

Κεφ. 5.3. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Α' Λυκείου**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ****Θέμα 2 – Κωδικοί:****1242, 1257, 1265, 1311, 1321, 1339, 1360, 12763, 12787, 13319**

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. Θέμα 1242 Αρχέτυπο

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x , $2x+1$, $5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x=1$ ii) $x=-1$

(Μονάδες 12)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί x , $2x + 1$, $5x + 4$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}(2x + 1)^2 &= x \cdot (5x + 4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 &= 5x^2 + 4x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = 1)\end{aligned}$$

β) i) Για $x = 1$ οι δοσμένοι αριθμοί γράφονται:

$$1, 3, 9$$

Ο λόγος λ είναι $\lambda = \frac{3}{1} = 3$.

ii) Για $x = -1$ οι δοσμένοι αριθμοί γράφονται:

$$-1, -1, -1$$

Ο λόγος λ είναι $\lambda = \frac{-1}{-1} = 1$.

2. Θέμα 1257 Αρχέτυπο

α) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x . (Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x . (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x = \frac{4-x+2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 6 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$$

β) Οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x^2 = (4 - x) \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{-2+6}{2} = 2 \\ \frac{-2-6}{2} = -4 \end{cases}$$

Από τα σκέλη (α) και (β) βρίσκουμε $x = 2$.

Έξυπνα & Εύκολα!

3. Θέμα 1265

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5\beta)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2\beta^2 = 25\beta^2 - 16\beta^2 = 9\beta^2 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5\beta) \pm \sqrt{9\beta^2}}{2 \cdot 2} = \frac{5\beta \pm 3\beta}{4} = \begin{cases} \frac{5\beta + 3\beta}{4} = 2\beta \\ \frac{5\beta - 3\beta}{4} = \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

Σημείωση: Μια εναλλακτική λύση είναι η εξής:

Η $x_1 = 2\beta$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$2(2\beta)^2 - 5\beta(2\beta) + 2\beta^2 = 8\beta^2 - 10\beta^2 + 2\beta^2 = 0$$

Ομοίως η $x_2 = \frac{\beta}{2}$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$2\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - 5\beta\left(\frac{\beta}{2}\right) + 2\beta^2 = 2\frac{\beta^2}{4} - 5\frac{\beta^2}{2} + 2\beta^2 = \frac{\beta^2}{2} - \frac{5\beta^2}{2} + 2\beta^2 = \frac{-4\beta^2}{2} + 2\beta^2 = 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες της x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Οι αριθμοί 2β , β , $\frac{\beta}{2}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, διότι

$$\frac{\beta}{2\beta} = \frac{1}{2} \text{ και } \frac{\frac{\beta}{2}}{\beta} = \frac{\beta}{2\beta} = \frac{1}{2}, \text{ δηλαδή ο λόγος των όρων με τη σειρά που δίνονται είναι σταθερός } \lambda = \frac{1}{2}$$

4. Θέμα 1311

Οι αριθμοί $k-2$, $2k$ και $7k+4$, $k \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) .

α) Να αποδείξετε ότι $k=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 12)

β) i) Να εκφράσετε το 2° όρο, τον 5° και τον 4° όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1 . (Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $k-2$, $2k$ και $7k+4$, είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$(2k)^2 = (k-2) \cdot (7k+4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4k^2 = 7k^2 + 4k - 14k - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3k^2 - 10k - 8 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$$

$$= (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) =$$

$$= 100 + 96 = 196 > 0$$

Έξυπνα & Εύκολα!

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$\kappa_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 14}{6} = \begin{cases} \frac{10+14}{6} = 4 \\ \frac{10-14}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Η τιμή $\kappa = -\frac{2}{3} < 0$ απορρίπτεται. Άρα $\kappa = 4$.

Για $\kappa = 4$ οι αριθμοί γράφονται 2, 8, 32 οπότε ο λόγος είναι $\lambda = \frac{8}{2} = 4$.

