# Κεφ. 5.2. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Α' Λυκείου

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

**Θέμα 1 – Κωδικός: 14935**

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

### 1. Θέμα 14935 Αρχέτυπο

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

ii. Αν $\rho>0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x|<\rho \Leftrightarrow -\rho<x<\rho$.

iii. Η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$, με ν περιττό φυσικό και $\alpha<0$, έχει λύση την $x=\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

iv. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Μ(3, 5) ισχύει $f(5)=3$.

v. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2=\alpha\gamma$.

(Μονάδες 10 $(5\times 2)$)

β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1$ και διαφορά ω είναι:

$$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α)

i. Λ

ii. Σ

iii. Λ

iv. Λ

v. Σ

β) Θεωρία § 5.2

**Θέμα 2 - Κωδικοί:**

**1240, 1245, 1247, 1249, 1256, 1266, 1325, 1326, 1329, 1336, 1343, 1370, 14476, 14512, 14573, 14574, 14597, 14656**

**2. Θέμα 1240 Αρχέτυπο**

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $(\alpha_\nu)$ με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου $\omega$ είναι η διαφορά της προόδου και $\alpha_1$ ο πρώτος όρος της. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο *ν-οστός* όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \aleph^*$,και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. (Μονάδες 15)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Από τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε:

$$\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + (2-1)\omega = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 + \omega = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 = -\omega \quad (1)$$

και

$$\alpha_4 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 + (4-1)\omega = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow -\omega + 3\omega = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\omega = 4 \Leftrightarrow \omega = 2$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = -2$$

**β)** Ο ν – οστός όρος της αριθμητικής προόδου είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = -2 + (\nu - 1)\cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = -2 + 2\nu - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu - 4$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\alpha_\nu = 98 \Leftrightarrow 2\nu - 4 = 98 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\nu = 102 \Leftrightarrow \nu = 51$$

Άρα ο $51^{ος}$ όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

**3. Θέμα 1245 Αρχέτυπο**

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό *x* ώστε οι αριθμοί : $x+2,\ (x+1)^2,\ 3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη διαφορά *ω* της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν

i) *x=1*

ii) *x= -1*.

(Μονάδες 12)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Οι αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$(x+1)^2 = \frac{x+2+3x+2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = \frac{4x+4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow (x = -1 \ \text{ή} \ x = 1)$$

**β) i)** Για $x = 1$ οι αριθμοί γράφονται $3, 4, 5$ και η διαφορά είναι $\omega = 1$.

**ii)** Για $x = -1$ οι αριθμοί γράφονται $1, 0, -1$ και η διαφορά είναι $\omega = -1$.

**4. Θέμα 1247 Αρχέτυπο**

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της *ν-οστής* σειράς. (Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Από τα δεδομένα της άσκησης είναι $\alpha_1 = 120$ και $\omega = 20$. Τότε:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 120 + (\nu - 1)20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 120 + 20\nu - 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 100 + 20\nu$$

**β)** Η τελευταία σειρά έχει:

$$\alpha_{10} = 100 + 20 \cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{10} = 100 + 200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{10} = 300 \text{ καθίσματα}$$

**γ)** Το γυμναστήριο έχει συνολικά:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(\alpha_1 + \alpha_{10}) = 5(120 + 300) = 5 \cdot 420 = 2.100 \text{ καθίσματα}$$

**5. Θέμα 1249**

Δίνεται αριθμητική πρόοδος $(\alpha_\nu)$ για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον $\alpha_{20}$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Είναι:

$$\alpha_{10} - \alpha_6 = 24 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 + (10-1)\omega - [\alpha_1 + (6-1)\omega] = 24 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 9\omega - \alpha_1 - 5\omega = 24 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 6$$

**β)** Έχουμε:

$$\alpha_{20} = \alpha_1 + (20-1)\omega = 19 + 19 \cdot 6 = 19 + 114 = 133$$

**γ)** Ισχύει ότι:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(\alpha_1 + \alpha_{20}) = 10(19+133) = 10 \cdot 152 = 1.520$$

**6. Θέμα 1256**

Οι αριθμοί *Α=1, Β=x+4, Γ=x+8* είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $(\alpha_\nu)$.

