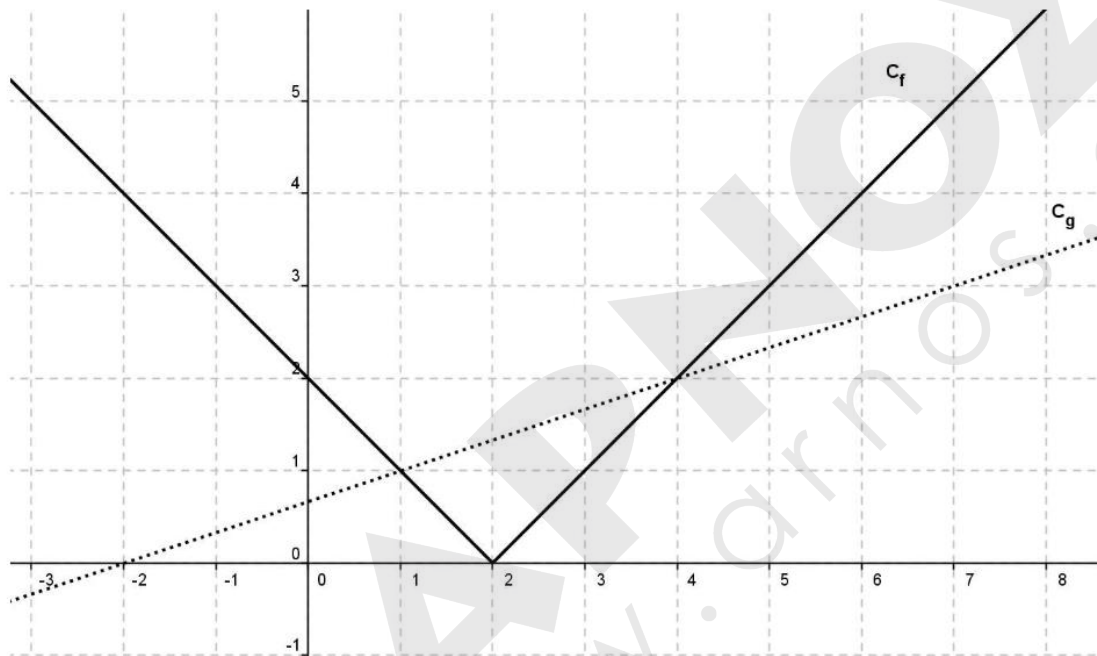
Συνεπώς κάθε ευθεία με εξίσωση $y = a$, με $a < -1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Έξυπνα & Εύκολα!

28. Θέμα 1468 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x) = |x - 2| \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$$



- α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g . (Μονάδες 6)
- β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)
- γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g . (Μονάδες 6)
- δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$K = \sqrt{3|2 - x| - (x + 2)} \quad \text{(Μονάδες 5)}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρώντας το σχήμα, τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι κατ' εκτίμηση τα $A(1, 1)$ και $B(4, 2)$.

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x - 2| = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad (1)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1^η περίπτωση

Για $x \geq 2$, είναι $|x - 2| = x - 2$ οπότε η (1) γράφεται:

$$x - 2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x - 6 = x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - x = 6 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4, \text{ δεκτή}$$

Για $x = 4$ είναι $f(4) = |4 - 2| = 2$.

Άρα το σημείο τομής των C_f και C_g είναι το $A(4, 2)$.

2^η περίπτωση

Για $x \leq 2$, είναι $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$ οπότε η (1) γράφεται:

$$2 - x = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 6 - 3x = x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2 = x + 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1, \text{ δεκτή}$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = |1 - 2| = 1$.

Άρα το σημείο τομής των C_f και C_g είναι το $B(1, 1)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Από το διάγραμμα που δίνεται διαπιστώνουμε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g αν και μόνο αν $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

δ) Η παράσταση K έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$3|2-x| - (x+2) \geq 0 \Leftrightarrow 3|2-x| \geq (x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2-x| \geq \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

Επομένως αναζητούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της g καθώς και τα σημεία στα οποία είναι ίσες. Από το σκέλος (γ) βρίσκουμε ότι:

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$$

29. Θέμα 1470

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + \alpha$, με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία. (Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες. (Μονάδες 10)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Για $a = 1$ ο τύπος της g γράφεται: $g(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x - 1 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1)$$

- Για $x = 0$ είναι $g(0) = 0 + 1 = 1$.
- Για $x = 1$ είναι $g(1) = 1 + 1 = 2$.

Επομένως τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα:

$$A(0, 1) \text{ και } B(1, 2)$$

β) Οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε δύο σημεία αν και μόνο αν η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει δύο λύσεις. Τότε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 - a = 0 \quad (1)$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - a) = \\ &= 1 - 4 + 4a = 4a - 3 \end{aligned}$$

Για να έχει λοιπόν η εξίσωση (1) δύο λύσεις πρέπει:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4a - 3 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a > 3 \Leftrightarrow a > \frac{3}{4}$$

γ) Επειδή $a > 1 > \frac{3}{4}$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες τις x_1, x_2 . Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

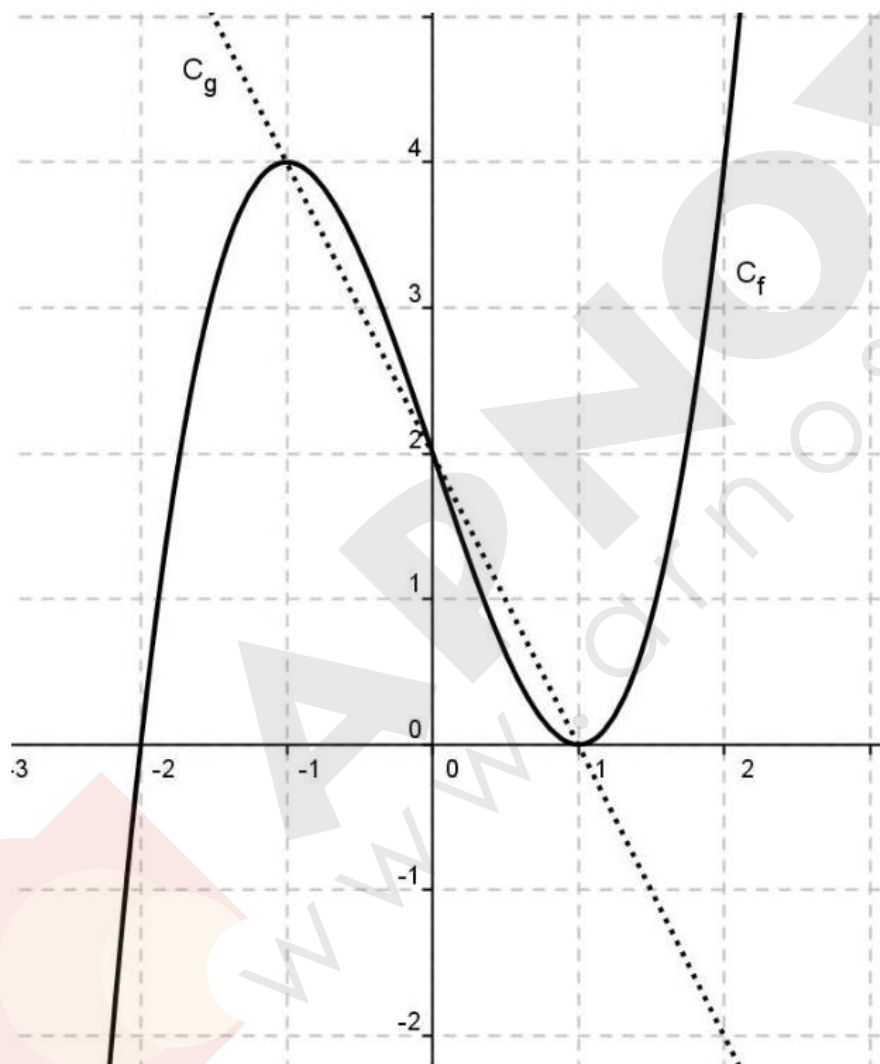
$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1 - a < 0$$

Οπότε οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ετερόσημες.

Έξυπνα & Εύκολα!

30. Θέμα 1490 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$.



Έξυπνα & Εύκολα!

Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

- α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = -2x + 2$. (Μονάδες 6)
- β) Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$. (Μονάδες 6)
- γ) Τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g . (Μονάδες 6)
- δ) Τις τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

- α) Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) = -2x + 2 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

είναι τα σημεία τομής των C_f , C_g . Από τη γραφική παράσταση των f , g διαπιστώνουμε ότι τα ζητούμενα x είναι τα:

$$x_1 = -1, x_2 = 0, \text{ και } x_3 = 1$$

- β) Από τη γραφική παράσταση της f διαπιστώνουμε ότι:

$$f(-1) = 4, f(0) = 2 \text{ και } f(1) = 0$$

- γ) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g αν και μόνο αν:

$$x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

- δ) Η παράσταση A έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$f(x) + 2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -2x + 2 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$$

Από τις γραφικές παραστάσεις των f και g διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω ανίσωση ισχύει αν και μόνο αν:

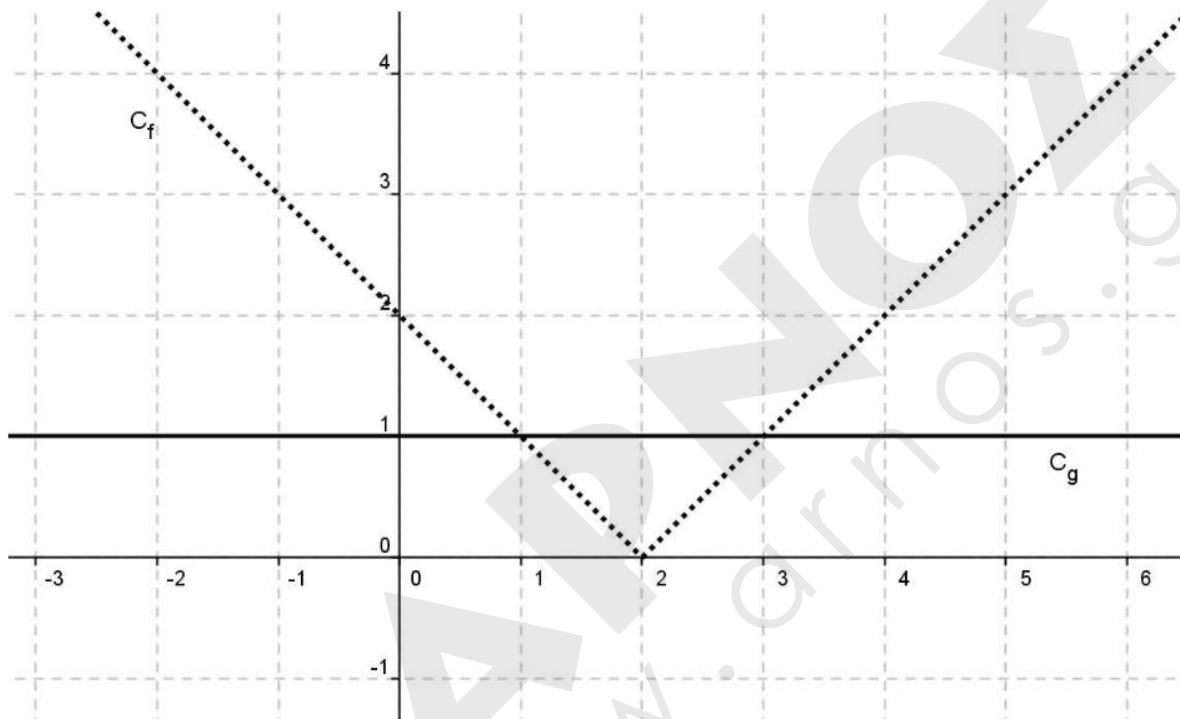
$$x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$$

Έξυπνα & Εύκολα!