β) i) Είναι:

$$a_2 = a_1 \lambda^{2-1} = 4a_1, \quad a_4 = a_1 \lambda^{4-1} = a_1 4^3 = 64a_1, \quad a_5 = a_1 \lambda^{5-1} = a_1 4^4 = 256a_1$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} a_2 + a_5 &= \\ &= 4a_1 + 256a_1 = \\ &= 4(a_1 + 64a_1) = \\ &= 4(a_1 + a_4) \end{aligned}$$

5. Θέμα 1321

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 6)

ii) τον πρώτο όρο a_1 της προόδου. (Μονάδες 6)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $x + 4$, $2 - x$, $6 - x$, είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}(2 - x)^2 &= (6 - x) \cdot (x + 4) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 &= 6x + 24 - x^2 - 4x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 20 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 &= 0 \quad (1)\end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{3+7}{2} = 5 \\ \frac{3-7}{2} = -2 \end{cases}$$

β) i) Για $x = 5$:

$$a_2 = x + 4 = 9, \quad a_3 = 2 - x = -3 \quad \text{και} \quad a_4 = 6 - x = 1$$

Ο λόγος είναι $\lambda = \frac{a_4}{a_3} = -\frac{1}{3}$.

ii) Είναι:

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 \lambda^{2-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9 &= a_1 \left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_1 &= -27\end{aligned}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

6. Θέμα 1339 Αρχέτυπο

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) , για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$. (Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 . (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27 &\Leftrightarrow \frac{\alpha_1 \lambda^{5-1}}{\alpha_1 \lambda^{2-1}} = 27 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda^4}{\lambda} = 27 \Leftrightarrow \lambda^3 = 27 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda^3 = 3^3 \Leftrightarrow \lambda = 3\end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}S_4 = 200 &\Leftrightarrow \alpha_1 \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} = 200 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 \frac{3^4 - 1}{3 - 1} = 200 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 \frac{81 - 1}{2} = 200 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 40\alpha_1 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 = 5\end{aligned}$$

7. Θέμα 1360

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_n) με θετικό λόγο λ , ισχύει: $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_n = 2^{n-3}. \quad (\text{Μονάδες 12})$$

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Από τον τύπο $a_n = a_1 \lambda^{n-1}$ βρίσκουμε:

$$a_3 = a_1 \lambda^{3-1} \Leftrightarrow 1 = a_1 \lambda^2 \quad (1)$$

και

$$a_5 = a_1 \lambda^{5-1} \Leftrightarrow 4 = a_1 \lambda^4 \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\frac{4}{1} = \frac{a_1 \lambda^4}{a_1 \lambda^2} \Leftrightarrow 4 = \lambda^2 \Leftrightarrow (\lambda = -2, \text{ απορρίπτεται ή } \lambda = 2) \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$1 = a_1 2^2 \Leftrightarrow 1 = a_1 4 \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{4}$$

β) Ο n – οστός όρος της προόδου είναι:

$$a_n = a_1 \lambda^{n-1} \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n = 2^{-2} \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n = 2^{n-1-2} \Leftrightarrow a_n = 2^{n-3}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

8. Θέμα 12763 Αρχέτυπο

Δίνεται μία πρόοδος α_n με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

α) Να εξετάσετε αν η α_n είναι αριθμητική πρόοδος.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η α_n είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το n -οστό της όρο.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για να αποτελούν οι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου θα έπρεπε να έχουν την ιδιότητα $\alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}$.

Δηλαδή ισοδύναμα $2\sqrt{2} = \frac{2+4}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{3}{2}$, το οποίο δεν ισχύει, διότι ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός, ενώ ο $\frac{3}{2}$ είναι ρητός.

β) Για την πρόοδο (α_n) ισχύει ότι $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ και $\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, οπότε αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με λόγο $\lambda = \sqrt{2}$.

Εφόσον η (α_n) αποτελεί γεωμετρική πρόοδο, ο n -οστός της όρος θα έχει τη μορφή $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}$, όπου α_1, λ , ο πρώτος όρος και ο λόγος της προόδου αντίστοιχα.

Επειδή $\alpha_1 = 2$, $\lambda = \sqrt{2}$ ο n -οστός όρος είναι: $\alpha_n = 2 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$.

