Κεφ. 6.1. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 2 – Κωδικοί:

1244, 1255, 1263, 1283, 1295, 1297, 1354, 1385, 12765, 12908, 12997, 13026, 13031, 13032, 14681, 14728, 14781

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. **Θέμα 1244**

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x<0\\ x-1, & x\geq 0\end{cases}$

α) Να δείξετε ότι *f(-1)= f(3)* (Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε: *f(x)=0* (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 4 = -2 + 4 = 2 \text{ και}$$
$$f(3) = 3 - 1 = 2$$

Άρα $f(-1) = f(3)$.

β) • Για $x < 0$ είναι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$$

• Για $x \geq 0$ είναι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

2. Θέμα 1255 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - x - 6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - x - 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

Πρέπει:

$$x^2 - x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq -2 \text{ και } x \neq 3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$.

β) Είναι:

$$f(2) = \frac{2+2}{2^2-2-6} = \frac{4}{4-2-6} = \frac{4}{-4} = -1 \text{ και}$$

$$f(4) = \frac{4+2}{4^2-4-6} = \frac{6}{16-4-6} = \frac{6}{6} = 1$$

Άρα:

$$f(2) + f(4) = -1 + 1 = 0$$

3. **Θέμα 1263**

Η απόσταση *y (σε χιλιόμετρα)* ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από *x λεπτά*, δίνεται από τη σχέση: $y=35+0,8x$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

(Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε την απόσταση του αυτοκινήτου μετά από 25 λεπτά θέτουμε στη δοθείσα σχέση $x = 25$ και βρίσκουμε:

$$y = 35 + 0,8 \cdot 25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = 35 + 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = 55 \text{ χιλιόμετρα}$$

β) Για να βρούμε τα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α θέτουμε στη δοθείσα σχέση $y = 75$ και βρίσκουμε:

$$75 = 35 + 0,8x \Leftrightarrow 40 = 0,8x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 50 \text{ λεπτά}$$

4. **Θέμα 1283** **Αρχέτυπο**

Δίνεται η συνάρτηση *f*, με $f(x) = \begin{cases} 8 - x & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 5 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f(-5) = 8 - (-5) = 8 + 5 = 13 \text{ και}$$
$$f(4) = 2 \cdot 4 + 5 = 8 + 5 = 13$$

Άρα $f(-5) = f(4)$.

β) • Για $x < 0$ είναι:

$$f(x) = 9 \Leftrightarrow 8 - x = 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow x = -1$$

• Για $x \geq 0$ είναι:

$$f(x) = 9 \Leftrightarrow 2x + 5 = 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

5. Θέμα 1295 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 - 16x}{x - 4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *f* και να αποδείξετε ότι, για τα *x* που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x) = x^2 + 4x$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του *x* για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$$x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$$

Άρα το πεδίο ορισμού της *f* είναι το $A = \mathbb{R} - \{4\}$.

Ο τύπος της *f* μετά τις σχετικές παραγοντοποιήσεις και απλοποιήσεις γράφεται:

$$f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4} = \frac{x(x^2 - 16)}{x - 4} = \frac{x(x-4)(x+4)}{x - 4} = x(x + 4) = x^2 + 4x$$

β) Είναι:

$$f(x) = 32 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 32 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 32 = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 + 4x - 32$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 4$, $\gamma = -32$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 16 + 128 = 144 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 12}{2} = \begin{cases} \frac{-4+12}{2} = 4 \\ \frac{-4-12}{2} = -8 \end{cases}$$

Επειδή η f ορίζεται στο $A = R - \{4\}$ δεκτή είναι μόνο η τιμή $x = -8$.

6. Θέμα 1297

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$
- $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$
- $f(2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Τότε:

$$A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2) =$$
$$= \frac{5}{2} + 2 - \frac{3}{2} =$$
$$= \frac{2}{2} + 2 = 1 + 2 = 3$$

β) Ισχύει ότι:

$$f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2(x^2+1) = 5x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 2$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = 2 \\ \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

7. Θέμα 1354 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση *f*, με $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της *A*. (Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει : $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x \in R$ με:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 \neq 0 \ \text{ και } \ x + 1 \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \neq 1 \ \text{ και } \ x \neq -1)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R - \{-1, 1\}$.

β) Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{5-1}{4} = 1 \end{cases}$$

Τότε:

$$2x^2 - 5x + 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$$

γ) Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} = \frac{(2x-3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x-3}{x+1}, \ (x \neq 1 \ \text{ και } \ x \neq -1)$$

8. Θέμα 1385

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$. (Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. (Μονάδες 5)

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Τότε:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

β) i) Πρέπει:

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 2 \neq 0 \;\text{ και }\; x - 3 \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \neq 2 \;\text{ και }\; x \neq 3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{2, 3\}$.

ii) Ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$$

9. Θέμα 12765 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$, είναι αυτό δυνατό.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει:

$$x-2\geq 0.$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A=[2,+\infty)$.