31. Θέμα 1514

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x) = |x - 2| \quad \text{και} \quad g(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$



α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g .

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x , για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g .

(Μονάδες 10)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση

$$A = \frac{\sqrt{1 - f(x)}}{f(x)}$$

(Μονάδες 5)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) i) Από τη γραφική παράσταση που δίνεται εκτιμούμε ότι τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα $A_1(1, 1)$ και $A_2(3, 1)$.

ii) Η C_f είναι κάτω από τη C_g στο διάστημα $(1, 3)$.

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και η g το $B = \mathbb{R}$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x - 2| = 1 \Leftrightarrow (x - 2 = 1 \text{ ή } x - 2 = -1) \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = 1)$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = |1 - 2| = 1$ και για $x = 3$ είναι $f(3) = |3 - 2| = 1$

Άρα τα σημεία τομής τους είναι τα $A_1(1, 1)$ και $A_2(3, 1)$.

Επίσης, $f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$, άρα η C_f είναι κάτω από τη C_g στο διάστημα $(1, 3)$.

γ) Η παράσταση A έχει νόημα πραγματικού αριθμού αν και μόνο αν:

$$(1 - f(x) \geq 0 \text{ και } f(x) \neq 0) \Leftrightarrow (f(x) \leq 1 \text{ και } f(x) \neq 0)$$

Αναζητούμε επομένως τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g , τα σημεία τομής της f με την g καθώς και τα σημεία στα οποία η f τέμνει τον άξονα $x'x$ ώστε να τα απορρίψουμε. Από τη δοθείσα γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει όταν:

$$x \in [1, 2) \cup (2, 3]$$

Σχόλιο

Το σκέλος (γ) θα μπορούσε να λυθεί αλγεβρικά ως εξής:

$$\begin{aligned} (f(x) \leq 1 \text{ και } f(x) \neq 0) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (|x - 2| \leq 1 \text{ και } |x - 2| \neq 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-1 \leq x - 2 \leq 1 \text{ και } x - 2 \neq 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 \leq x \leq 3 \text{ και } x \neq 2) \Leftrightarrow x \in [1, 2) \cup (2, 3] \end{aligned}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

32. Θέμα 1524 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$$2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha$. Είναι:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha &= \\ &= 4x^2 - 2\alpha x - 6x + 3\alpha = \\ &= 2x(2x - 3) - \alpha(2x - 3) = \\ &= (2x - 3)(2x - \alpha) \end{aligned}$$

Τότε ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha + 3)x + 3\alpha}{2x - 3} = \frac{(2\alpha - 3)(2x - \alpha)}{2x - 3} = 2x - \alpha$$

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$ αν και μόνο αν ισχύει:

$$f(1) = -1 \Leftrightarrow 2 - \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

δ) Για τις τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{2}, \text{ με } x \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq 3$$

Αρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$, $\alpha \neq 3$.

Αν $\alpha = 3$ η δεν C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.

Επίσης έχουμε:

$$f(0) = 2 \cdot 0 - \alpha = -\alpha$$

Αρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -\alpha)$.

33. Θέμα 12628

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 1$ και $g(x) = 3 - x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Z.

(Μονάδες 10)

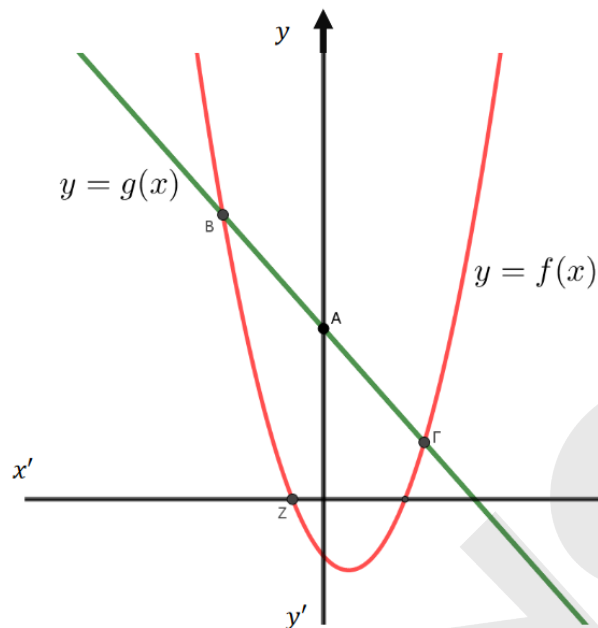
β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y = g(x)$

(Μονάδες 6)

γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α , η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.

(Μονάδες 9)

Έξυπνα & Εύκολα!



ΛΥΣΗ

α) Το σημείο Z έχει ως τετμημένη την αρνητική λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ η οποία γράφεται $x^2 - x - 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$.

Άρα $x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, αφού $1 < 5 \Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{5} \Rightarrow 1 < \sqrt{5} \Rightarrow 1 - \sqrt{5} < 0$.

Η άλλη ρίζα είναι η $x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$. Όστε $Z\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0\right)$.

Το σημείο A έχει τετμημένη μηδέν και τεταγμένη $g(0) = 3 - 0 = 3$, έτσι $A(0, 3)$.

Τα σημεία B και Γ έχουν ως τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$, δηλαδή της εξίσωσης $x^2 - x - 1 = 3 - x$ η οποία γράφεται $x^2 = 4$. Οπότε $x^2 = 2^2$, άρα $x = 2$ ή $x = -2$.

Οι τεταγμένες των σημείων Γ και B θα είναι:

$f(2) = g(2) = 3 - 2 = 1$ και $f(-2) = g(-2) = 3 - (-2) = 5$ αντίστοιχα.

Όστε $B(-2, 5)$, $\Gamma(2, 1)$ αφού το σημείο B βρίσκεται πιο αριστερά από το Γ, άρα θα έχει μικρότερη τετμημένη.

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Πρέπει $f(x) > g(x)$, δηλαδή $x^2 - x - 1 > 3 - x$, οπότε $\Leftrightarrow x^2 > 4$, σχέση που γράφεται $x^2 > 2^2$, άρα $|x| > |2|$. Όστε $x < -2$ ή $x > 2$.

Έτσι, για $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ θα είναι $f(x) > g(x)$.

γ) Προφανώς πρέπει να αποδείξουμε ότι $|f(\alpha) - (-g(\alpha))| \geq 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό

α . Η σχέση αυτή ισοδύναμα γράφεται :

$$|f(\alpha) + g(\alpha)| \geq 1, \text{ άρα } |\alpha^2 - \alpha - 1 + 3 - \alpha| \geq 1, \text{ δηλαδή } |\alpha^2 - 2\alpha + 2| \geq 1. (I)$$

Παρατηρούμε ότι $\alpha^2 - 2\alpha + 2 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 1 = (\alpha - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$, αφού

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\alpha - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + 1 \geq 1$

Γνωρίζουμε όμως ότι αν $y > 0$, τότε είναι $|y| = y$.

Έτσι η σχέση (I) ισοδύναμα γράφεται $|(\alpha - 1)^2 + 1| \geq 1$, δηλαδή $(\alpha - 1)^2 + 1 \geq 1$, οπότε

$(\alpha - 1)^2 \geq 0$ σχέση που ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Εναλλακτικά, το τριώνυμο $\alpha^2 - 2\alpha + 2$ έχει αρνητική διακρίνουσα

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$, άρα το τριώνυμο γίνεται ομόσημο του συντελεστή του

α^2 δηλαδή του 1, άρα πάντα θετικό για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Όστε

$$|\alpha^2 - 2\alpha + 2| = \alpha^2 - 2\alpha + 2. \text{ Έτσι η σχέση (I) γράφεται ισοδύναμα } \alpha^2 - 2\alpha + 2 \geq 1,$$

δηλαδή $\alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$ άρα $(\alpha - 1)^2 \geq 0$ ισχύει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

34. Θέμα 12788 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 4$

(Μονάδες 9)

γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq \beta$ ώστε να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = (\sqrt{3}-1)^2 + (-\sqrt{3}-1)^2 = 3+1-2\sqrt{3}+3+1+2\sqrt{3} = 4+4 = 8$$

β) Ένα σημείο $M(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f , βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 4$ μόνο όταν ισχύει $f(x) < 4$.

Είναι:

$$f(x) < 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{4} \Leftrightarrow |x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$$

Οι ακέραιοι που περιέχονται στο διάστημα $(-1, 3)$ είναι οι: 0, 1, 2 και επειδή $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $\Gamma(2, 1)$.

γ) Αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε:

$$(\alpha-1)^2 = (\beta-1)^2, \text{ οπότε}$$

$$(\alpha-1)^2 - (\beta-1)^2 = 0$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$(\alpha-1+\beta-1)(\alpha-1-\beta+1) = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$(\alpha+\beta-2)(\alpha-\beta) = 0$$

Έξυπνα & Εύκολα!