9. Θέμα 12787

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό k ώστε οι αριθμοί $k-2, k, 2k+3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

(Μονάδες 15)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση έχει συντελεστές $\alpha=1, \beta=-1, \gamma=-6$, και διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot(-6)=25>0$ οπότε έχει άνισες ρίζες που είναι οι αριθμοί

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

β) Οι αριθμοί $k-2, k, 2k+3, k \in \mathbb{Z}$ με $k > 0$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, μόνο όταν κανένας από αυτούς δεν είναι 0 και ισχύει:

$$k^2 = (2k+3)(k-2) \Leftrightarrow k^2 = 2k^2 - 4k - 6 + 3k \Leftrightarrow k^2 - k - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow k=3 \text{ ή } k=-2 \text{ (από το ερώτημα (α))}$$

Η τιμή $k=-2$ απορρίπτεται αφού πρέπει $k > 0$, ενώ η τιμή $k=3$ είναι δεκτή. Άρα $k=3$.

10. Θέμα 13319

Δίνονται οι αριθμοί $1-x, \frac{x}{2}, 2x-1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του x , αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί α, β, γ , με αυτή τη σειρά, είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου, αν και μόνον αν ισχύει $\beta - \alpha = \gamma - \beta$. Έτσι, θα πρέπει να ισχύει ότι

$\frac{x}{2} - (1-x) = 2x - 1 - \frac{x}{2}$, δηλαδή $\frac{x}{2} - 1 + x = \frac{3x}{2} - 1$, άρα $\frac{3x}{2} - 1 = \frac{3x}{2} - 1$, που ισχύει.

β) Πρέπει να ισχύει $\frac{3x}{2} - 1 = 5 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 6 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$.

Έξυπνα & Εύκολα!

Θέμα 4 – Κωδικοί:**1392, 1394, 1435, 1498, 1499, 1519, 12731, 12998, 14375, 14645****11. Θέμα 1392 Αρχέτυπο**

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1^{ης} ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της 2^{ης} ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3^{ης} ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5^{ης} ημέρας μετά το ατύχημα. (Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.;

(Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της 9^{ης} ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ. (Μονάδες 9)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

Η επιφάνεια, σε τετραγωνικά μίλια, που καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος κάθε ημέρας, είναι όροι γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 3$ και $\lambda = 2$. Στο τέλος της n -οστής ημέρας θα έχει καλυφθεί επιφάνεια $\alpha_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ τετραγωνικά μίλια (τ.μ.).

α) Στο τέλος της 5^{ης} ημέρας θα έχει καλυφθεί επιφάνεια: $\alpha_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$ τ.μ.

β) Δεδομένο είναι ότι $\alpha_n = 768$ και ζητούμενο είναι το n . Έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha_n = 768$$

$$3 \cdot 2^{n-1} = 768$$

$$2^{n-1} = 256$$

$$n - 1 = 8 \quad (2^8 = 256)$$

$$n = 9$$

Οπότε στο τέλος της 9^{ης} ημέρας θα έχει καλυφθεί από πετρέλαιο θαλάσσια επιφάνεια 768 τ.μ.

γ) Στο τέλος της 10^{ης} ημέρας η επιφάνεια της θάλασσας που έχει καλυφθεί από πετρέλαιο είναι $768 - 6 = 762$ τ.μ. και κάθε επόμενη ημέρα θα μειώνεται κατά 6 τ.μ. Άρα η επιφάνεια, σε τετραγωνικά μίλια, που θα καλύπτει εφεξής το πετρέλαιο στο τέλος κάθε ημέρας, είναι όροι αριθμητικής προόδου με $\beta_1 = 762$ και $\omega = -6$.

Δεδομένο είναι ότι $\beta_n = 12$ και ζητούμενο είναι το n . Έχουμε ισοδύναμα:

$$\beta_n = 12$$

$$762 + (n - 1) \cdot (-6) = 12$$

$$6n = 756$$

$$n = 126$$

Συνεπώς στο τέλος της 126^{ης} ημέρας μετά την κρατική παρέμβαση και συνολικά στο τέλος της $9 + 126 = 135$ ^{ης} ημέρας μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

Έξυπνα & Εύκολα!