β) Από τους αριθμούς : $-1,\frac{\sqrt{2}}{2},6$, ισχύει ότι $6\in A$, οπότε είναι δυνατό να υπολογιστεί η τιμή της συνάρτησης

$f(6)=\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2$.

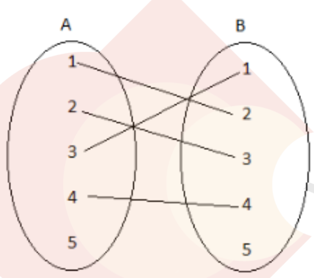
Όμως, $-1<2$, άρα -1 δεν ανήκει στο A.

Ακόμα $\frac{\sqrt{2}}{2}<2$, διότι ισοδύναμα $\sqrt{2}<4$.

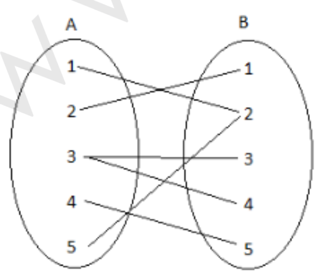
Συνεπώς για τους αριθμούς -1 και $\frac{\sqrt{2}}{2}$ η συνάρτηση f δεν ορίζεται.

10. Θέμα 12908 **Αρχέτυπο**

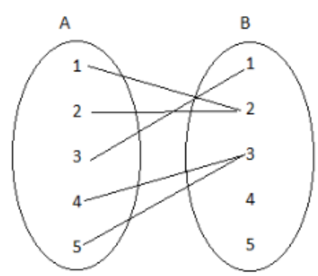
Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το Α στο Β ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β.

(Μονάδες 9)

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

(Μονάδες 4)

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών f(A) της συνάρτησης f.

(Μονάδες 4)

iii. Να βρείτε τις τιμές f(1) και f(2).

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η αντιστοίχιση του Σχήματος 1 δεν παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β διότι το 5 του συνόλου Α δεν αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο του Β.

Η αντιστοίχιση του Σχήματος 2 δεν παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β διότι το 3 του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του συνόλου Β.

Η αντιστοίχιση του Σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β διότι κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

β)

i. Το πεδίο ορισμού είναι το $\mathrm{A}=\{1,2,3,4,5\}$.

ii. Το σύνολο τιμών είναι το $f(\mathrm{A})=\{1,2,3\}$.

iii. Είναι $f(1)=f(2)=2$.

11. Θέμα 12997 Αρχέτυπο

Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α΄ λυκείου ενός Γενικού Λυκείου.

Σχηματίζουμε τα σύνολα Α, με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α΄ τάξης ενός Γενικού Λυκείου και Β με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α΄ τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου.

Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f: A \to B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g: B \to A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \to B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β.

β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g: B \to A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο Β στο σύνολο Α και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Η αντιστοίχιση $f: A \to B$ δεν αποτελεί πάντα συνάρτηση από το σύνολο Α στο Β, καθώς μπορεί να υπάρχουν μαθητές με το ίδιο όνομα και διαφορετικό επώνυμο. Δηλαδή να αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο του συνόλου Α σε περισσότερα από ένα στοιχεία του συνόλου Β.

β) Η αντιστοίχιση από το σύνολο Β στο σύνολο Α θα αποτελεί συνάρτηση, αν κάθε επώνυμο στο σύνολο Β αντιστοιχίζεται σε μοναδικό όνομα στο σύνολο Α, δηλαδή δεν υπάρχουν μαθητές με ίδιο επώνυμο. Σε αυτήν την περίπτωση η ανεξάρτητη μεταβλητή θα είναι το επώνυμο του μαθητή και η εξαρτημένη μεταβλητή θα είναι το όνομά του.

12. Θέμα 13026 Αρχέτυπο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & αν \;\; x \;\; άρρητος \\ 2x, & αν \;\; x \;\; ρητός \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$

(Μονάδες 10)

β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2 = 4x - 1$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

β) Αν x ρητός, τότε $f(x) = 2x$, οπότε η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$(2x)^2 = 4x - 1$, δηλαδή $4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0$. Έτσι, $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

13. Θέμα 13031

Δίνεται η συνάρτηση G, με $G(x) = \dfrac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για $x = 2$, $\quad x = 0$, $\quad x = -\dfrac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G, στο 3.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $G(2)=\dfrac{2\cdot 2+3}{2-4}=\dfrac{4+3}{-2}=-\dfrac{7}{2}$,

$$G(0)=\dfrac{2\cdot 0+3}{0-4}=-\dfrac{3}{4},$$

$$G(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+3}{-\dfrac{1}{2}-4}=\dfrac{-1+3}{-\dfrac{9}{2}}=\dfrac{2}{-\dfrac{9}{2}}=-\dfrac{4}{9}.$$

β) Η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x=4$, διότι η τιμή αυτή του x μηδενίζει τον παρονομαστή του κλάσματος στον τύπο της συνάρτησης.