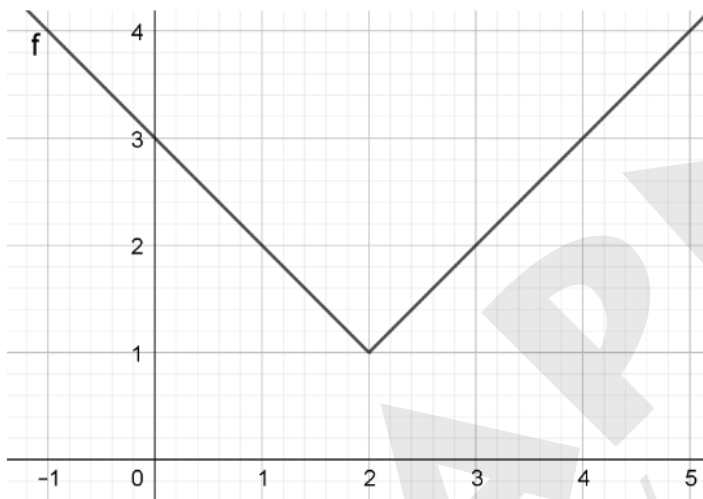
Η τελευταία ισότητα, με $\alpha \neq \beta$ δίνει:

$$\alpha + \beta - 2 = 0, \text{ οπότε } \alpha + \beta = 2$$

που είναι το ζητούμενο.

35. Θέμα 12914

Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + 1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



α)

- i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;

(Μονάδες 4)

- ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α)i).

(Μονάδες 5)

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$.

(Μονάδες 8)

γ)

- i. Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $(AB) \leq 2$;

(Μονάδες 4)

- ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)i).

(Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α)

- i. Επειδή η ευθεία $\varepsilon: y = c$ είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$, από το σχήμα προκύπτει ότι για να έχει κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της f πρέπει $c \geq 1$.
- ii. Για να έχει κοινά σημεία η ευθεία $\varepsilon: y = c$ με τη γραφική παράσταση της f , πρέπει η εξίσωση $|x - 2| + 1 = c \Leftrightarrow |x - 2| = c - 1$ να έχει λύση. Επειδή είναι $|x - 2| \geq 0$, αρκεί $c - 1 \geq 0 \Leftrightarrow c \geq 1$.

β) Για $c \geq 1$ η $|x - 2| = c - 1$ έχει λύσεις τις:

$$x - 2 = c - 1 \Leftrightarrow x = c + 1 \text{ ή } x - 2 = -(c - 1) \Leftrightarrow x = 3 - c.$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ)

i. Επειδή τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, για να είναι $(AB) \leq 2$ πρέπει το μήκος του οριζόντιου τμήματος ανάμεσα στις δύο ημιευθείες της γραφικής παράστασης της f να είναι μικρότερο ή ίσο του 2. Από το σχήμα προκύπτει ότι αυτό ισχύει για τα σημεία με τεταγμένη από 1 έως και 2. Άρα $1 \leq c \leq 2$.

ii. Επειδή τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, το μήκος (AB) είναι $(AB) = |c + 1 - (3 - c)| = |2c - 2|$. Άρα:

$$(AB) \leq 2 \Leftrightarrow |2c - 2| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2c - 2 \leq 2,$$

η οποία γίνεται:

$$-1 \leq c - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq c \leq 2.$$

Αλλά από το ερώτημα α) πρέπει $c \geq 1$. Άρα τελικά $1 \leq c \leq 2$.

36. Θέμα 12941

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .

(Μονάδες 6)

α) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

δ) Αν $g(x) = 3 - x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί να ισχύει: $3 - |x| \neq 0$

Επειδή ισχύει

$$3 - |x| = 0 \Leftrightarrow -|x| = -3 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί $x \neq \pm 3$.

Επομένως η συνάρτηση f ορίζεται για $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$.

β) Για $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$ η συνάρτηση f παίρνει τη μορφή

$$f(x) = \frac{9 - x^2}{3 - |x|} = \frac{3^2 - |x|^2}{3 - |x|} = \frac{(3 + |x|)(3 - |x|)}{3 - |x|} = 3 + |x|$$

γ) Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα x' λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 + |x| = 0 \Leftrightarrow |x| = -3$ η οποία είναι αδύνατη. Άρα η γραφική παράσταση C_f δεν τέμνει τον άξονα x' .

Για να βρούμε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα y' πρέπει να βρούμε το $f(0)$.

Ισχύει $f(0) = 3 + |0| = 3$. Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f με τον άξονα y' είναι το $A(0,3)$.

δ) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση:

Η εξίσωση $g(x) = f(x)$ γίνεται

$$-x^2 + 3 = 3 + |x| \text{ δηλαδή}$$

$$-|x|^2 + 3 - 3 - |x| = 0 \text{ και τελικά}$$

$$|x|^2 + |x| = 0$$

Επειδή $|x|^2 \geq 0$ και $|x| \geq 0$ ισχύει $|x|^2 + |x| = 0$ αν και μόνο αν $x=0$.

Άρα το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g είναι το $(0, 3)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

37. Θέμα 12944 Αρχέτυπο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \frac{1}{x}$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = f(2) + g(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)$$

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4$ για οποιοδήποτε αριθμό x με $x \neq 0$

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι $|\alpha| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$A = 2 + \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = 4 - \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 2 = 4 - 1 = 3$$

β) Για οποιοδήποτε αριθμό x με $x \neq 0$ έχουμε:

$$(f(x))^2 - (g(x))^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x} - x + \frac{1}{x}\right) = 2x \cdot \frac{2}{x} = 4$$

γ) Το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f καθορίζεται από το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, οπότε αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f , η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει πραγματικές λύσεις. Είναι:

$$f(x) = \alpha \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \alpha \Leftrightarrow x^2 + 1 = \alpha x \Leftrightarrow x^2 - \alpha x + 1 = 0$$

Η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις, οπότε ισχύει $\Delta \geq 0$. Έτσι, έχουμε:

$\Delta = \alpha^2 - 4 \geq 0$, οπότε $\alpha^2 \geq 4$, απ' όπου προκύπτει $\sqrt{\alpha^2} \geq \sqrt{4}$, δηλαδή $|\alpha| \geq 2$, που είναι το ζητούμενο.

Έξυπνα & Εύκολα!

38. Θέμα 13027 Αρχέτυπο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$ όπου $x \in \mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\beta = -1$

i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες x' , y' .

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

(Μονάδες 7)

iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) - 2kg(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες του σημείου M θα πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση $y = g(x)$, άρα

θα ισχύει $g\left(\frac{3\beta}{2}\right) = -3 - \frac{\beta}{2}$ οπότε $\frac{3\beta}{2} + \beta = -3 - \frac{\beta}{2}$ άρα $\frac{3\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \beta = -3$.

Ωστε $3\beta = -3$, έτσι $\beta = -1$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Για $\beta = -1$

- i) Είναι $f(x) = x^2 - 1$. Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$, έχουν τεταγμένη μηδέν, οπότε οι τετμημένες τους είναι λύσεις της εξίσωσης $y = f(x) = 0$, άρα $x^2 - 1 = 0$ οπότε $x^2 = 1$. Τελικά $x = 1$, $x = -1$. Άρα τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι τα $A(1, 0)$ και $B(-1, 0)$. Επίσης $f(0) = 0^2 - 1 = -1$, άρα το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $y'y$ είναι το $\Gamma(0, -1)$.
- ii) Θέλουμε να ισχύει $f(x) < g(x)$ δηλαδή $x^2 - 1 < x - 1$ άρα $x^2 - x < 0$ ή $x(x - 1) < 0$. Είναι φανερό ότι το πολυώνυμο $x^2 - x = x(x - 1)$ έχει ως ρίζες τους αριθμούς μηδέν και 1, αφού για αυτές τις τιμές μηδενίζεται. Δημιουργούμε τον πίνακα προσήμου, παρατηρώντας ότι ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha = 1 > 0$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$		+	-	+

Διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τιμές του x μεταξύ 0 και 1, δηλαδή $0 < x < 1$.

- iii) Θέλουμε να ισχύει $f(x) - 2kg(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$. Άρα πρέπει να ισχύει η σχέση $x^2 - 1 - 2k(x - 1) \geq 0$ για κάθε $x \in R$, άρα $x^2 - 2kx + (2k - 1) \geq 0$ για κάθε $x \in R$. Καθώς ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha = 1 > 0$, για να ισχύει για κάθε $x \in R$ η ανισότητα, πρέπει και αρκεί να ισχύει $\Delta \leq 0$ δηλαδή $(-2k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2k - 1) \leq 0$ άρα πρέπει και αρκεί $4k^2 - 8k + 4 \leq 0$ ή ισοδύναμα αν διαιρέσουμε κάθε όρο με το 4, πρέπει $k^2 - 2k + 1 \leq 0$ δηλαδή $(k - 1)^2 \leq 0$ σχέση η οποία αληθεύει μόνο για $k = 1$.

Έξυπνα & Εύκολα!

39. Θέμα 13030

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ και $g(x) = |x + 3|$.

Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

(Μονάδες 7)

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για $x^2 - 4x - 5 \geq 0$ με $x \in \mathbb{R}$.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4(-5) = 36 > 0$ επομένως έχει δύο άνισες ρίζες $x_1 = \frac{-(-4)+6}{2} = 5$ και $x_2 = \frac{-(-4)-6}{2} = -1$. Το $a=1>0$ και προκύπτει:

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$x^2 - 4x - 5$	+	0	0	+

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων η ανίσωση $x^2 - 4x - 5 \geq 0$ αληθεύει

για $x \leq -1$ ή $x \geq 5$.

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$.