α) Να βρείτε τη τιμή του *x*. (Μονάδες 10)

β) Αν *x=1* και ο αριθμός *Α* είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου $(\alpha_\nu)$,

i) να υπολογίσετε τη διαφορά *ω*. (Μονάδες 7)

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Οι αριθμοί Α, Β, Γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$B = \frac{A+\Gamma}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{1+x+8}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x+4) = 9 + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 8 = x + 9 \Leftrightarrow x = 1$$

**β) i)** Για $x = 1$ είναι $A = 1$, $B = 5$ και $\Gamma = 9$. Τότε:

$$\omega = B - A = 5 - 1 = 4$$

**ii)** Είναι:

$$\alpha_{20} = \alpha_1 + (20-1)\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{20} = 1 + 19 \cdot 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{20} = 1 + 76 \Leftrightarrow \alpha_{20} = 77$$

**7. Θέμα 1266 Αρχέτυπο**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2\beta x+(\beta^2-4)=0$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=\beta-2$ και $x_2=\beta+2$

(Μονάδες 12)

β) Αν $x_1$, $x_2$ είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1$, $\beta$, $x_2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $x^2-2\beta x+\beta^2-4$ έχει διακρίνουσα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2\beta)^2-4\cdot 1\cdot(\beta^2-4)=4\beta^2-4\beta^2+16=16>0$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-2\beta)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{2\beta\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{2\beta+4}{2}=\beta+2\\ \frac{2\beta-4}{2}=\beta-2\end{cases}$$

**Σημείωση:** Μια εναλλακτική λύση είναι η εξής:

Η $x_1=\beta+2$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$(\beta+2)^2-2\beta(\beta+2)+\beta^2-4=\beta^2+4\beta+4-2\beta^2-4\beta+\beta^2-4=0$$

Ομοίως η $x_2=\beta-2$ είναι ρίζα της (1), διότι την επαληθεύει:

$$(\beta-2)^2-2\beta(\beta-2)+\beta^2-4=\beta^2-4\beta+4-2\beta^2+4\beta+\beta^2-4=0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες της $x_1$, $x_2$ με $x_1\neq x_2$.

**β)** Οι αριθμοί $\beta-2$, $\beta$, $\beta+2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, διότι

$\beta-(\beta-2)=2$ και $(\beta+2)-\beta=2$, δηλαδή διαφέρουν κατά σταθερό αριθμό $\omega=2$.

**8. Θέμα 1325**

Σε μία αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$ ισχύουν: $α_1 = 2$ και $α_{25} = α_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $ω = 3$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Είναι:

$$α_{25} = α_{12} + 39 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow α_1 + (25 - 1)ω = α_1 + (12 - 1)ω + 39 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 24ω = 11ω + 39 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 13ω = 39 \Leftrightarrow ω = 3$$

**β)** Ισχύει ότι:

$$α_ν = 152 \Leftrightarrow α_1 + (ν - 1)ω = 152 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 + (ν - 1)3 = 152 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 + 3ν - 3 = 152 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3ν = 153 \Leftrightarrow ν = 51$$

Άρα ο 51ος όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

**9. Θέμα 1326 Αρχέτυπο**

Δίνεται αριθμητική πρόοδος $(α_ν)$ με διαφορά $ω$.

α) Να δείξετε ότι: $\dfrac{a_{15} - a_9}{a_{10} - a_7} = 2$. (Μονάδες 13)

β) Αν $a_{15} - a_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά $ω$ της προόδου. (Μονάδες 12)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Είναι:

$$\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=\frac{\alpha_1+(15-1)\omega-[\alpha_1+(9-1)\omega]}{\alpha_1+(10-1)\omega-[\alpha_1+(7-1)\omega]}=$$
$$=\frac{\alpha_1+14\omega-\alpha_1-8\omega}{\alpha_1+9\omega-\alpha_1-6\omega}=$$
$$=\frac{6\omega}{3\omega}=2$$

**β)** Έχουμε:

$$\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{18}{\alpha_1+9\omega-\alpha_1-6\omega}=2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{18}{3\omega}=2\Leftrightarrow 18=6\omega\Leftrightarrow\omega=3$$