γ) Αναζητούμε την τιμή του $x\neq 4$ για την οποία:

$$G(x)=3 \Leftrightarrow$$
$$\dfrac{2x+3}{x-4}=3 \Leftrightarrow$$
$$2x+3=3(x-4) \Leftrightarrow$$
$$2x+3=3x-12 \Leftrightarrow$$
$$x=15.$$

14. Θέμα 13032 Αρχέτυπο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1-3x$ και $g(x)=\sqrt{x+5}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $f(-1)=g(11)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x)=g(4)$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A_f = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση g ορίζεται όταν $x+5 \geq 0$, δηλαδή όταν $x \geq -5$. Οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $A_g = [-5,+\infty)$.

β) $f(-1) = 1-3\cdot(-1) = 1+3 = 4$ και $g(11) = \sqrt{11+5} = \sqrt{16} = 4$.

Άρα $f(-1) = g(11)$.

γ) Αναζητούμε την τιμή του x για την οποία:

$$\begin{aligned} f(x) = g(4) \quad &\Leftrightarrow \\ 1-3x = \sqrt{4+5} \quad &\Leftrightarrow \\ 1-3x = 3 \quad &\Leftrightarrow \\ x = -\frac{2}{3} & \end{aligned}$$

15. Θέμα 14681

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x<0 \\ 2x+2, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $3 > 0$, είναι: $f(3) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$.

Αφού $-3 < 0$, είναι $f(-3) = (-3)^2 - 1 = 8$.

β) Για $x < 0$ είναι $f(x) = x^2 - 1$.

Άρα $f(x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$. Δεκτή τιμή $x = -3 < 0$.

Για $x > 0$ είναι $f(x) = 2x + 2$.

Άρα $f(x) = 8 \Leftrightarrow 2x + 2 = 8 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$. Δεκτή τιμή αφού $x = 3 > 0$.

Επομένως η $f(x) = 8$ ισχύει για $x = -3$ και $x = 3$.

16. Θέμα 14728 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

(Μονάδες 12)

β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $-1 < 0$, άρα: $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$.

Είναι: $1 > 0$, άρα: $f(1) = 1^2 + 1 = 2$.

β) Αφού $x \geq 0$ τότε: $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$.

Επομένως: $x \leq -1$ ή $x \geq 1$ και $x \geq 0$.

Άρα $x \geq 1$.

17. Θέμα 14781 Αρχέτυπο

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \to y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2,-1,0,\frac{1}{2},1$ και 3.

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \to y$ είναι συνάρτηση.

ii. Είναι η αντιστοίχιση $y \to x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \to y$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Η αντιστοίχιση $x \to y$ είναι συνάρτηση γιατί κάθε τιμή του x αντιστοιχεί σε μια μόνο τιμή του y. Η αντιστοίχιση $y \to x$ δεν είναι συνάρτηση, γιατί $0 \to -2$ και $0 \to 3$, δηλαδή μια τιμή του y αντιστοιχεί σε δυο τιμές του x.

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=\left\{-2,-1,0,\frac{1}{2},1,3\right\}$ και το σύνολο τιμών το $B=\left\{-6,-4,0,-\frac{25}{4}\right\}$.

Θέμα 4 – Κωδικοί:

1422, 1454, 1467, 1479, 1495, 1501, 1506, 1510, 1513, 12911, 14562, 14629, 14702

18. Θέμα 1422 Αρχέτυπο

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: *Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^0C) σε βαθμούς Φαρενάιτ (^0F), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.*

Π2: *Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^0C) σε βαθμούς Κέλβιν (^0K), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (^0C) το 273.*

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (^0K) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (^0F) είναι η:

$$K = \frac{F-32}{1{,}8} + 273$$

(Μονάδες 7)

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από $278\ ^0K$ μέχρι $283\ ^0K$. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ^0F.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η πρόταση Π1 εκφράζεται συμβολικά με τη σχέση:

$$F = 1{,}8C + 32 \quad (1)$$

Η πρόταση Π2 εκφράζεται συμβολικά με τη σχέση:

$$K = C + 273 \quad (2)$$

β) Η ισότητα (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$F = 1{,}8C + 32 \Leftrightarrow F - 32 = 1{,}8C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{F-32}{1{,}8} \quad (3)$$

Τότε η ισότητα (2) ισοδύναμα γράφεται:

$$K = C + 273 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} K = \frac{F-32}{1{,}8} + 273 \quad (4)$$

γ) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$278 \leq K \leq 283 \overset{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 278 \leq \frac{F-32}{1{,}8} + 273 \leq 283 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 278 - 273 \leq \frac{F-32}{1{,}8} + 273 - 273 \leq 283 - 273 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq \frac{F-32}{1{,}8} \leq 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot 1{,}8 \leq \frac{F-32}{1{,}8} \cdot 1{,}8 \leq 10 \cdot 1{,}8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 \leq F - 32 \leq 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 + 32 \leq F - 32 + 32 \leq 18 + 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41 \leq F \leq 50$$