Η συνάρτηση g ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι $A_g = \mathbb{R}$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και C_g θα λύσουμε την εξίσωση

$f(x) = g(x)$, και θα προκύψουν οι κοινές τετμημένες τους. Έχουμε:

$$\sqrt{x^2 - 4x - 5} = |x + 3| \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = |x + 3|^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow -10x = 14 \Leftrightarrow x = \frac{-7}{5}.$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων έχουν ένα κοινό σημείο το $\left(\frac{-7}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g προκύπτουν από την λύση της ανίσωσης

$$\sqrt{x^2 - 4x - 5} < |x + 3| \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 < |x + 3|^2 \Leftrightarrow -10x < 14 \Leftrightarrow x > \frac{-7}{5}.$$

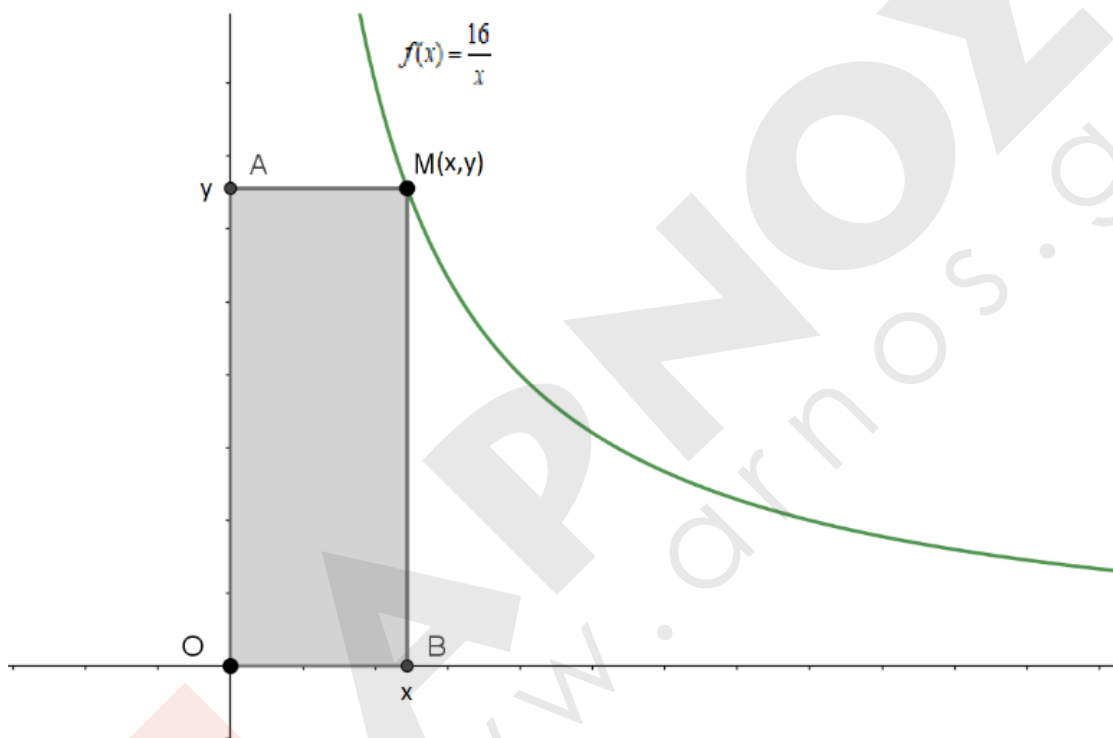
Επειδή έχουμε τον περιορισμό $x \leq -1$ ή $x \geq 5$ άρα $x \in \left(\frac{-7}{5}, -1\right] \cup [5, +\infty)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

40. Θέμα 13090 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{16}{x}$, $x > 0$.

Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω A και B οι προβολές του M στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια $OAMB$ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου M έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x) = 2x + \frac{32}{x}$, $x > 0$ όπου x η τετμημένη του M .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M ώστε το ορθογώνιο $OAMB$ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

(Μονάδες 7)

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Αν M' είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο $OAM'B$ να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το M' έχει τετμημένη 4.

(Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο $OAM'B$ έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια $OAMB$, δηλαδή ότι $\Pi(x) \geq \Pi(4)$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Αφού το σημείο $M(x,y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ισχύει ότι

$$y = f(x) = \frac{16}{x} > 0. \text{ Οι συντεταγμένες του σημείου } B \text{ είναι } B(x, 0) \text{ και του σημείου } A(0, \frac{16}{x}).$$

Το ορθογώνιο $OAMB$ έχει εμβαδόν $(OAMB) = (OA) \cdot (OB) = \frac{16}{x} \cdot x = 16$ τετραγωνικές

μονάδες και περίμετρο $\Pi(x) = 2(OA) + 2(OB) = 2 \cdot \frac{16}{x} + 2 \cdot x = 2x + \frac{32}{x}$, $x > 0$.

β) Αναζητούμε τις τιμές του $x > 0$ για τις οποίες $\Pi(x) = 20$ δηλαδή $2x + \frac{32}{x} = 20$ και

ισοδύναμα $2x^2 + 32 = 20x$ δηλαδή $2x^2 - 20x + 32 = 0$ και τελικά $x^2 - 10x + 16 = 0$.

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις $x = 2$ ή $x = 8$ αφού $S = 2 + 8 = 10$ και $P = 2 \cdot 8 = 16$.

Για $x = 2$ είναι $y = \frac{16}{2} = 8$ οπότε $M_1(2, 8)$.

Για $x = 8$ είναι $y = \frac{16}{8} = 2$ οπότε $M_2(8, 2)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ)

i. Το $OAM'B$ είναι τετράγωνο αν και μόνο αν $(OA) = (OB)$ δηλαδή ισοδύναμα αν $\frac{16}{x} = x$

οπότε $x^2 = 16$ και επειδή $x > 0$ έχουμε ότι $x = 4$.

ii. Θα δείξουμε ότι $\Pi(x) \geq \Pi(4)$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή ισοδύναμα

$2x + \frac{32}{x} \geq 16$ και επειδή $x > 0$ έχουμε ισοδύναμα $2x^2 + 32 \geq 16x$ δηλαδή $2x^2 + 32 - 16x \geq 0$

δηλαδή $x^2 + 16 - 8x \geq 0$ και τελικά $(x - 4)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 4$, που σημαίνει ότι από όλα τα ορθογώνια $OAMB$ τη μικρότερη περίμετρο την έχει το τετράγωνο $OAM'B$.

41. Θέμα 13120 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4,4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 7)

δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Για να υπάρχουν δύο σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ θα πρέπει η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες.

Άρα $\Delta > 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 + 16\lambda^2 > 0$ που ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ σαν άθροισμα μη αρνητικών αριθμών οι οποίοι δεν μηδενίζονται συγχρόνως.

β) Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$ είναι $P = -4\lambda^2 < 0$, αφού $\lambda \neq 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες ετερόσημες για κάθε $\lambda \neq 0$.

γ) Το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα $x'x$ είναι $A'(4, -4)$ και για να ανήκει στη γραφική παράσταση της f θα ισχύει :

$$f(4) = -4 \Leftrightarrow 16 - 4(\lambda - 1) - 4\lambda^2 = -4 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -3.$$

δ) Για $\lambda = -1$

$$f(x) = x^2 + 2x - 4$$

$$\text{Πρέπει } f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 < 0$$

$$\text{Το τριώνυμο έχει: } \Delta = 4 + 16 = 20$$

$$\text{και ρίζες: } x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

Αφού $a = 1 > 0$ το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{5}$	$-1 + \sqrt{5}$	$+\infty$	
$f(x) = x^2 + 2x - 4$	+	0	-	0	+

Άρα $f(x) < 0$ για $x \in (-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5})$.

Έξυπνα & Εύκολα!

42. Θέμα 13168

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2\lambda x + \gamma$ με $x \in \mathbb{R}$ και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, -1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\gamma = -1$

(Μονάδες 5)

ii. Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

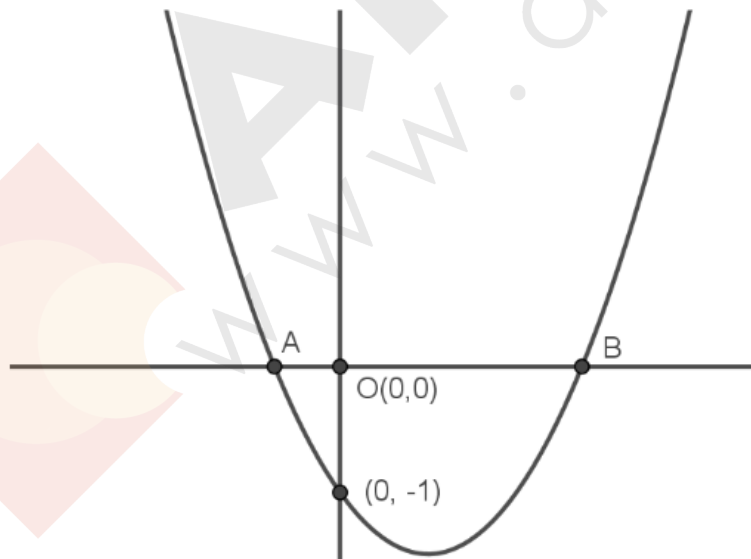
(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B με συντεταγμένες $A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$ και $B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των A και B είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)



Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α)

i. Ισχύει ότι $f(0) = -1 \Leftrightarrow 0^2 + 2 \cdot \lambda \cdot 0 + \gamma = -1 \Leftrightarrow \gamma = -1$

ii. Για να μην είναι η γραφική παράσταση της f κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ αρκεί:

$$f(x) \geq -\lambda^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x - 1 \geq -\lambda^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 \geq 0,$$

η οποία γράφεται $(x + \lambda)^2 \geq 0$ που ισχύει.β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x - 1 = 0$.

Η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta = (2\lambda)^2 - 4(-1) = 4\lambda^2 + 4 = 4(\lambda^2 + 1) > 0,$$

άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε δύο σημεία.

Οι τετμημένες των σημείων είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4(\lambda^2 + 1)}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1} \\ x_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} \end{cases}$$

Επίσης, $-\sqrt{\lambda^2 + 1} < \sqrt{\lambda^2 + 1}$ άρα $-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1} < -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}$.Οπότε τα σημεία είναι τα $A(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$ και $B(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0)$.γ) Η απόσταση των A και B είναι:

$$(AB) = |x_2 - x_1| = |-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} - (-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1})| = |2\sqrt{\lambda^2 + 1}|.$$

Οπότε:

$$(AB) \geq 2 \Leftrightarrow |2\sqrt{\lambda^2 + 1}| \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 + 1} \geq 1 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \lambda^2 \geq 0$$

που ισχύει.

Έξυπνα & Εύκολα!

43. Θέμα 13313 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει λύση στο σύνολο A .

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί

$$x^3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \end{cases}.$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$$A = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

β) Επειδή το $0 \notin A$ η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $y'y$.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $x \in A$.

Έξυπνα & Εύκολα!

$$\text{Είναι } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^7 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^6 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^6 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}.$$

Επειδή $0 \notin A$, $-1 \notin A$, $1 \notin A$ η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο σύνολο A και επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $x'x$.

$$\gamma) \text{ Είναι } f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x} = \frac{x(x^6 - 1)}{x(x^2 - 1)} = \frac{(x^2)^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2 - 1} = x^4 + x^2 + 1 \text{ για}$$

κάθε $x \in A$.