**10. Θέμα 1329**

Σε αριθμητική πρόοδο $(α_ν)$ με διαφορά $ω = 4$, ισχύει: $α_6 + α_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο $α_1$ της προόδου. (Μονάδες 12)

**β)** Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Είναι:

$$α_6 + α_{11} = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow α_1 + (6-1)ω + α_1 + (11-1)ω = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2α_1 + 5ω + 10ω = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2α_1 + 15ω = 40 \Leftrightarrow 2α_1 + 15 \cdot 4 = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2α_1 + 60 = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2α_1 = -20 \Leftrightarrow α_1 = -10$$

**β)** Έχουμε:

$$S_ν = 0 \Leftrightarrow \frac{ν}{2}[2α_1 + (ν-1)ω] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ν}{2}[2(-10) + (ν-1)4] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ν}{2}(-20 + 4ν - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -24 + 4ν = 0 \Leftrightarrow 4ν = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ν = 6$$

Άρα πρέπει να προσθέσουμε 6 όρους ώστε το άθροισμα να είναι ίσο με μηδέν.

**11. Θέμα 1336**

Οι αριθμοί *x+6, 5x+2, 11x-6* είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1$ και διαφορά $\omega$.

α) Να βρείτε την τιμή του *x* και να αποδείξετε ότι $\omega=4$. (Μονάδες 12)

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα $S_8$ των 8 πρώτων όρων. (Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Οι αριθμοί x + 6, 5x + 2, 11x – 6 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$5x + 2 = \frac{x+6+11x-6}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x + 2 = \frac{12x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x + 2 = 6x \Leftrightarrow x = 2$$

Είναι:

$$\omega = 5x + 2 - (x + 6) =$$

$$= 5x + 2 - x - 6 =$$

$$= 4x - 4 = 4 \cdot 2 - 4 = 4$$

**β)** Ισχύει ότι:

$$\alpha_8 = \alpha_1 + (8 - 1)\omega = 0 + 7 \cdot 4 = 28$$

Τότε είναι:

$$S_8 = \frac{8}{2}(\alpha_1 + \alpha_8) = 4(0 + 28) = 4 \cdot 28 = 112$$

**12. Θέμα 1343 Αρχέτυπο**

Σε αριθμητική πρόοδο $(\alpha_\nu)$ είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega=3$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (Μονάδες 13)

(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

**ΛΥΣΗ**

**α)** Είναι:

$$\alpha_5 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + (5-1)\omega = 14 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 + 4\omega = 14 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\omega = 12 \Leftrightarrow \omega = 3$$

**β)** Έχουμε:

$$S_\nu = 77 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] = 77 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2 \cdot 2 + (\nu-1)3] = 77 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(4 + 3\nu - 3) = 77 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(3\nu + 1) = 77 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3\nu^2+\nu}{2} = 77 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu = 154 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu - 154 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-154) = 1 + 1.848 = 1.849 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$\nu_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{1849}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 43}{6} = \begin{cases} \frac{-1+43}{6} = 7 \\ \frac{-1-43}{6} = -\frac{44}{6} \end{cases}$$

Η τιμή $\nu = -\frac{44}{6}$ απορρίπτεται, καθώς $\nu \in N$. Άρα πρέπει να προσθέσουμε 7 όρους της προόδου ώστε το άθροισμα να είναι ίσο με 77.

**13. Θέμα 1370**

α) Να βρείτε το άθροισμα των *ν* πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1,2,3,…ν

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. (Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Η πρόοδος που έχει δοθεί είναι αριθμητική με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 1$. Τότε:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] =$$

$$= \frac{\nu}{2}[2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 1] =$$

$$= \frac{\nu}{2}(2 + \nu - 1) =$$

$$= \frac{\nu}{2}(1 + \nu) = \frac{\nu+\nu^2}{2}$$

**β)** Είναι:

$$S_\nu = 45 \Leftrightarrow \frac{\nu+\nu^2}{2} = 45 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu^2 + \nu = 45 \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 1 + 360 = 361 > 0$$

και οι ρίζες είναι:

$$\nu_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 19}{2} = \begin{cases} \frac{-1+19}{2} = 9 \\ \frac{-1-19}{2} = -10 \end{cases}$$

Η τιμή $\nu = -10$ απορρίπτεται. Επομένως πρέπει να χρησιμοποιήσουμε 9 διαδοχικούς θετικούς ακέραιους για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

## 14. Θέμα 14476

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $(\alpha_\nu)$ των θετικών περιττών αριθμών: $1, 3, 5, 7, \ldots$

α)

i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με $30^2$.