12. Θέμα 1394

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

- α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; (Μονάδες 6)
- β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_n το πλήθος των βακτηρίων n ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($n \leq 5$).
- i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_n) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της. (Μονάδες 6)
- ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_n των βακτηρίων συναρτήσει του n . (Μονάδες 6)
- iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης; (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

Τα βακτήρια (το πλήθος τους) στο τέλος κάθε ώρας αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου (α_n) με πρώτο όρο $\alpha_1 = 102400$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$.

α) Ο n -στός όρος της προόδου είναι:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \\ \alpha_n &= 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

Μετά από 6 ώρες ο αριθμός των βακτηρίων θα είναι:

$$\alpha_6 = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 102400 \cdot \frac{1}{32} = 3200$$

Έξυπνα & Εύκολα!

β)

i) Μετά την ξαφνική επιδείνωση του οργανισμού ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Άρα η ακολουθία (β_v) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = 3$ και πρώτο όρο $\beta_1 = 3200 \cdot 3 = 9600$

ii) Είναι

$$\beta_v = \beta_1 \cdot \lambda^{v-1} \Leftrightarrow$$

$$\beta_v = 9600 \cdot 3^{v-1}, v \leq 5$$

iii) Ο αριθμός των βακτηρίων που θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης θα είναι:

$$\beta_3 = 9600 \cdot 3^{3-1} = 9600 \cdot 3^2 = 86.400$$

Έξυπνα & Εύκολα!

13. Θέμα 1435 Αρχέτυπο

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1^ο μήνα 1 ευρώ, το 2^ο μήνα 2 ευρώ, τον 3^ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1^ο μήνα 100 ευρώ, το 2^ο μήνα 110 ευρώ, τον 3^ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

- α) i) Να βρείτε το ποσό α_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το n° μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 4)
- ii) Να βρείτε το ποσό β_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το n° μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 4)
- iii) Να βρείτε το ποσό A_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 5)
- iv) Να βρείτε το ποσό B_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 5)
- β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)
- ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) i) Από τα δεδομένα που δίνονται για το πρόγραμμα Α διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ και $\lambda = 2$. Ισχύει επομένως ότι:

$$a_n = a_1 \lambda^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 1 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 2^{n-1}$$

ii) Το πρόγραμμα Β περιγράφεται από μια αριθμητική πρόοδο με $\beta_1 = 100$, $\beta_2 = 110$, $\beta_3 = 120$ και $\omega = 10$. Ισχύει επομένως ότι:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \beta_1 + (n-1)\omega \Leftrightarrow \beta_n = 100 + (n-1)10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \beta_n = 100 + 10n - 10 \Leftrightarrow \beta_n = 90 + 10n \end{aligned}$$

iii) Το ποσό που θα υπάρχει μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α θα είναι:

$$A_n = a_1 \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow A_n = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Leftrightarrow A_n = 2^n - 1$$

iv) Το ποσό που θα υπάρχει μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β θα είναι:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{n}{2}(\beta_1 + \beta_n) \Leftrightarrow B_n = \frac{n}{2}(100 + 90 + 10n) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow B_n = \frac{n}{2}(190 + 10n) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow B_n = \frac{190n + 10n^2}{2} \Leftrightarrow B_n = 95n + 5n^2 \end{aligned}$$

β) i) Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Α, μετά από 6 μήνες:

$$A_6 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63 \text{ €}$$

Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Β, μετά από 6 μήνες:

$$B_6 = 95 \cdot 6 + 5 \cdot 6^2 = 570 + 180 = 750 \text{ €}$$

ii) Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Α, μετά από 12 μήνες:

$$A_{12} = 2^{12} - 1 = 4096 - 1 = 4.095 \text{ €}$$

Το ποσό που θα υπάρχει, σύμφωνα με το πρόγραμμα Β, μετά από 12 μήνες:

$$B_{12} = 95 \cdot 12 + 5 \cdot 12^2 = 1.140 + 720 = 1.860 \text{ €}$$

Επομένως, ακολουθώντας το πρόγραμμα Α, θα έχει συγκεντρώσει μεγαλύτερο ποσό.