19. Θέμα 1454 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{\alpha}{4}}$

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού *α,* ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *f* να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης *f* διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι α=1 και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας. (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το R αν και μόνο αν:

$$x^2-x+\frac{\alpha}{4}\geq 0,\ \text{για κάθε } x\in R$$

Ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha=1>0$ οπότε το τριώνυμο είναι μη αρνητικό αν και μόνο αν:

$$\Delta\leq 0 \Leftrightarrow (-1)^2-4\cdot 1\cdot\frac{\alpha}{4}\Leftrightarrow 1-\alpha\leq 0\Leftrightarrow \alpha\geq 1$$

β) i) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ αν και μόνο αν:

$$f(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{0^2-0+\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{\alpha}{4}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\alpha=1$$

ii) Για α = 1 ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=\sqrt{x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2}=\left|x-\frac{1}{2}\right|$$

Τότε:

$$f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow|x-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{ ή } x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2})\Leftrightarrow(x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{ ή } x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=1\ \text{ ή }\ x=0)$$

20. Θέμα 1467 **Αρχέτυπο**

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}12+0{,}5x & \text{αν } 0\le x\le 30\\ 0{,}7x+6 & \text{αν } x>30\end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό. (Μονάδες 2)

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 3)

ii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x)=12+0{,}6x,\ \text{για } x\ge 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) **i)** Αν κάποιος λείπει από το σπίτι του έχει κατανάλωση $x = 0$ κυβικά νερού. Επειδή $0 \in [0, 30]$ θα αντικαταστήσουμε στον τύπο $12 + 0{,}5x$ και το ποσό που θα πληρώσει είναι:

$$f(0) = 12 + 0{,}5 \cdot 0 = 12 \text{ ευρώ}$$

ii) Επειδή $10 \in [0, 30]$ θα αντικαταστήσουμε στον τύπο $12 + 0{,}5x$ και το ποσό που θα πληρώσει για κατανάλωση 10 κυβικών μέτρων νερού είναι:

$$f(10) = 12 + 0{,}5 \cdot 10 = 12 + 5 = 17 \text{ ευρώ}$$

iii) Επειδή $50 \in (30, +\infty)$ θα αντικαταστήσουμε στον τύπο $0{,}7x + 6$ και το ποσό που θα πληρώσει για κατανάλωση 50 κυβικών μέτρων νερού είναι:

$$f(50) = 0{,}7 \cdot 50 + 6 = 35 + 6 = 41 \text{ ευρώ}$$

β) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η περίπτωση

Ο κάτοικος της πόλης Α κατανάλωσε x κυβικά νερού με $x \in [0, 30]$. Επειδή ο κάτοικος της πόλης **Α** πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό, θα ισχύει:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 12 + 0{,}5x > 12 + 0{,}6x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12 - 12 > 0{,}7x - 0{,}6x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 > 0{,}1x \Leftrightarrow x < 0,$$

άτοπο διότι $x \in [0, 30]$.

Επομένως ο κάτοικος της πόλης Α δεν μπορεί να κατανάλωσε από έως και 30 κυβικά νερού.

2η περίπτωση

Ο κάτοικος της πόλης Α κατανάλωσε x κυβικά νερού με $x \in (30, +\infty)$. Επειδή ο κάτοικος της πόλης **Α** πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό, θα ισχύει:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 0{,}7x + 6 > 12 + 0{,}6x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}7x - 0{,}6x > 12 - 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}1x > 6 \Leftrightarrow x > 60$$

Επομένως, τόσο ο κάτοικος της πόλης Α όσο και της Β κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά νερού.

21. Θέμα 1479

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0{,}20x$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ; (Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ; (Μονάδες 5)

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο

$$y = 80 + 0{,}10x$$

όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

(Μονάδες 10)

δ) Αν $f(x) = 60 + 0{,}20 \cdot x$ και $g(x) = 80 + 0{,}10 \cdot x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ).

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Αντικαθιστούμε στον τύπο που δίνεται $x = 400$ και βρίσκουμε:

$$y = 60 + 0{,}20 \cdot 400 = 140 \text{ ευρώ}$$

β) Αντικαθιστούμε στον τύπο που δίνεται $y = 150$ και βρίσκουμε:

$$150 = 60 + 0{,}20 \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90 = 0{,}20x \Leftrightarrow x = 450 \text{ km}$$

γ) Η εταιρία Α χρεώνει λιγότερα από την εταιρία Β αν και μόνο αν:

$$60 + 0{,}20x < 80 + 0{,}10x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}20x - 0{,}10x < 80 - 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}10x < 20 \Leftrightarrow x < 200 \text{ km}$$

Συνεπώς η εταιρία Α χρεώνει λιγότερα από την Β αν ο πελάτης διανύσεις λιγότερα από 200 km. Με τον ίδιο συλλογισμό συμπεραίνουμε ότι η εταιρία Β χρεώνει λιγότερα από την Α αν ο πελάτης διανύσει περισσότερα από 200 km.

δ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = [0,+\infty)$ και η g το $B = [0,+\infty)$. Τα σημεία τομής τους προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y = f(x) \text{ και } y = g(x)$$

Είναι:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 60 + 0{,}20x = 80 + 0{,}10x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}20x - 0{,}10x = 80 - 60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}10x = 20 \Leftrightarrow x = 200$$

Για $x = 200$ είναι $f(200) = 60 + 0{,}20 \cdot 200 = 60 + 40 = 100$

Άρα το σημείο τομής είναι το $A(200, 100)$.