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

α)

i. Ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 1$ και η διαφορά της $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 3 - 1 = 2$.

ii. Ο τριακοστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_{30} = \alpha_1 + 29\omega = 1 + 29 \cdot 2 = 1 + 58 = 59$.

β) Έχουμε: $S_{30} = \frac{30}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_{30}) = 15 \cdot (1 + 59) = 15 \cdot 60 = 900 = 30^2$.

**15. Θέμα 14512 Αρχέτυπο**

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2=1$ και $x^2=9$.

(Μονάδες 9)

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια

i. να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου $(\alpha_\nu)$ της οποίας να βρείτε τη διαφορά $\omega$.

(Μονάδες 9)

ii. να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου $(\alpha_\nu)$.

(Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

α) Η εξίσωση $x^2=1$ έχει λύσεις τις $x=1$ ή $x=-1$ ενώ η εξίσωση $x^2=9$ έχει λύσεις τις $x=3$ ή $x=-3$.

β) Οι λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά είναι -3, -1, 1, 3.

i. Αφού $3-1=1-(-1)=-1-(-3)=2$ οι αριθμοί -3, -1, 1, 3 αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου $(\alpha_\nu)$ με διαφορά $\omega=2$.

ii. Αφού η αριθμητική πρόοδος έχει διαφορά $\omega=2$ και περιέχει τους περιττούς όρους 1 και 3, όλοι οι όροι της προόδου θα είναι περιττοί και επομένως ο 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου $(\alpha_\nu)$.

**16. Θέμα 14573**

Δίνεται αριθμητική πρόοδος $(\alpha_\nu)$ για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον πρώτο όρο $\alpha_1$ της προόδου.

(Μονάδες 15)

**ΛΥΣΗ**

α) Έχουμε

$$\alpha_4 - \alpha_2 = 10, \text{ δηλαδή}$$

$$(\alpha_1 + 3\omega) - (\alpha_1 + \omega) = 10, \text{ οπότε}$$

$$\alpha_1 + 3\omega - \alpha_1 - \omega = 10 \text{ και τελικά}$$

$$\omega = 5.$$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 33, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha_1 + (\alpha_1 + \omega) + (\alpha_1 + 2\omega) = 33, \text{ οπότε}$$

$$3\alpha_1 + 3\omega = 33, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha_1 + \omega = 11, \text{ οπότε}$$

$$\alpha_1 + 5 = 11 \text{ και τελικά}$$

$$\alpha_1 = 6.$$

**17. Θέμα 14574**

Ο 1$^{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου $(\alpha_\nu)$ ισούται με 2 και ο 3$^{ος}$ όρος ισούται με 8.

α) Να βρείτε τη διαφορά $\omega$ της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με $35$.

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

α) Έχουμε $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_3 = 8$, δηλαδή

$\alpha_1 + 2\omega = 8$, οπότε

$2 + 2\omega = 8$ και τελικά

$\omega = 3$.

β) Θα πρέπει να βρούμε τον φυσικό αριθμό $\nu$, ώστε:

$\alpha_\nu = 35$, δηλαδή

$\alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 35$, οπότε

$2 + (\nu - 1) \cdot 3 = 35$, οπότε

$3 \cdot (\nu - 1) = 33$, δηλαδή

$\nu - 1 = 11$ και τελικά

$\nu = 12$.

Επομένως ο 12$^{ος}$ όρος της προόδου είναι 35.

**18. Θέμα 14597**

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.

α) Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά.

(Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

α) Το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς προκύπτει από το πλήθος των καθισμάτων της προηγούμενης σειράς προσθέτοντας πάντα σταθερά τέσσερα καθίσματα.