δ) Είναι $f(x) = 3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$. Θέτουμε $x^2 = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$ που έχει ρίζες τις $\omega = 1$, $\omega = -2$ αφού $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -1$ και

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = -2.$$

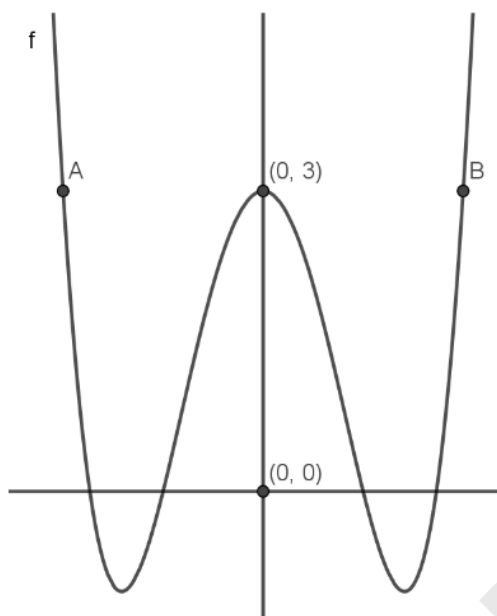
Για $\omega = 1$ έχουμε $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ που όμως δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού A .

Για $\omega = -2$ έχουμε $x^2 = -2$ που είναι αδύνατη.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 3$ δεν έχει λύση στο σύνολο A .

44. Θέμα 13454 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^4 - 4x^2 + \gamma$, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.



α) Να δείξετε ότι $\gamma = 3$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $A(a^2 - 3, 3)$ και $B(5 - 3a, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Από τη γραφική παράσταση της f , φαίνεται ότι $f(0) = 3$ άρα $a \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + \gamma = 3$ οπότε $\gamma = 3$.

β) Επειδή η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ και τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, θα είναι και αυτά συμμετρικά ως προς τον $y'y$. Άρα:

$$\alpha^2 - 3 = -(5 - 3\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$ και οι ρίζες της:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}.$$

Επειδή το σημείο A ανήκει στο 2^ο τεταρτημόριο πρέπει:

$$\alpha^2 - 3 < 0.$$

Για $\alpha = 2$ είναι $2^2 - 3 = 1 > 0$ άρα η λύση $\alpha = 2$ απορρίπτεται.

Για $\alpha = 1$ είναι $1^2 - 3 = -2 < 0$ άρα η λύση $\alpha = 1$ είναι δεκτή.

Οπότε, ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3.$$

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ η οποία για $x^2 = w > 0$ γίνεται $w^2 - 4w + 3 = 0$.

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0$ και οι ρίζες

$$w = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3 \text{ ή } w = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1,$$

οι οποίες είναι και οι δύο δεκτές. Άρα:

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow \{x = 1 \text{ ή } x = -1\}, \text{ ή } x^2 = 3 \Leftrightarrow \{x = \sqrt{3} \text{ ή } x = -\sqrt{3}\}.$$

δ) Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ όταν:

$$-\sqrt{3} < x < -1 \text{ ή } 1 < x < \sqrt{3}.$$

Έξυπνα & Εύκολα!

45. Θέμα 13479 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$.

Αν $|x| \leq 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 9)

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να βρείτε την ακέραια τιμή του μ .

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$

Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$\begin{aligned} f(x) &= |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16| = \\ &= 3|x - 4| - 2|x - 4| - 3|x^2 - 16| = \\ &= |x - 4| - 3|x^2 - 16|. \end{aligned}$$

Επειδή $x \leq 4 \Leftrightarrow x - 4 \leq 0$. Άρα $|x - 4| = 4 - x$.

Επιπλέον $|x| \leq 4 \Leftrightarrow |x|^2 \leq 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow |x^2 - 16| = 16 - x^2$.

Άρα: $f(x) = 4 - x - 3(16 - x^2) = 4 - x - 48 + 3x^2 = 3x^2 - x - 44$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β)

- i. Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$, δηλαδή $3x^2 - x - 44 = 0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι : $\Delta = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 44 = 529$ και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 23}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{24}{6} = 4 \\ x_2 = \frac{-22}{6} = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

οι οποίες είναι δεκτές γιατί ανήκουν στο διάστημα $[-4, 4]$.

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ είναι $A(4, 0)$ και $B(-\frac{11}{3}, 0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στον τύπο της f όπου $x = 0$ και βρίσκουμε $y = f(0) = -44$.

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$ είναι $\Gamma(0, -44)$.

- ii. Αφού το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ με μ ακέραιο ανήκει στη γραφική παράσταση της f θα ισχύει: $\mu + 1 \in [-4, 4]$ και $f(\mu + 1) = -20$.

$$\text{Είναι: } f(\mu + 1) = -20 \Leftrightarrow 3(\mu + 1)^2 - \mu - 1 - 44 = -20 \Leftrightarrow$$

$$3\mu^2 + 6\mu + 3 - \mu - 45 + 20 = 0 \Leftrightarrow 3\mu^2 + 5\mu - 22 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι : $\Delta = 25 - 4 \cdot 3 \cdot (-22) = 289$ και οι ρίζες:

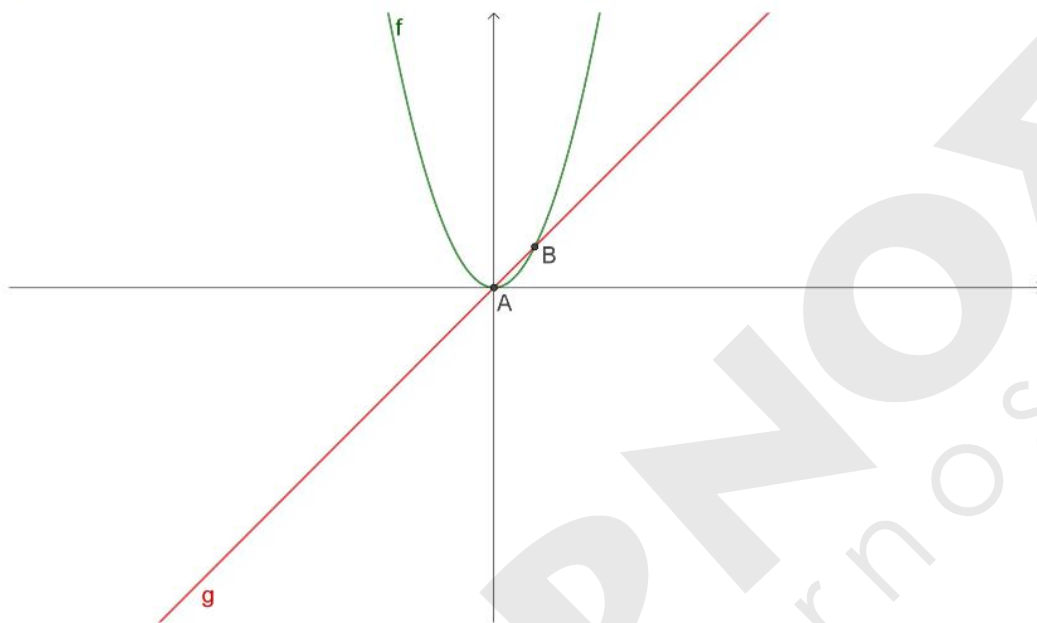
$$\mu_{1,2} = \frac{-5 \pm 17}{6} = \begin{cases} \mu_1 = \frac{12}{6} = 2 \\ \mu_2 = \frac{-22}{6} = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

Από τις παραπάνω τιμές του μ δεκτή είναι η $\mu = 2$ καθώς είναι ακέραια και επιπλέον $\mu + 1 \in [-4, 4]$.

Έξυπνα & Εύκολα!

46. Θέμα 13557

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$ που τέμνονται στα σημεία A,B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B.

(Μονάδες 7)

β) Αν $A(0,0), B(1,1)$, τότε:

i. Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 5)

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. ερώτημα.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α, β με $\beta \neq 0$, να δείξετε (με

βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha| < |\beta|$.

(Μονάδες 6)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων A, B είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$,
ισοδύναμα $x^2 = x$, δηλαδή $x^2 - x = 0$, οπότε $x(x-1) = 0$ και τελικά $x = 0$ ή $x = 1$.

Επειδή το σημείο A είναι πιο αριστερά από το σημείο B , η τετμημένη του A είναι
0 και η τετμημένη του B είναι 1.

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$, οπότε $A(0, 0)$.

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$, οπότε $B(1, 1)$.

β)

i. Από το σχήμα βλέπουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη
γραφική παράσταση της g , για τις τετμημένες των σημείων της γραφικής
παράστασης της g που είναι μεταξύ των A, B , δηλαδή για $0 < x < 1$.

ii. Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g για
τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $x^2 < x$. Η ανίσωση $x^2 < x$ ισοδύναμα
γίνεται $x^2 - x < 0$ που είναι μία ανίσωση 2ου βαθμού και η λύση της βασίζεται
στο πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x$, που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	+	○	○	+

Συνεπώς πράγματι $x^2 < x$ για $0 < x < 1$.

Σημείωση: Με βάση τα παραπάνω για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $x^2 < x$, π.χ. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$

αφού ισοδύναμα $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Συνεπώς το τετράγωνο οποιουδήποτε αριθμού δεν είναι

πάντα μεγαλύτερο από τον ίδιο τον αριθμό.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Αφού $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$ με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$. Συνεπώς

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{\alpha}{\beta} < 1 \text{ οπότε, } \frac{|\alpha|}{|\beta|} < 1 \text{ και ισοδύναμα } |\alpha| < |\beta|.$$

47. Θέμα 14185

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 1$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y = 1$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$x^3 - 2x^2 + x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Άρα $A = \mathbb{R} - \{1, 0\}$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Έχουμε $f(x) = \frac{x}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{x}{x(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x \in A$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, 0\}$ η εξίσωση γίνεται:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ \text{ή} \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{ή} \\ x=0 \text{ απορ} \end{cases}.$$

Άρα έχει μοναδική λύση την $x = 2$.

δ) Αναζητούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R} - \{1, 0\}$ για τις οποίες ισχύει :

$$f(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > 1 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} < \sqrt{1} \Leftrightarrow$$

$$|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

και επειδή $x \neq 1$, έχουμε τελικά ότι $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$.

48. Θέμα 14190 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha - 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

(Μονάδες 8)

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο M της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $\beta > 0$. Από το M φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και έστω A και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το A ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$. Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου $OAM\Delta$ είναι $[\sqrt{2}(\beta + 1)]^2$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $f(x)$ είναι οι τεταγμένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f . Παρατηρούμε ότι ο τύπος $f(x)$ της συνάρτησης είναι ένα τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$, άρα το τριώνυμο θα γίνεται ομόσημο του $a = 1 > 0$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x , δηλαδή πάντα θετικό. Έτσι $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει $f(-\alpha - 1) = f(\alpha)$ για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$. Πράγματι: $f(-\alpha - 1) = (-\alpha - 1)^2 + (-\alpha - 1) + 1 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - \alpha = \alpha^2 + \alpha + 1 = f(\alpha)$.