Το σημείο τομής εκφράζει ότι αν ο πελάτης διανύσει 200 km θα πληρώσει είτε στην εταιρία Α είτε στη Β το ποσό των 100 ευρώ.

22. Θέμα 1495 Αρχέτυπο

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη *x, y* τέτοια, ώστε: $x + y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του *x* δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x),\ x \in (0,\ 10).$$ (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \le \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0,\ 10)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του *x*∈*(0, 10)* το εμβαδόν *E(x)* γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ; (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

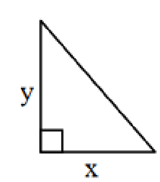
$$x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x \quad (1)$$

Πρέπει $x > 0$ και $y > 0$. Τότε:

$$y > 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 10 - x > 0 \Leftrightarrow x < 10$$

Άρα $0 < x < 10 \Leftrightarrow x \in (0,\ 10)$.

Το εμβαδόν ενός τριγώνου με μήκη πλευρών x και y υπολογίζεται από τον τύπο:



$$E(x) = \frac{1}{2}xy \overset{(1)}{\Leftrightarrow} E(x) = \frac{1}{2}x(10 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2),\ x \in (0,\ 10)$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$E(x) \le \frac{25}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(10x - x^2) \le \frac{25}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x - x^2 \le 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 \ge 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in (0,\ 10)$$

γ) Είναι:

$$E(x) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(10x - x^2) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x - x^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow$$

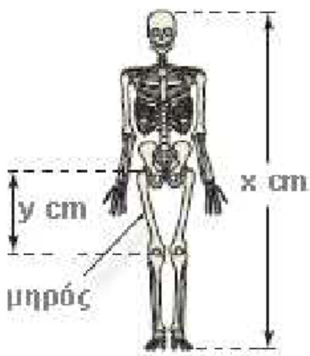
$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Επομένως για $x = 5$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

Για $x = 5$ η σχέση (1) δίνει: $y = 10 - 5 = 5$. Στην περίπτωση αυτή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

23. Θέμα 1501 Αρχέτυπο

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



Γυναίκα: $y = 0{,}43x - 26$

Άνδρας: $y = 0{,}45x - 31$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $38{,}5$cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. (Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $42{,}8$cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Αντικαθιστούμε στον τύπο y = 0,43x – 26 όπου y = 38,5 και βρίσκουμε:

$$38{,}5 = 0{,}43x - 26 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64{,}5 = 0{,}43x \Leftrightarrow x = 150$$

Άρα η γυναίκα έχει ύψος 150 cm.

β) Αν υποθέσουμε ότι το μηριαίο οστό με μήκος y = 42,8 cm ανήκει σε άνθρωπο με ύψος x = 164 cm, τότε θα πρέπει να επαληθεύεται η ισότητα y = 0,45x – 31.

Είναι:

$$42{,}8 = 0{,}45 \cdot 164 - 31 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 42{,}8 = 73{,}8 - 31 \Leftrightarrow 42{,}8 = 42{,}8, \text{ ισχύει}$$

γ) Ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους αν και μόνο αν:

$$0{,}43x - 26 = 0{,}45x - 31 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 31 - 26 = 0{,}45x - 0{,}43x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}02x = 5 \Leftrightarrow x = 250 \text{ cm}$$

Είναι φυσικώς αδύνατον ένας άνδρας και μια γυναίκα να έχουν ύψος 250 cm! Δεν μπορεί επομένως ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους

24. Θέμα 1506

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi=40cm$. Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε :

α) να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$. (Μονάδες 4)

β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:

$$E(x)=20x-x^2. \qquad \text{(Μονάδες 8)}$$

γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$. (Μονάδες 6)

δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $40cm$, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς $10cm$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι το πλάτος του παραλληλογράμμου είναι y cm. Τότε η περίμετρός του είναι:

$$\Pi = 2x + 2y$$

Είναι:

$$\Pi = 40 \Leftrightarrow 2x + 2y = 40 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + y = 20 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = 20 - x \quad (1)$$

Επειδή τα x, y είναι διαστάσεις πρέπει $x > 0$ και $y > 0$. Τότε:

$$y > 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 20 - x > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x > -20 \Leftrightarrow x < 20$$

Τελικά:

$$0 < x < 20$$

β) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι:

$$E = x \cdot y \overset{(1)}{\Leftrightarrow} E(x) = x(20 - x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E(x) = 20x - x^2, \;\; x \in (0, 20)$$

γ) Είναι:

$$E(x) \leq 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 \leq 100 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 10x + 10^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 10)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in (0, 20)$.

δ) Από το ερώτημα (γ) η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι 100 cm^2. Άρα:

$$E(x)=100 \Leftrightarrow 20x-x^2=100 \Leftrightarrow x^2-20x+100=0 \Leftrightarrow (x-10)^2=0 \Leftrightarrow x=10$$

και $y=20-10=10$. Άρα από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 40 cm το τετράγωνο με πλευρά 10 cm έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

25. Θέμα 1510 Αρχέτυπο

Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα.

Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των *6500* ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α).

Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι *15* ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε *25* ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος ***K(ν)*** της επιχείρησης, αν γεμίζει ***ν*** τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα ***E(ν)*** της επιχείρησης από την πώληση ***ν*** αριθμού τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i) να μην έχει ζημιά. (Μονάδες 7)

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον *500* ευρώ. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το μηνιαίο κόστος της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ είναι:

$$K(\nu) = 6500 + 15 \cdot \nu,\ \nu \in \mathbb{N}$$

β) Τα μηνιαία έσοδα της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ είναι:

$$E(\nu) = 25 \cdot \nu,\ \nu \in \mathbb{N}$$

γ)

i) Η επιχείρηση δεν έχει ζημία αν και μονό αν:

$$E(v) \geq K(v)\ 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25v \geq 6500 + 15v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10v \geq 6500 \Leftrightarrow v \geq 650$$

Επομένως η επιχείρηση πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 650 τόνερ το μήνα ώστε να μην έχει ζημιά.

ii) Το κέρδος της επιχείρησης προσδιορίζεται από τον τύπο:

$$P(v) = E(v) - K(v) =$$

$$= 25v - 6500 - 15v =$$

$= 10v - 6500$.

Η επιχείρηση έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ αν και μόνο αν:

$$P(v) \geq 500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10v - 6500 \geq 500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10v \geq 7000 \Leftrightarrow v \geq 700$$

Επομένως η επιχείρηση έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ αν πουλήσει τουλάχιστον 700 τόνερ.

26. Θέμα 1513 Αρχέτυπο

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x.

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2{,}999) \cdot f(-1{,}002)$$ (Μονάδες 7)

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού:

$$-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$$ (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $-x^2+2x+3$ έχει $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma=3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot(-1)\cdot 3=4+12=16>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot(-1)}=\frac{-2\pm4}{-2}=\begin{cases}\frac{-2+4}{-2}=-1\\ \frac{-2-4}{-2}=3\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+8$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$-x^2+2x+8>0 \Leftrightarrow -1<x<3 \Leftrightarrow x\in(-1,3)$$

$$-x^2+2x+8<0 \Leftrightarrow (x<-1 \text{ ή } x>3) \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$$

β) Ο αριθμός 2,999 ανήκει στο διάστημα $(-1,3)$ όπου το τριώνυμο είναι θετικό. Άρα:

$$f(2{,}999)>0$$

Ο αριθμός $-1{,}002$ ανήκει στο διάστημα $(-\infty,-1)$ όπου το τριώνυμο είναι αρνητικό. Άρα:

$$f(-1{,}002)<0$$

Επομένως είναι:

$$f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002)<0$$

γ) Ο αριθμός $-\alpha^2+2|\alpha|+3=-|\alpha|^2+2|\alpha|+3$ προκύπτει αν στον τύπο της f θέσουμε $x=|\alpha|$.

Είναι δηλαδή:

$$f(|\alpha|)=-|\alpha|^2+2|\alpha|+3=-\alpha^2+2|\alpha|+3$$

Επειδή είναι:

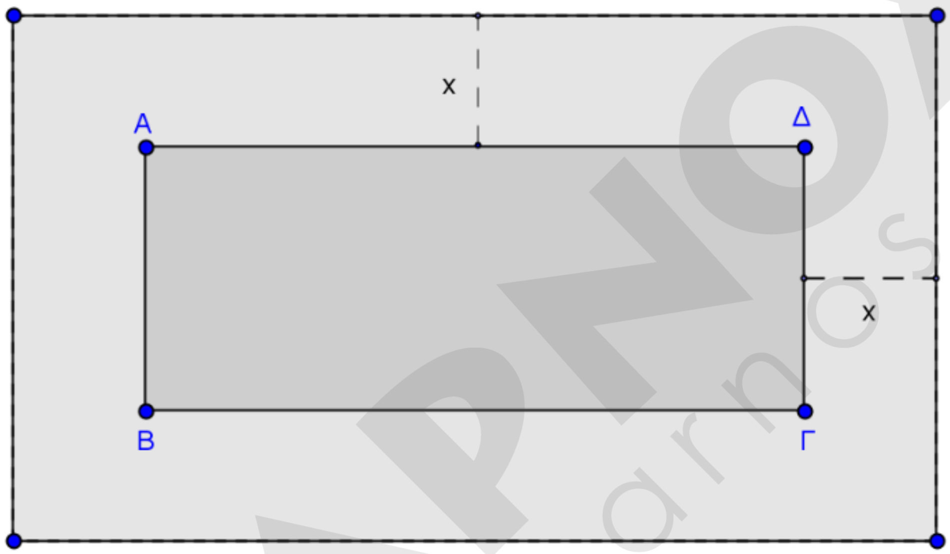
$$-3<\alpha<3 \Leftrightarrow |\alpha|<3 \Leftrightarrow 0\le|\alpha|<3$$

ο αριθμός $|\alpha|$ ανήκει στο διάστημα $(-1,3)$ όπου η f είναι θετική. Άρα:

$$f(|\alpha|)>0 \Leftrightarrow -\alpha^2+2|\alpha|+3>0$$

27. Θέμα 12911 Αρχέτυπο

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις *15m* και *25m*. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος *x* m *(x > 0)*, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x)=4x^2+80x\,, x>0$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E=500\,m^2$.