Έτσι σύμφωνα με τον ορισμό της αριθμητικής προόδου, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 4$.

β) Έχουμε:

$\alpha_7 = \alpha_1 + (7-1)\cdot\omega \Leftrightarrow 36 = \alpha_1 + 24 \Leftrightarrow \alpha_1 = 36 - 24 \Leftrightarrow \alpha_1 = 12.$

γ) Αφού το γήπεδο έχει δέκα σειρές, τότε το πλήθος των καθισμάτων συνολικά δίνεται από τον τύπο:

$S_{10} = \frac{10}{2}\cdot[2\cdot 12 + (10-1)\cdot 4] = 5\cdot(24+36) = 5\cdot 60 = 300.$

**19. Θέμα 14656 Αρχέτυπο**

Σε μία αριθμητική πρόοδο (αν) δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu = \nu$.

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

α) Είναι:

$$\alpha_6 = 41 + (6-1)\omega \Leftrightarrow 41 + 5\omega = 26 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega = -3.$$

β) Έχουμε:

$$\alpha_\nu = \nu \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = \nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41 + (\nu - 1)(-3) = \nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41 - 3\nu + 3 = \nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 44 = 4\nu \Leftrightarrow \nu = 11.$$

**Θέμα 4 - Κωδικοί:**

**1387, 1395, 1399, 1411, 1417, 1430, 1471, 1488, 1502, 1503, 1507, 12694, 12764, 12945, 13089, 13171, 13173, 14758, 14809, 14927**

## 20. Θέμα 1387 Αρχέτυπο

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η $1^η$ σειρά έχει 16 καθίσματα και η $7^η$ σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. (Μονάδες 4)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; (Μονάδες 5)

δ) Αν στην $1^η$ σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη $2^η$ υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην $3^η$ υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη $2^η$ και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. (Μονάδες 6)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Επειδή το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων $\omega$, οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $(\alpha_\nu)$, με $\alpha_1 = 16$ και διαφορά $\omega$.

Είναι:

$$\alpha_7 = 28 \iff$$

$$\alpha_1 + (7-1)\omega = 28 \iff$$

$$16 + 6\omega = 28 \iff$$

$$6\omega = 12 \iff$$

$$\omega = 2$$

Άρα $\alpha_1 = 16$ και $\omega = 2$.

**β)** Έχουμε:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \iff$$

$$\alpha_\nu = 16 + (\nu-1)2 \iff$$

$$\alpha_\nu = 16 + 2\nu - 2 \iff$$

$$\alpha_\nu = 14 + 2\nu, \quad \text{με } 1 \le \nu \le 20$$

**γ)** Το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου είναι:

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2\alpha_1 + (20-1)\omega] \iff$$

$$S_{20} = 10(2 \cdot 16 + 19 \cdot 2) \iff$$

$$S_{20} = 10(32 + 38) \iff$$

$$S_{20} = 10 \cdot 70 \iff$$

$$S_{20} = 700$$

**δ)** Ο αριθμός των κενών καθισμάτων σε κάθε σειρά είναι αριθμητική πρόοδος ($β_ν$) με $β_1 = 6$ και $ω' = 3$. Ο ν – οστός όρος που εκφράζει το πλήθος των κενών καθισμάτων είναι:

$$β_ν = β_1 + (ν - 1)ω' \Leftrightarrow$$

$$β_ν = 6 + (ν - 1)3 \Leftrightarrow$$

$$β_ν = 6 + 3ν - 3 \Leftrightarrow$$

$β_ν = 3 + 3ν$, με $1 \le ν \le 11$ (διότι τα κενά καθίσματα δεν μπορεί να είναι περισσότερα από τα καθίσματα της κάθε σειράς. Δηλαδή πρέπει $β_ν \le α_ν \Leftrightarrow ν \le 11$)

**i)** Όλα τα καθίσματα της ν-οστής σειράς θα είναι κενά, όταν:

$$β_ν = α_ν \Leftrightarrow$$

$$3 + 3ν = 14 + 2ν \Leftrightarrow$$

$$ν = 11$$

Άρα από την $11^η$ σειρά μέχρι και την $20^η$ όλα τα καθίσματα του θεάτρου είναι κενά.