Έξυπνα & Εύκολα!

14. Θέμα 1498 Αρχέτυπο

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α , β και εμβαδόν E , τέτοια ώστε οι αριθμοί α , E , β , με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι $E=1$ (Μονάδες 10)

β) Αν $\alpha + \beta = 10$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα μήκη α , β (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα μήκη α , β (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α και β έχει εμβαδόν $E = \alpha\beta$ (1).

Οι αριθμοί α , E , β , με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$$E^2 = \alpha\beta \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} E^2 = E \stackrel{E \neq 0}{\Leftrightarrow} E = 1$$

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \alpha + \beta = 10 \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \alpha\beta = 1$$

Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα μήκη α και β είναι η:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 1 = 0 \quad (2)$$

ii) Τα α , β είναι οι λύσεις της εξίσωσης (2). Η εξίσωση (2) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 96$$

και ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{96}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{16 \cdot 6}}{2} = \begin{cases} \frac{10+4\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6} \\ \frac{10-4\sqrt{6}}{2} = 5 - 2\sqrt{6} \end{cases}$$

Άρα τα μήκη είναι $5 + 2\sqrt{6}$ και $5 - 2\sqrt{6}$.

Έξυπνα & Εύκολα!

15. Θέμα 1499 Αρχέτυπο

Δίνονται οι αριθμοί $2, x, 8$ με $x > 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

(Μονάδες 5)

γ) Αν (α_n) είναι η αριθμητική πρόοδος $2, 5, 8, 11, \dots$ και (β_n) είναι η γεωμετρική πρόοδος $2, 4, 8, 16, \dots$ τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) . (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε την τιμή του n ώστε, για το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) να

ισχύει: $2(S_n + 24) = \beta_7$ (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί $2, x, 8$ με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x = \frac{2+8}{2} \Leftrightarrow x = \frac{10}{2} \Leftrightarrow x = 5$$

Η διαφορά ω της προόδου είναι:

$$\omega = x - 2 = 5 - 2 = 3$$

β) Οι αριθμοί $2, x, 8$ με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x^2 = 2 \cdot 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = 4$$

Ο λόγος λ της προόδου είναι:

$$\lambda = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) i) Η αριθμητική πρόοδος (a_n) έχει $a_1 = 2$ και $\omega = 3$. Τότε:

$$\begin{aligned} S_v &= \frac{v}{2}[2a_1 + (v-1)\omega] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow S_v &= \frac{v}{2}[2 \cdot 2 + (v-1)3] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow S_v &= \frac{v}{2}(4 + 3v - 3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow S_v &= \frac{v}{2}(1 + 3v) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow S_v &= \frac{v+3v^2}{2} \end{aligned}$$

ii) Η γεωμετρική πρόοδος (β_n) έχει $\beta_1 = 2$ και $\lambda = 2$. Είναι:

$$\beta_7 = \beta_1 \lambda^{7-1} = 2 \cdot 2^6 = 2^7 = 128$$

Τότε:

$$\begin{aligned} 2(S_v + 24) &= \beta_7 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\left(\frac{v+3v^2}{2} + 24\right) &= 128 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3v^2 + v + 48 &= 128 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3v^2 + v - 80 &= 0 \end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-80) = 1 + 960 = 961 > 0$$

και ρίζες τις

$$v_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{961}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 31}{6} = \begin{cases} \frac{-1+31}{6} = 5 \\ \frac{-1-31}{6} = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

Η λύση $v = -\frac{16}{3}$ απορρίπτεται διότι δεν είναι φυσικός αριθμός. Τελικά $v = 5$.

Έξυπνα & Εύκολα!