(Μονάδες 7)

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500\,m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι: $E_1 = 15 \cdot 25 = 375$ m^2. Το εξωτερικό ορθογώνιο έχει διαστάσεις $15+2x$, $25+2x$ και εμβαδόν:

$E_2(x) = (15 + 2x)(25 + 2x) = 375 + 30x + 50x + 4x^2 = 4x^2 + 80x + 375$.

Το εμβαδόν της ζώνης είναι: $E(x) = E_2(x) - E_1 = 4x^2 + 80x + 375 - 375 = 4x^2 + 80x$, $x > 0$

β) Ισχύει ότι:

$E(x) = 500$, δηλαδή $4x^2 + 80x = 500$, οπότε $4x^2 + 80x - 500 = 0$ και διαιρώντας όλους τους όρους με 4 προκύπτει τελικά η εξίσωση $x^2 + 20x - 125 = 0$.

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-125) = 400 + 500 = 900 > 0$

και ρίζες τις: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-20 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-20 \pm 30}{2} = \begin{cases} \frac{-20+30}{2} = 5 \\ \frac{-20-30}{2} = -25 \end{cases}$

Επειδή $x > 0$ είναι $x = 5m$.

γ) Είναι: $E(x) < 500$, δηλαδή $4x^2 + 80x < 500$, οπότε $4x^2 + 80x - 500 < 0$ και διαιρώντας όλους τους όρους με 4 προκύπτει τελικά η ανίσωση $x^2 + 20x - 125 < 0$ (1).

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 20x - 125$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-25		5		$+\infty$
$x^2 + 20x - 125$	+	0	-	0	+	

Από τον πίνακα προσήμου συμπεραίνουμε ότι η ανίσωση (1) αληθεύει για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $-25 < x < 5$. Όμως $x > 0$, οπότε τελικά $x \in (0,5)$.

Εναλλακτικά, για να έχει η ζώνη εμβαδόν μικρότερο από $500m^2$ (δεδομένου ότι δεν αλλάζει το εμβαδόν του κολυμβητηρίου), αρκεί να έχει πλάτος $x < 5$, διότι έτσι το εξωτερικό ορθογώνιο θα έχει μικρότερο μήκος και ίδιο πλάτος, άρα μικρότερο εμβαδόν. Οπότε, για κάθε $0 < x < 5$, ισχύει $E(x) < 500m^2$.

28. Θέμα 14562

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}$.

α)

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y=1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α)

i. Η συνάρτηση ορίζεται για τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $x^2-3x+2\neq 0$ (1).

Το τριώνυμο x^2-3x+2 έχει $\alpha=1,\beta=-3,\gamma=2$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=1>0$

Οι ρίζες του είναι $x_1=\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=1$ και $x_2=\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=2$.

Άρα η (1) ισχύει για $x\neq 1$ και $x\neq 2$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι:

$\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{1,2\}$.

ii. Είναι $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{x}{x-2}$, $x\in\mathbb{R}-\{1,2\}$.

β) Οι τετμημένες των κοινών σημείων, αν αυτά υπάρχουν, θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$|f(x)|=1$, δηλαδή

$\left|\frac{x}{x-2}\right|=1$, οπότε

$\frac{x}{x-2}=1$ ή $\frac{x}{x-2}=-1$, δηλαδή

$x=x-2$ ή $x=-(x-2)$ και τελικά

$0x=-2$, που είναι αδύνατη ή $x=1$ που δεν είναι δεκτή λύση.

Συνεπώς η ευθεία $y=1$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

29. Θέμα 14629 **Αρχέτυπο**

Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τον τύπο $E(x)=\frac{4}{3}(x-25)$.

(Μονάδες 7)

β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε;

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50;

(Μονάδες 8)

δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί;

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Αν το πλήθος των σωστών απαντήσεων είναι x, τότε το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων είναι $100-x$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, ο φοιτητής θα πάρει x βαθμούς για τις σωστές απαντήσεις και θα του αφαιρεθούν (αρνητική βαθμολογία) $\frac{1}{3}(100-x)$ βαθμοί για τις λανθασμένες απαντήσεις. Έτσι, η τελική βαθμολογία του θα είναι

$$E(x)=x-\frac{1}{3}(100-x)=\frac{3x-(100-x)}{3}=\frac{4x-100}{3}=\frac{4}{3}(x-25)$$

όπου x είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων.