**ii)** Το πλήθος των κενών καθισμάτων στις 10 πρώτες σειρές είναι:

$$S'_{10} = \frac{10}{2}[2β_1 + (10 - 1)ω'] \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 5(2 \cdot 6 + 9 \cdot 3) \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 5(12 + 27) \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 5 \cdot 39 \Leftrightarrow$$

$$S'_{10} = 195$$

Το πλήθος των καθισμάτων στις 10 πρώτες σειρές είναι:

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2α_1 + (10 - 1)ω] \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 5(2 \cdot 16 + 9 \cdot 2) \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 5(32 + 18) \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 5 \cdot 50 \Leftrightarrow$$

$$S_{10} = 250$$

Ο αριθμός των θεατών που κάθονται στις 10 πρώτες σειρές είναι:

$$S_{10} - S'_{10} = 250 - 195 = 55$$

Αυτός είναι και ο συνολικός αριθμός των θεατών αφού από την $11^η$ σειρά και μετά τα καθίσματα είναι κενά.

**21. Θέμα 1395**

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των *21 €* ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο *30* μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει *51* θέσεις.

Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει *3€* και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει *0,5€* περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

(Μονάδες 4)

β) Αν, για κάθε $\nu \leq 51$ ο αριθμός $\alpha_\nu$ εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο *ν-οστός* επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά $\omega$ αυτής της προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο $51^{ος}$ επιβάτης.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των *21 €* ανά εισιτήριο.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{10201} = 101$) (Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

**α)** Ο δεύτερος επιβάτης θα πληρώσει 3 + 0,5 = 3,5€, ο τρίτος θα πληρώσει 3,5 + 0,5 =4€ και ο τέταρτος θα πληρώσει 4 + 0,5 = 4,5€.

**β)** Δεδομένου ότι ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο, οι αριθμοί $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 0,5$.

**γ)** Ο $51^{ος}$ επιβάτης θα πληρώσει: $\alpha_{51} = 3 + (51 - 1)\cdot 0,5 = 28$€

**δ)** Ζητάμε την μικότερη τιμή του φυσικού αριθμού ν ώστε $S_\nu > 30\cdot 21$. Οπότε έχουμε ισοδύναμα:

$$S_\nu > 30\cdot 21$$

$$\frac{\nu}{2}\left[2\cdot 3+(\nu-1)\cdot 0,5\right] > 630$$

$$\frac{\nu}{2}\left[6+\frac{(\nu-1)}{2}\right] > 630$$

$$\frac{\nu}{2}\left[\frac{12+\nu-1}{2}\right] > 630$$

$$\frac{\nu(11+\nu)}{4} > 630$$

$$\nu^2+11\nu-2520>0 \qquad (1)$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 11^2 - 4(-2520) = 10201$ και ρίζες $\nu = 45$, $\nu = -56$ (απορρίπτεται). Η (1) αληθεύει για φυσικούς αριθμούς $\nu > 45$. Συνεπώς πρέπει να πουληθούν τουλάχιστον 46 εισιτήρια ώστε να συμφέρει η προσφορά.

**22. Θέμα 1399 Αρχέτυπο**

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος $(\alpha_\nu)$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι:

$$\alpha_1 = x, \quad \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4, \quad \alpha_3 = x^2 - 2, \quad \text{όπου } x \in \mathbb{Z},$$

τότε,

α) να αποδειχθεί ότι $x = 3$. (Μονάδες 10)

β) να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014. (Μονάδες 8)

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15}$. (Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Ισχύει ότι: $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 \Leftrightarrow$

$$(2x^2 - 3x - 4) - x = (x^2 - 2) - (2x^2 - 3x - 4) \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \text{ ή } x = -\frac{2}{3} \text{ (απορρίπτεται γιατί δεν είναι ακέραιος)}$$

Άρα $x = 3$ και οι τρεις πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 5$ και $\alpha_3 = 7$

**β)** Η αριθμητική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και διαφορά $\omega = 2$. Άρα ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu = 3 + (\nu - 1)\cdot 2 = 2\nu + 1$

Αν υπάρχει όρος της προόδου ίσος με 2014 θα πρέπει η εξίσωση $\alpha_\nu = 2014$ να έχει λύση φυσικό αριθμό.