γ) Έστω $M(\beta, f(\beta))$ και A, Δ οι προβολές του M στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Τότε είναι $A(\beta, 0)$ και $\Delta(0, f(\beta))$. Η περίμετρος P του ορθογωνίου $OAM\Delta$ θα είναι:

$$P = 2\beta + 2f(\beta) = 2[\beta + f(\beta)] = 2(\beta + \beta^2 + \beta + 1) = 2(\beta^2 + 2\beta + 1) = 2(\beta + 1)^2 = [\sqrt{2}(\beta + 1)]^2.$$

Έξυπνα & Εύκολα!

49. Θέμα 14225 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - 6x + 8, x \in A$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y = 3$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = x^4 - 6x - 4$ τέμνει την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και άρα $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

β) Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 4$ έχει ρίζες τις 1 και 4, οπότε είναι $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$ και επομένως:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-1)}{x-1} = (x-2) \cdot (x-4) = x^2 - 6x + 8, x \in A.$$

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Έχουμε:

$$f(x) \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq 0.$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
x^2-6x+5	+	0	-	0	+

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 6x + 5$ φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και η ανίσωση $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ αληθεύει για $x \in [1, 5]$. Όμως $x \neq 1$, οπότε $x \in (1, 5]$.

δ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της g με τη γραφική παράσταση της f είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$g(x) = f(x) \Leftrightarrow x^4 - 6x - 4 = x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0,$$

η οποία θέτοντας $x^2 = \omega$ γίνεται

$$\omega^2 - \omega - 12 = 0 \text{ με ρίζες } \omega = -3 \text{ (απορρίπτεται) και } \omega = 4 \text{ (δεκτή).}$$

$$\text{Άρα } x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

$$\text{Για } x = -2 \text{ έχουμε } f(-2) = (-2)^2 - 6(-2) + 8 = 4 + 12 + 8 = 24$$

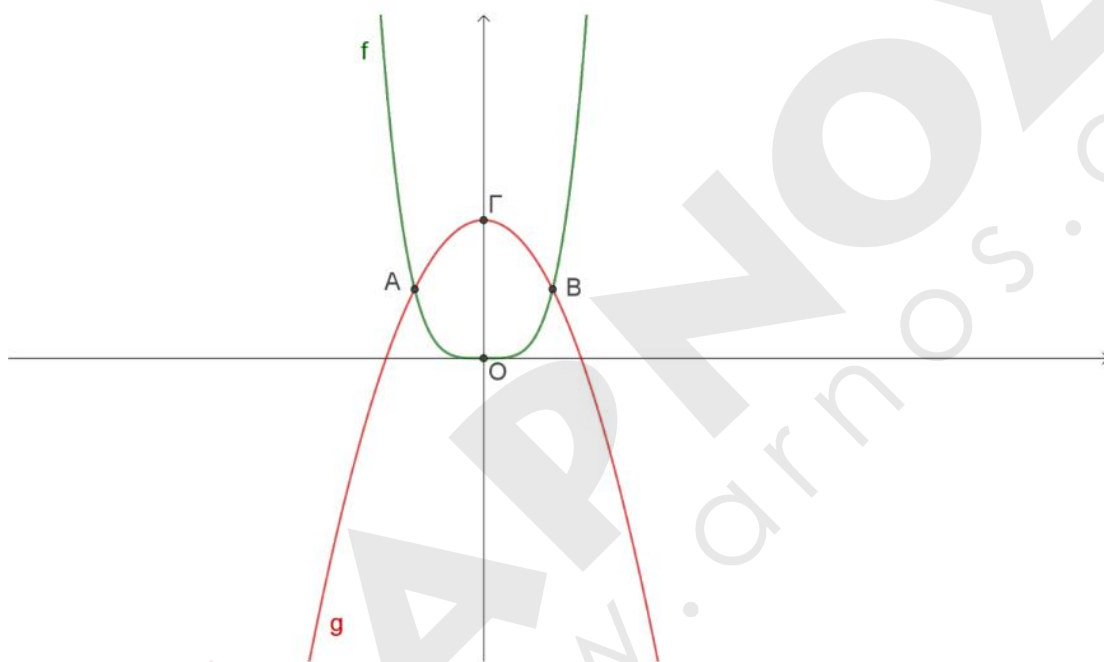
$$\text{και για } x = 2 \text{ έχουμε } f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 4 - 12 + 8 = 0.$$

Τελικά τα ζητούμενα κοινά σημεία είναι $B(-2, 24)$ και $\Gamma(2, 0)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

50. Θέμα 14307

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4$ και $g(x) = 2 - x^2$. Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ.

(Μονάδες 9)

Αν $A(-1, 1)$, $B(1, 1)$, $\Gamma(0, 2)$

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

(Μονάδες 6)

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα β).

(Μονάδες 10)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων A,B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0. \text{ Θέτουμε } x^2 = \omega$$

και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$ που έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$.

Για $\omega = -2$ έχουμε $x^2 = -2$ που είναι αδύνατη.

Για $\omega = 1$ έχουμε $x^2 = 1$ οπότε $x = 1$ ή $x = -1$.

Επειδή το σημείο A βρίσκεται πιο αριστερά από το B, το σημείο A θα έχει μικρότερη τετμημένη, οπότε η τετμημένη του σημείου A είναι -1 και η τετμημένη του σημείου B είναι 1.

Για $x = -1$ είναι $f(-1) = 1$ οπότε A(-1,1).

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$ οπότε B(1,1).

Αφού Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα y'y, το σημείο Γ θα έχει τετμημένη 0 και τεταγμένη $g(0) = 2$, οπότε Γ(0,2).

β) Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των τετμημένων των σημείων A,B δηλαδή για $x \in (-1,1)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , για τις τιμές του x που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^4 < 2 - x^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 < 0$. Θέτουμε $x^2 = \omega$ και η ανίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 < 0$. Το τριώνυμο $\omega^2 + \omega - 2$ έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$ και $\alpha = 1 > 0$ οπότε γίνεται αρνητικό για τις τιμές του ω που είναι μεταξύ των ριζών του, δηλαδή για $-2 < \omega < 1$ και άρα $-2 < x^2 < 1$. Όμως η ανίσωση $-2 < x^2$ αληθεύει για κάθε πραγματική τιμή του x , οπότε πρέπει και αρκεί $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$ που επαληθεύει την απάντηση στο β) ερώτημα.

51. Θέμα 14459

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ και η ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι αν $0 < \alpha < 1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)| \leq \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 10)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $x^2 + 1$, οπότε $\frac{1}{x^2 + 1} > 0$, δηλαδή $f(x) > 0$, η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει δυο λύσεις και να τις προσδιορίσουμε.

Είναι:

$$f(x) = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} = \alpha \stackrel{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + 1 = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{\alpha} - 1, \quad (1)$$

και επειδή $0 < \alpha < 1$, έχουμε $\frac{1}{\alpha} > 1$ οπότε $\frac{1}{\alpha} - 1 > 0$.

Επομένως η (1) έχει δυο (αντίθετες) λύσεις τις $x_1 = \sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}$ και $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}$ που είναι και οι τετμημένες των κοινών σημείων τους.

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2}, \text{ ή αρκεί, } \frac{|x|}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}, \text{ ή αρκεί, } 2|x| \leq x^2 + 1$$

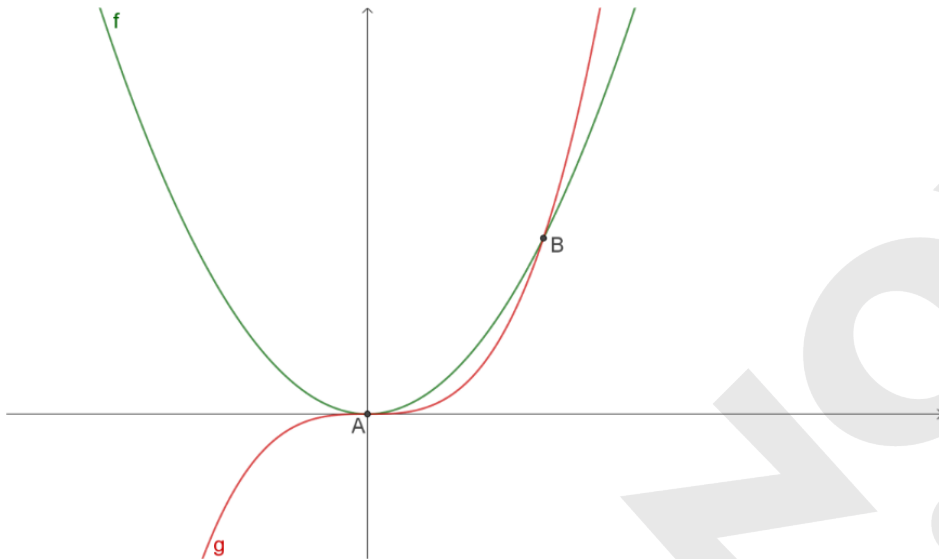
που ισχύει, αφού από την προφανή ανισότητα $(|x| - 1)^2 \geq 0$ και την ισότητα $|x|^2 = x^2$ έπεται ότι $x^2 + 1 \geq 2|x|$.

Έξυπνα & Εύκολα!

52. Θέμα 14665 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$ που τέμνονται στα σημεία A, B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B.

(Μονάδες 8)

Έστω $A(0,0), B(1,1)$.

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει ότι $x^3 < x^2$.

(Μονάδες 6)

γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

δ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3,1415\dots$ να δείξετε ότι

i. $(\pi - 3)^3 < (\pi - 3)^2$.

(Μονάδες 3)

ii. $\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$.

(Μονάδες 3)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων A,B είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$

ισοδύναμα $x^2 = x^3$, δηλαδή $x^2 - x^3 = 0$, οπότε $x^2(1-x) = 0$ και άρα $x=0$ ή $x=1$.

Για $x=0$ είναι $f(0)=0$ οπότε A(0,0).

Για $x=1$ είναι $f(1)=1$ οπότε B(1,1).

β) Από το σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x \in (0,1)$, δηλαδή για τις τετμημένες των σημείων μεταξύ των A και B, η γραφική παράσταση της g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της f , πράγμα που σημαίνει ότι $x^3 < x^2$.

Εναλλακτικά για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $x^2 > 0$ και $0 < x < 1$ οπότε $x \cdot x^2 < 1 \cdot x^2$ δηλαδή $x^3 < x^2$.

γ) Με βάση τα παραπάνω για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $x^3 < x^2$, π.χ. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$ αφού

ισοδύναμα $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$. Συνεπώς δεν είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του.