16. Θέμα 1519

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha_3 = 4, \alpha_5 = 16 \text{ και } \lambda > 0$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , με $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο

με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_n) . (Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_n) και (β_n) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10} \quad (\text{Μονάδες 8})$$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha_3 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{3-1} = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^2 = 4 \quad (1)$$

και

$$\alpha_5 = 16 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^{5-1} = 16 \Leftrightarrow \alpha_1 \lambda^4 = 16 \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\frac{\alpha_1 \lambda^4}{\alpha_1 \lambda^2} = \frac{16}{4} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \lambda = 2$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\alpha_1 2^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 4 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$$

β) Ισχύει ότι:

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{\frac{1}{\alpha_{n+1}}}{\frac{1}{\alpha_n}} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \frac{\alpha_1 \lambda^{n-1}}{\alpha_1 \lambda^{n+1-1}} = \frac{\alpha_1 \lambda^{n-1}}{\alpha_1 \lambda^n} = \lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

Επομένως η (β_n) είναι γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1} = 1$ και λόγο $\lambda' = \frac{1}{2}$.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Είναι:

$$S_{10} = \alpha_1 \frac{\lambda^{10} - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 \quad (3)$$

και

$$\begin{aligned} S'_{10} &= \beta_1 \frac{(\lambda')^{10} - 1}{\lambda' - 1} = \\ &= 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2^{10}} - 1}{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\frac{1 - 2^{10}}{2^{10}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{2(2^{10} - 1)}{2^{10}} = \\ &= \frac{2^{10} - 1}{2^9} = \frac{1}{2^9} (2^{10} - 1) = \\ &= \frac{1}{2^9} S_{10}, \end{aligned}$$

λόγω της (3).

17. Θέμα 12731 **Αρχέτυπο**

Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.

(Μονάδες 10)

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \cdot \lambda$, ($\kappa > 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$) είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$ να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

(Μονάδες 7)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Για να είναι οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ , $\kappa \cdot \lambda$ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα πρέπει το γινόμενο πρώτου επί τον τρίτο να ισούται με το τετράγωνο του δευτέρου.

Πράγματι $\frac{\kappa}{\lambda} \cdot (\kappa \cdot \lambda) = \frac{\kappa \cdot \kappa \cdot \lambda}{\lambda} = \kappa^2$.

Άρα ισχύει.

β) Οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ , $\kappa \cdot \lambda$ έχουν άθροισμα:

$$\frac{\kappa}{\lambda} + \kappa + \kappa \cdot \lambda = \frac{\kappa + \kappa\lambda + \kappa\lambda^2}{\lambda} = \frac{\kappa \cdot (1 + \lambda + \lambda^2)}{\lambda} = \frac{\kappa}{\lambda} \cdot (1 + \lambda + \lambda^2)$$

Προφανώς $\frac{\kappa}{\lambda} \neq 0$.

Οπότε για να έχουν άθροισμα διάφορο του μηδενός αρκεί $\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0$.

Πράγματι το τριώνυμο $\lambda^2 + \lambda + 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0.$$

Άρα $\lambda^2 + \lambda + 1 \neq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

γ) Για την εξίσωση δευτέρου βαθμού $x^2 + 10x + 16 = 0$ το γινόμενο των ριζών ισούται με

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{16}{1} = 16.$$

Όμως από το (α) έχουμε $\frac{\kappa}{\lambda} \cdot (\kappa \cdot \lambda) = \kappa^2$.

Οπότε $\kappa^2 = 16 \Leftrightarrow |\kappa| = 4 \Leftrightarrow \kappa = 4$ αφού $\kappa > 0$.

Για την εξίσωση δευτέρου βαθμού $x^2 + 10x + 16 = 0$ το άθροισμα των ριζών ισούται με

$$S = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-10}{1} = -10.$$

Έξυπνα & Εύκολα!

Οπότε έχουμε:

$$\frac{4}{\lambda} + 4\lambda = -10 \Leftrightarrow 4 + 4\lambda^2 = -10\lambda \Leftrightarrow 4 + 4\lambda^2 + 10\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα Δ είναι $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$, οπότε έχουμε δύο ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \frac{-5-3}{4} \\ \frac{-5+3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ δεκτές.}$$

Επομένως για $\lambda = -2$ οι αριθμοί είναι $-2, 4, -8$, ενώ για $\lambda = -\frac{1}{2}$ οι αριθμοί είναι $-8, 4, -2$

Έξυπνα & Εύκολα!