Έχουμε λοιπόν: $\alpha_\nu = 2014 \Leftrightarrow$

$2\nu + 1 = 2014 \Leftrightarrow$

$\nu = \dfrac{2013}{2} = 1006,5$ που δεν είναι φυσικός αριθμός

Άρα δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.

**γ)** $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15} = 3 + 7 + 11 + \ldots + 31$

Οι όροι του αθροίσματος είναι όροι αριθμητικής προόδου με $\beta_1 = 3$ και $\omega' = 4$. Πρέπει να βρούμε το πλήθος τους. Έχουμε $\beta_\nu = 31 \Leftrightarrow 3 + (\nu-1)\cdot 4 = 31 \Leftrightarrow 4\nu = 32 \Leftrightarrow \nu = 8$. Οπότε το πλήθος των όρων είναι 8.

Οπότε $S = S_8 = \dfrac{8}{2}\left[2\cdot 3 + (8-1)\cdot 4\right] = 136$

**23. Θέμα 1411**

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το $\nu^{\sigma}$ όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η $20^{\eta}$ κυψέλη; (Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την $3^{\eta}$ κυψέλη; (Μονάδες 6)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

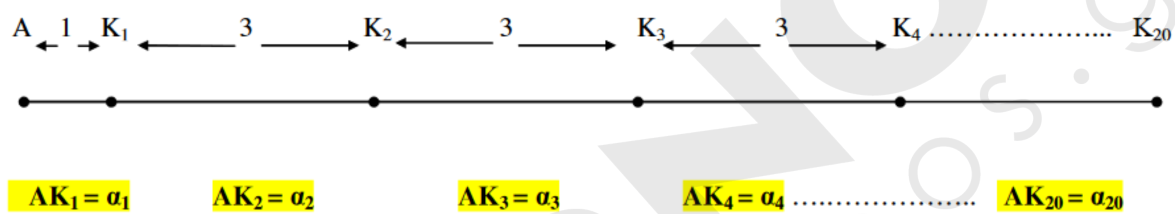
**α)** Οι αποστάσεις ($\alpha_i$), i = 1, 2 ,..., 20 των κυψελών $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$, ..., $K_{20}$ από την αποθήκη Α διαφέρουν πάντα κατά τον σταθερό αριθμό 3. Αποτελούν επομένως διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ (η απόσταση της κυψέλης $K_1$ από την αποθληκη Α) και διαφορά ω = 3 .

Ο $\nu^{ος}$ όρος της προόδου είναι :

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

$$\alpha_\nu = 1 + (\nu - 1)\cdot 3$$

$$\alpha_\nu = 3\nu - 2$$




**β)** Αναζητούμε τον όρο $\alpha_{20}$.

$$\alpha_{20} = 3\cdot 20 - 2 = 58$$

Επομένως η 20η κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α απόσταση 58 m.

**γ) i)** Η διαδρομές που θα κάνει ο μελισσοκόμος είναι:

$$A \to K_1 \to A, \quad A \to K_2 \to A, \quad A \to K_3 \to A$$

Άρα θα διανύσει:

$$(1 + 1) + (4 + 4) + (7 + 7) = 24 \text{ μέτρα}$$

**ii)** Η συνολική απόσταση μέχρι να πάει την 20η κυψέλη είναι $S_{20}$. Επομένως για να γυρίσει πρέπει να διανύσει πάλι απόσταση $S_{20}$. Τελικά η ζητούμενη συνολική απόσταση είναι:

$$2S_{20} = 2 \cdot \frac{20}{2}(\alpha_1 + \alpha_{20}) = 20(1 + 58) = 20 \cdot 59 = 1.180 \text{ μέτρα}$$

**24. Θέμα 1417**

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την $7^η$ μέχρι και την $14^η$ σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

Επειδή κάθε σειρά καθισμάτων έχει 2 καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη, ο αριθμός των καθισμάτων ακολουθεί τους όρους μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $α_1 = 12$ και $ω = 2$.