β) Είναι:

$$E(x)=88 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x-25)=88 \Leftrightarrow \frac{x-25}{3}=22 \Leftrightarrow x-25=66 \Leftrightarrow x=91$$

Άρα ο φοιτητής που βαθμολογήθηκε με 88, απάντησε σωστά σε 91 ερωτήσεις και λανθασμένα σε 9 ερωτήσεις.

γ) Έστω ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή που απάντησε σωστά σε x ερωτήσεις είναι ίση με 50. Τότε έχουμε:

$$E(x)=50 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x-25)=50 \Leftrightarrow 4x-100=150 \Leftrightarrow 4x=250 \Leftrightarrow x=\frac{125}{2}$$

που είναι άτοπο, αφού ο αριθμός x που παριστάνει το πλήθος των σωστών απαντήσεων, είναι ακέραιος. Επομένως η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50.

Ένας φοιτητής θα πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση, μόνο όταν $E(x)>50$. Είναι:

$$E(x)>50 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x-25)>50 \Leftrightarrow 4x-100>150 \Leftrightarrow 4x>250 \Leftrightarrow x>\frac{125}{2}=62{,}5$$

Επομένως η βαθμολογία ενός φοιτητή είναι μεγαλύτερη του 50 μόνο όταν απαντήσει σωστά σε 63 τουλάχιστον ερωτήσεις.

δ) Έστω ότι το πλήθος των σωστών απαντήσεων των φοιτητών είναι x_1, x_2 αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

$$E(x_1)+E(x_2)=140 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x_1-25)+\frac{4}{3}(x_1-25)=140 \Leftrightarrow 4x_1-100+4x_2-100=420$$

$$\Leftrightarrow 4(x_1+x_2)=620 \Leftrightarrow x_1+x_2=155$$

Επομένως οι δυο φοιτητές απάντησαν σωστά σε 155 από τις 200 ερωτήσεις τους και λανθασμένα στις υπόλοιπες $200-155=45$ ερωτήσεις.

30. Θέμα 14702

Για τις ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και $2x-1$, όπου $x>\frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν Ε της μακέτας σε συνάρτηση του x.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.

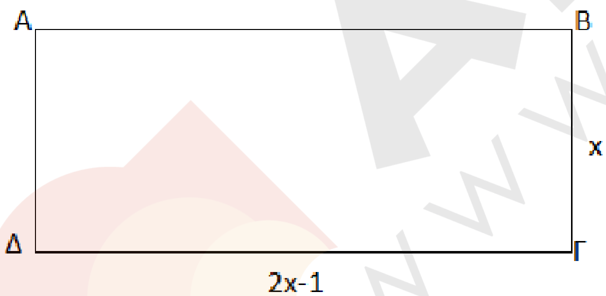
(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η μακέτα του πάρκου



α) Για τη περίμετρο της μακέτας έχουμε:

$$\Pi(x)=2x+2(2x-1)=6x-2 \quad , \text{ με } x>\frac{1}{2}$$

Και για το εμβαδόν της:

$$E(x)=x(2x-1)=2x^2-x \text{ με } x>\frac{1}{2}.$$

β) Στη περίφραξη του πάρκου εμπλέκεται η περίμετρος που δίνεται από τον τύπο

$\Pi(\mathrm{x}) = 6\mathrm{x} - 2$. Αρκεί $\Pi(\mathrm{x}) \leq 8$ ή $6\mathrm{x} - 2 \leq 8 \Leftrightarrow 6x \leq 10 \Leftrightarrow \mathrm{x} \leq \frac{5}{3}$.

και για το 2x-1 προκύπτει $2 \cdot \mathrm{x} \leq 2 \cdot \frac{5}{3} \Leftrightarrow -1 < 2\mathrm{x} - 1 \leq \frac{10}{3} - 1 \Leftrightarrow 2\mathrm{x} - 1 \leq \frac{7}{3}$.

Επειδή οι διαστάσεις παίρνουν μόνο θετικές τιμές με $x > \frac{1}{2}$, οι τιμές τους κυμαίνονται :

$$\frac{1}{2} < \mathrm{x} \leq \frac{5}{3} \quad \text{και} \quad 0 < 2\mathrm{x} - 1 \leq \frac{7}{3}.$$

γ) Το εμβαδόν της μακέτας δίνεται από το τύπο $\mathrm{E}(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}$.

Αρκεί $\mathrm{E}(\mathrm{x}) \leq 1$ ή $2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} \leq 1$ τότε $2\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 1 \leq 0$ (1).

Παρατηρούμε πως το τριώνυμο της ανίσωσης (1) μηδενίζεται για $\mathrm{x}_1 = 1$ και $\mathrm{x}_2 = -\frac{1}{2}$ και επειδή το α=2 >0 προκύπτει:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		+	0	-	0	+	

Σύμφωνα με τον πίνακα πρόσημών το τριώνυμο θα είναι ετερόσημο του α, δηλαδή αρνητικό για $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{x} \leq 1$.

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης (1) είναι $\mathrm{x} \in [-\frac{1}{2}, 1]$.

Επειδή $x > \frac{1}{2}$ τότε $\mathrm{x} \epsilon (\frac{1}{2}, 1]$.