δ)

i. Αφού $3 < \pi < 4$ είναι $3-3 < \pi-3 < 4-3$ δηλαδή $0 < \pi-3 < 1$ οπότε με βάση το

β) ερώτημα είναι $(\pi-3)^3 < (\pi-3)^2$.

ii. Είναι

$$(\pi-3)^3 < (\pi-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\pi^3 - 9\pi^2 + 27\pi - 27 < \pi^2 - 6\pi + 9 \Leftrightarrow$$

$$\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$$

Έξυπνα & Εύκολα!

53. Θέμα 14745 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$. Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.

α) Να λύσετε την ανίσωση $-2 \leq g(x) \leq 0$.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)| \leq 2$.

(Μονάδες 7)

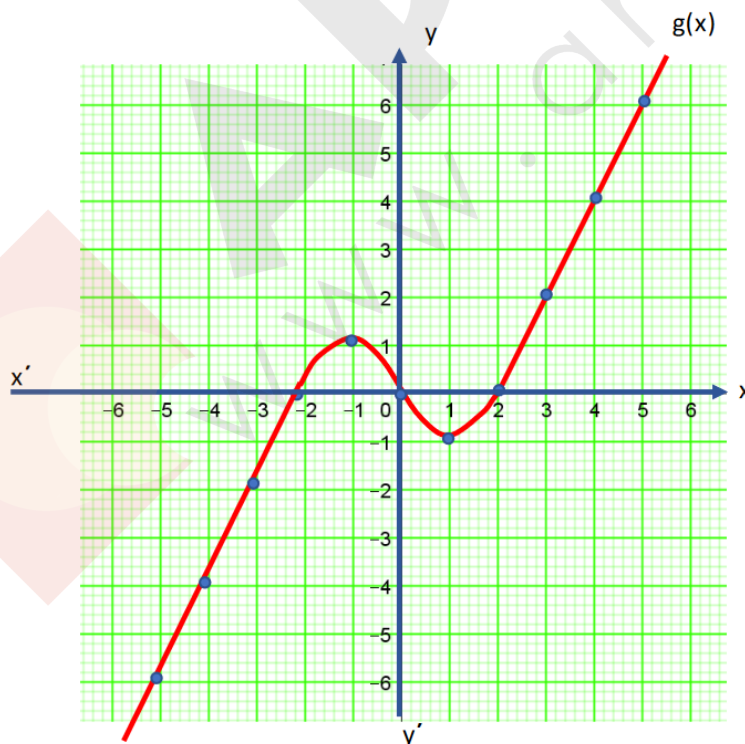
γ)

i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων $g(x) = \frac{4}{5}$ και $g(x) = -1$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k .

(Μονάδες 6)



Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Ζητάμε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης των οποίων οι τεταγμένες $g(x)$ κυμαίνονται από -2 έως μηδέν. Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει για $x \in [-3, -2] \cup [0, 2]$.

β) Καθώς $|g(x)| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq g(x) \leq 2$, ζητάμε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης των οποίων οι τεταγμένες $g(x)$ κυμαίνονται από -2 έως 2 . Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει για $x \in [-3, 3]$.

γ)

i. Ελέγχουμε πόσα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τεταγμένη $\frac{4}{5}$ και διαπιστώνουμε ότι αυτά είναι 3. Βοηθητικά, σχεδιάζουμε την ευθεία με εξίσωση $y = \frac{4}{5}$, της οποίας όλα τα σημεία έχουν τεταγμένη $\frac{4}{5}$ (αυτή η ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$) και παρατηρούμε ότι έχει 3 κοινά σημεία με την γραφική παράσταση.

Ανάλογα, η εξίσωση $g(x) = -1$ έχει 2 λύσεις.

ii. Το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k , ταυτίζεται με το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας $y = k$ (παράλληλη προς τον άξονα $x'x$) με την γραφική παράσταση. Αποτυπώνουμε τα αποτελέσματα στον παρακάτω πίνακα.

Τιμές του k	Πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$
$k < -1$ ή $k > 1$	1
$k = -1$ ή $k = 1$	2
$-1 < k < 1$	3

Έξυπνα & Εύκολα!

54. Θέμα 14760 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}} \right]^3 \cdot (x^2 - 16)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει και αρκεί: $x^2 - x - 12 > 0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ είναι: $\Delta = 1 + 48 = 49$

και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x_1 = -3 \text{ και } x_2 = 4.$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$	
$x^2 - x - 12$	+	0	-	0	+

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $A_g = (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$.

β) Είναι:

$$g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - x - 12}} \right]^3 \cdot (x^2 - 16) = \frac{1}{x^2 - x - 12} \cdot (x^2 - 16) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - x - 12} = \frac{(x-4) \cdot (x+4)}{(x+3) \cdot (x-4)} = \frac{x+4}{x+3} \quad \text{για}$$

κάθε x στο πεδίο ορισμού της A_g .

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g και του άξονα $x'x$.

Έχουμε:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$ είναι $A(-4,0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $y'y$, πρέπει να θέσουμε στον τύπο της g όπου $x = 0$. Αυτό όμως δε μπορεί να συμβεί γιατί το $x = 0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

Άρα δεν υπάρχει σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $y'y$.

55. Θέμα 14810

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 10$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, $\alpha < \beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{2\alpha + 3\beta}{5} < \beta$

(Μονάδες 6)

ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 = \frac{2\alpha + 3\beta}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η C_f διέρχεται από το σημείο $(0, 10)$, οπότε ισχύει: $f(0) = 10$. Άρα $\kappa = 10$.

β) Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) < 0$. Το τριώνυμο $x^2 - 7x + 10$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 5. Επιπλέον ο συντελεστής του όρου x^2 είναι ίσος με τη μονάδα, οπότε το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$		
$x^2 - 7x + 10$		+	0	-	0	+

Η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ για όλες τις τιμές του x που περιέχονται στο διάστημα $(2, 5)$.

γ) Τα σημεία A, B της C_f βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$, οπότε ισχύει $2 < \alpha < \beta < 5$.

i. Για την απόδειξη της ζητούμενης ανισότητας, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$5\alpha < 2\alpha + 3\beta \quad \text{και} \quad 2\alpha + 3\beta < 5\beta$$

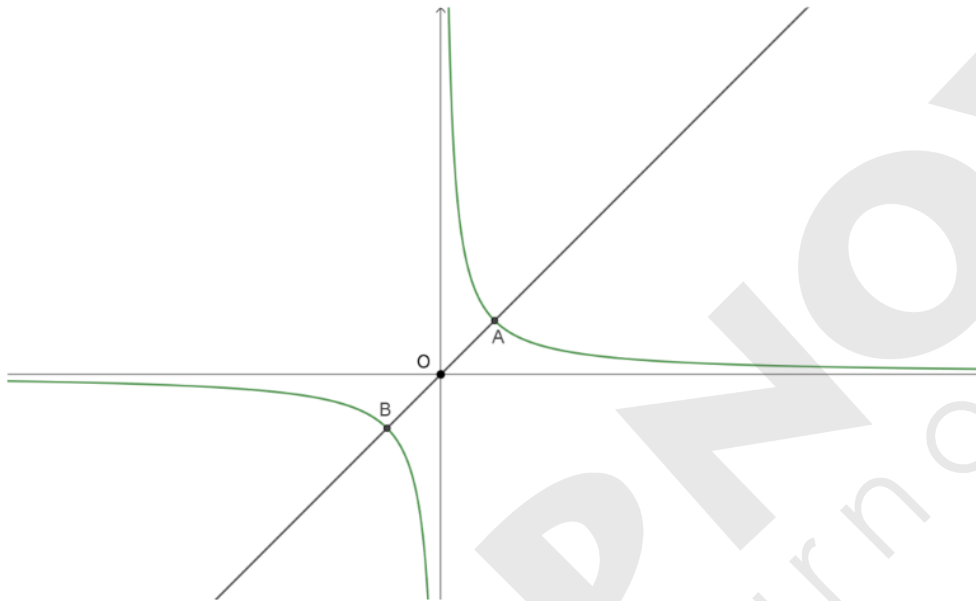
Η πρώτη γράφεται $3\alpha < 3\beta$ και ισχύει, αφού $\alpha < \beta$ και η δεύτερη γράφεται $2\alpha < 2\beta$ και επίσης ισχύει για τον ίδιο λόγο.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $2 < \alpha < x_0 < \beta < 5$, οπότε ο αριθμός x_0 περιέχεται ανάμεσα στις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 7x + 10$. Επομένως, $f(x_0) < 0$, οπότε το σημείο της C_f με τετμημένη x_0 βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Έξυπνα & Εύκολα!

56. Θέμα 14925 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ και η ευθεία AB με εξίσωση $y = x$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A, B και να δείξετε ότι το $O(0,0)$ είναι το μέσο του AB .

(Μονάδες 9)

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της f .

β) Να δείξετε ότι και το συμμετρικό M' του M ως προς το $O(0,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

γ) Αν $A(1,1), B(-1,-1), M'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(AB) \leq (MM')$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ και να εξετάσετε πότε $(AB) = (MM')$.

(Μονάδες 8)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής της ευθείας $y = x$ με τη γραφική παράσταση της

$f(x) = \frac{1}{x}$, οπότε οι τετμημένες των A, B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Όμως από το σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο B είναι στο 3ο τεταρτημόριο οπότε έχει αρνητική τετμημένη και το σημείο A στο 1ο οπότε έχει θετική τετμημένη. Συνεπώς $A(1, f(1))$ δηλαδή $A(1, 1)$ και $B(-1, f(-1))$ δηλαδή $B(-1, -1)$.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία A, B έχουν αντίθετες συντεταγμένες οπότε είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $O(0, 0)$, δηλαδή το $O(0, 0)$ είναι το μέσο του AB .

β) Αφού $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της f , είναι $x \neq 0$ και $f(x) = y$

δηλαδή $y = \frac{1}{x}$ (1).

Το συμμετρικό του M ως προς το $O(0, 0)$ είναι το $M'(-x, -y)$ και για να ανήκει στη γραφική

παράσταση της f , πρέπει και αρκεί $f(-x) = -y$ ισοδύναμα $-y = -\frac{1}{x}$ ισοδύναμα $y = \frac{1}{x}$

που ισχύει από την (1).

Σημείωση : Αυτό γραφικά σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας το O .