18. Θέμα 12998 Αρχέτυπο

Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_n) : $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $a_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο n -οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (α_n) είναι ίσο με $\frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) i. Οι αριθμοί αυτοί δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, καθώς θα έπρεπε να ισχύει $2\beta = \alpha + \gamma$, δηλαδή:

$81 = \frac{27\sqrt{3}}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}$, επομένως $\frac{81}{54} = \sqrt{3}$, το οποίο δεν ισχύει αφού $\sqrt{3}$ άρρητος, ενώ ο $\frac{81}{54}$ είναι ρητός, άρα δεν μπορούν να είναι ίσοι.

ii. Οι δύο αριθμοί είναι θετικοί, για να είναι ίσοι, αρκεί τα τετράγωνά τους να είναι ίσα μεταξύ τους:

$$\left(\frac{27\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{3})^7\right)^2 \Leftrightarrow \frac{27^2 \cdot 3}{4} = \frac{1}{4}(\sqrt{3})^{14} \Leftrightarrow \frac{3^6 \cdot 3}{4} = \frac{1}{4} \cdot 3^7, \text{ το οποίο ισχύει.}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Η γεωμετρική πρόοδος θα έχει σταθερό λόγο: $\lambda = \frac{\frac{81\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{81}} = \sqrt{3}$.

Ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι $\alpha_n = \alpha_1 \lambda^{n-1} = \alpha_1 (\sqrt{3})^{n-1}$.

Όμως, εφόσον, ισχύει ότι $\alpha_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$ έχουμε ότι $\alpha_1 (\sqrt{3})^{7-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$, οπότε

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^{8-7} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

Συνεπώς, ισχύει ότι $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα ο γενικός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{3})^{n-1} = \frac{(\sqrt{3})^n}{2}.$$

γ) Για το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου ισχύει ότι:

$$S_{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}^{10} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}.$$

19. Θέμα 14375 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \mu x - 2$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x = -2$ και $x = 3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ ενώ ο $x = 1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ .

(Μονάδες 7)

ii. Για $\mu = \frac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 6)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (-\mu)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = \mu^2 + 8 > 0 \text{ για κάθε } \mu \in \mathbb{R}.$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β) Είναι:

$$f(-2) = 4 + 2\mu - 2 = 2\mu + 2, \quad f(1) = 1 - \mu - 1 = -\mu - 1$$

$$f(3) = 9 - 3\mu - 2 = 7 - 3\mu.$$

Οι τιμές του τριωνύμου είναι θετικές όταν το x παίρνει τιμές εκτός του διαστήματος των ριζών και αρνητικές όταν το x παίρνει τιμές εντός των ριζών. Άρα, για να βρίσκονται τα $x = -2$ και $x = 3$ εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ ενώ το $x = 1$ εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu + 2 > 0 \\ -\mu - 1 < 0 \\ 7 - 3\mu > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu > -1 \\ \mu > -1 \\ \mu < \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < \mu < \frac{7}{3}.$$

γ) Για να είναι τα $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} (f(1))^2 &= f(-2) \cdot f(3) \Leftrightarrow \\ (-\mu - 1)^2 &= (2\mu + 2) \cdot (7 - 3\mu) \Leftrightarrow \\ (\mu + 1)^2 - 2(\mu + 1) \cdot (7 - 3\mu) &= 0 \Leftrightarrow \\ (\mu + 1) \cdot (\mu + 1 - 14 + 6\mu) &= 0 \Leftrightarrow \\ (\mu + 1) \cdot (7\mu - 13) &= 0 \Leftrightarrow \\ \mu = -1 \text{ ή } 7\mu - 13 &= 0 \Leftrightarrow \\ \mu = -1 \text{ ή } \mu &= \frac{13}{7}. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \mu = \frac{13}{7} \text{ αφού } \mu \in (-1, \frac{7}{3}).$$

i. Για $\mu = \frac{13}{7}$ είναι:

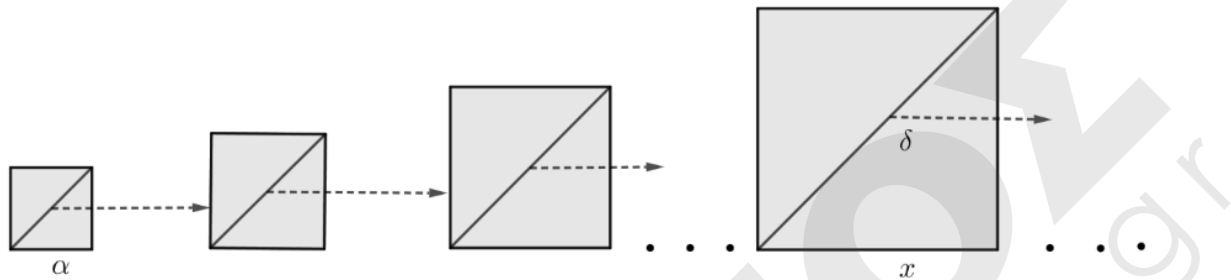
$$f(-2) = \frac{26}{7} + 2 = \frac{40}{7}, \quad f(1) = -\frac{13}{7} - 1 = -\frac{20}{7} \text{ και } f(3) = 7 - \frac{39}{7} = \frac{10}{7}.$$

$$\text{Άρα ο λόγος } \lambda = \frac{-\frac{20}{7}}{\frac{40}{7}} = -\frac{1}{2}.$$

Έξυπνα & Εύκολα!

20. Θέμα 14645 Αρχέτυπο

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α , σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α)

- i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x , να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$.

(Μονάδες 4)

- ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (a_n) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $a_n = \alpha^2 2^{n-1}$.

(Μονάδες 7)

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ. μ., να βρείτε:

- i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου.

(Μονάδες 8)

- ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ. μ.

(Μονάδες 6)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α)

- i. Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι για τη διαγώνιο δ ενός τετραγώνου πλευράς x ισχύει:

$$\delta^2 = x^2 + x^2, \text{ δηλαδή}$$

$$\delta^2 = 2x^2, \text{ άρα}$$

$$\sqrt{\delta^2} = \sqrt{2x^2} \text{ και επειδή } \delta, x > 0 \text{ προκύπτει ότι:}$$

$$\delta = \sqrt{2}x.$$

- ii. Από το ερώτημα α)i) προκύπτει ότι αν ένα από τα τετράγωνα της ακολουθίας έχει πλευρά x το επόμενο του έχει πλευρά $\sqrt{2}x$ και τα αντίστοιχα εμβαδά είναι x^2 και $(\sqrt{2}x)^2 = 2x^2$. Άρα, ο λόγος λ των εμβαδών δύο διαδοχικών τετραγώνων δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

και είναι σταθερός. Οπότε, τα εμβαδά των τετραγώνων είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda = 2$ και πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha^2$.

Ο γενικός όρος της προόδου δίνεται από τη σχέση $\alpha_n = \alpha_1 \lambda^{n-1} = \alpha^2 2^{n-1}$.

β) Ισχύει ότι

$$\alpha_4 = 8, \text{ άρα}$$

$$\alpha^2 2^{4-1} = 8, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha^2 \cdot 8 = 8, \text{ οπότε}$$

$$\alpha^2 = 1$$

και επειδή $\alpha > 0$ έχουμε ότι $\alpha = 1$.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου δίνεται από τη σχέση:

$$S_n = a_1 \frac{(\lambda^n - 1)}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Για να είναι το συνολικό εμβαδόν των αρχικών τετραγώνων ίσο με 255 τ.μ πρέπει να ισχύει:

$$S_n = 255 \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$2^n - 1 = 255, \text{ δηλαδή}$$

$$2^n = 256.$$

Αλλά $256 = 2^8$. Άρα, $2^n = 2^8$, οπότε $n = 8$. Άρα το πλήθος των τετραγώνων που έχουν συνολικό εμβαδόν 255τ.μ. είναι 8.

Έξυπνα & Εύκολα!