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Ισοδύναμα έχουμε

$$\begin{aligned}(AB) &\leq (MM') \Leftrightarrow \\ \sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2} &\leq \sqrt{(x+x)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)^2} \Leftrightarrow \\ \sqrt{8} &\leq \sqrt{4x^2 + \frac{4}{x^2}} \Leftrightarrow \\ 8 &\leq 4x^2 + \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow \\ 2 &\leq x^2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \\ 0 &\leq x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Leftrightarrow \\ 0 &\leq \left(x - \frac{1}{x}\right)^2\end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $x \neq 0$.

$$\text{Τέλος, } (AB) = (MM') \Leftrightarrow 0 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

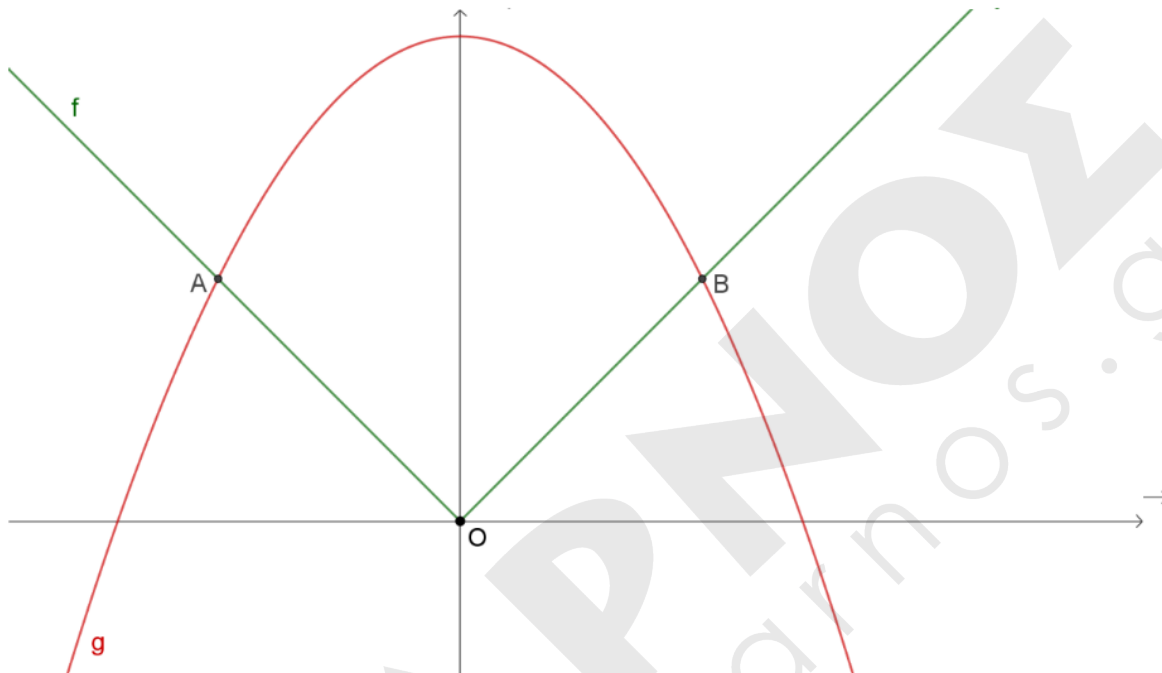
που σημαίνει ότι ισχύει όταν τα σημεία M, M' ταυτίζονται με τα σημεία A, B .

Σημείωση: αυτό σημαίνει ότι η απόσταση AB είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων της υπερβολής που είναι συμμετρικά ως προς το $(0,0)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

57. Θέμα 14926 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=|x|$ και $g(x)=2-x^2$. Τα A,B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g .



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

(Μονάδες 10)

β) Αν $A(-1,1)$ και $B(1,1)$,

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι : $f(x) < g(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi).

(Μονάδες 9)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των σημείων A, B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x| = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| - 2 = 0.$$

Θέτουμε $|x| = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$ που έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$.

Για $\omega = -2$ έχουμε $|x| = -2$ που είναι αδύνατη.

Για $\omega = 1$ έχουμε $|x| = 1$ οπότε $x = 1$ ή $x = -1$.

Επειδή το σημείο A βρίσκεται πιο αριστερά από το B , το σημείο A θα έχει μικρότερη τετμημένη, οπότε η τετμημένη του σημείου A είναι -1 και η τετμημένη του σημείου B είναι 1 .

Για $x = -1$ είναι $f(-1) = 1$ οπότε $A(-1, 1)$.

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$ οπότε $B(1, 1)$.

β)

i. Η ανίσωση $f(x) < g(x)$ αληθεύει για τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g . Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των τετμημένων των σημείων A, B δηλαδή για $x \in (-1, 1)$.

ii. Έχουμε ισοδύναμα: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x| < 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + |x| - 2 < 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| - 2 < 0$.

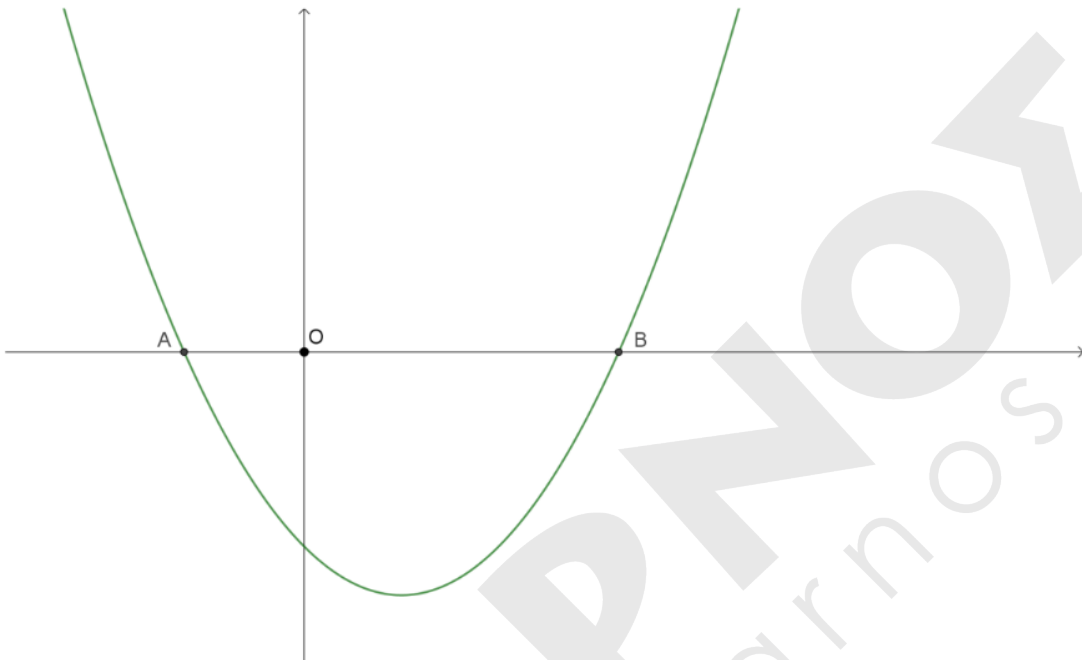
Θέτουμε $|x| = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 < 0$. Το τριώνυμο $\omega^2 + \omega - 2$ έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$ και γίνεται αρνητικό για τις τιμές του ω που είναι μεταξύ των ριζών του, δηλαδή για $-2 < \omega < 1$, δηλαδή $-2 < |x| < 1$.

Όμως η ανίσωση $-2 < |x|$ ισχύει για κάθε πραγματική τιμή του x , οπότε πρέπει και αρκεί $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$ που επαληθεύει την απάντηση στο βι) ερώτημα.

Έξυπνα & Εύκολα!

58. Θέμα 14961 Αρχέτυπο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 1$.



Αν $A(\omega, 0)$, $B(\phi, 0)$

α) Να δείξετε ότι :

i. $\omega + \phi = 1$.

(Μονάδες 4)

ii. $\omega \cdot \phi = -1$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(OB) > (OA)$.

(Μονάδες 6)

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι $\beta > \phi$.

(Μονάδες 6)

δ) Να δείξετε ότι $\phi < \frac{5}{3}$.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(\omega, 0)$, $B(\phi, 0)$, οπότε ω, ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $\omega < 0 < \phi$ αφού το σημείο $O(0, 0)$ είναι μεταξύ των A και B στον άξονα $x'x$.

Η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 5$ και ρίζες τους αριθμούς $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Επειδή $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ έχουμε ότι $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\omega = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

i. Αφού ω, ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ δηλαδή της $x^2 - x - 1 = 0$

έχουμε ότι $\omega + \phi = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1$.

ii. Αφού ω, ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ δηλαδή της $x^2 - x - 1 = 0$

έχουμε ότι $\omega \cdot \phi = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Είναι $(OB) = |\phi| = \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $(OA) = |\omega| = \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Επειδή $\frac{\sqrt{5}+1}{2} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ συμπεραίνουμε ότι $(OB) > (OA)$.

Εναλλακτικά, είναι $(OB) = |\phi| = \phi$ αφού $\phi > 0$ και $(OA) = |\omega| = -\omega$ αφού $\omega < 0$.

Είναι $(OB) > (OA) \Leftrightarrow \phi > -\omega \Leftrightarrow \phi + \omega > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$ που ισχύει.

γ) Αφού ο β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, έχουμε ότι $\beta - \frac{1}{\beta} > 1$ και εφόσον $\beta > 0$ έχουμε ισοδύναμα $\beta^2 - 1 > \beta \Leftrightarrow \beta^2 - \beta - 1 > 0$. Το τριώνυμο $x^2 - x - 1$ έχει ρίζες ω, ϕ και γίνεται θετικό, δηλαδή ομόσημο του $\alpha = 1$, για $x < \omega$ ή $x > \phi$. Συνεπώς $\beta < \omega$ ή $\beta > \phi$. Όμως $\beta > 0$, οπότε $\beta > \phi$.

Εναλλακτικά, $\beta^2 - \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow f(\beta) > 0$. Από τη γραφική παράσταση της f βλέπουμε ότι τα σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν θετική τεταγμένη, δηλαδή είναι πάνω από τον άξονα xx' , είναι αυτά που είναι δεξιά του Β ή αριστερά του Α. Συνεπώς $\beta < \omega$ ή $\beta > \phi$. Όμως $\beta > 0$, οπότε $\beta > \phi$.

δ) Είναι $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{25}{9} - \frac{5}{3} - 1 = \frac{1}{9} > 0$ και επειδή $\frac{5}{3} > 0$ έχουμε ότι $\phi < \frac{5}{3}$.

Εναλλακτικά, $\frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{16}{15} > 1$, οπότε με βάση το γ) έχουμε ότι $\phi < \frac{5}{3}$.

Έξυπνα & Εύκολα!