**α)** Η μεσαία σειρά έχει:

$$α_{13} = α_1 + (13 - 1)ω = 12 + 12 \cdot 2 = 12 + 24 = 36 \text{ καθίσματα}$$

και η τελευταία σειρά έχει:

$$α_{25} = α_1 + (25 - 1)ω = 12 + 24 \cdot 2 = 12 + 48 = 60 \text{ καθίσματα}$$

**β)** Η χωρητικότητα του σταδίου είναι:

$$S_{25} = \frac{25}{2}(α_1 + α_{25}) = \frac{25}{2}(12 + 60) = \frac{25}{2} \cdot 72 = \frac{1800}{2} = 900 \text{ καθίσματα}$$

**γ)** Το πλήθος των μαθητών του Λυκείου είναι:

$$S = S_{14} - S_6 = \frac{14}{2}[2α_1 + (14 - 1)ω] - \frac{6}{2}[2α_1 + (6 - 1)ω] =$$

$$= 7 \cdot (2 \cdot 12 + 13 \cdot 2) - 3 \cdot (2 \cdot 12 + 5 \cdot 2) =$$

$$= 7 \cdot (24 + 26) - 3 \cdot (24 + 10) =$$

$$= 7 \cdot 50 - 3 \cdot 34 = 350 - 102 = 248$$

**25. Θέμα 1430 Αρχέτυπο**

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

(Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Επειδή κάθε όρος που προστίθεται προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού, οι αριθμοί που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 4$.

**β)** Είναι:

$$S_{40} = \frac{40}{2}[2\alpha_1 + (40-1)\omega] =$$
$$= 20(2 \cdot 3 + 39 \cdot 4) = 20(6 + 156) =$$
$$= 20 \cdot 162 = 3240$$

**γ)** Για να είναι ο αριθμός 120 ένας από τους 40 αυτούς αριθμούς, πρέπει να υπάρχει φυσικός αριθμός ν, ώστε:

$$\alpha_\nu = 120 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 120 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 + (\nu - 1)4 = 120 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 + 4\nu - 4 = 120 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\nu = 121 \Leftrightarrow \nu = \frac{121}{4}$$

Ο αριθμός $\frac{121}{4}$ δεν είναι φυσικός και επομένως δεν μπορεί ο αριθμός 120 να είναι όρος της αριθμητικής προόδου.

**δ)** Θα βρούμε ποιος όρος της προόδου είναι ο αριθμός 235. Είναι:

$$\alpha_\nu = 235 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 235 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 + (\nu - 1)4 = 235 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3 + 4\nu - 4 = 235 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\nu = 236 \Leftrightarrow \nu = 59$$

Τότε:

$$S_{59} = \frac{59}{2}(\alpha_1 + \alpha_{59}) = \frac{59}{2}(3 + 235) =$$
$$= \frac{59}{2} \cdot 238 = \frac{14042}{2} = 7021$$

Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S = S_{59} - S_{40} = 7021 - 3240 = 3781$$

**26. Θέμα 1471**

Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$, $\kappa$ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά $\omega$ της προόδου είναι αριθμός περιττός.

(Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό $\kappa$ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$. (Μονάδες 8)

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Είναι:

$$\omega = \alpha_3 - \alpha_2 = (\kappa+1)^2 - \kappa^2 =$$
$$= (\kappa + 1 - \kappa)(\kappa + 1 + \kappa) = 2\kappa + 1 \quad (1)$$

Άρα η διαφορά ω είναι περιττός αριθμός.

**β) i)** Ισχύει ότι:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \kappa^2 = 2 + 2\kappa + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\kappa_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Η τιμή $\kappa = -1$ απορρίπτεται διότι πρέπει $\kappa > 1$. Άρα $\kappa = 3$.

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\omega = 2 \cdot 3 + 1 \Leftrightarrow \omega = 7$$

**ii)** Έχουμε:

$$\alpha_\nu = 1017 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 1017 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 + (\nu - 1)7 = 1017 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 + 7\nu - 7 = 1017 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\nu = 1022 \Leftrightarrow \nu = 511$$

Άρα ο 511ος όρος είναι ίσος με 1017.

**27. Θέμα 1488** **Αρχέτυπο**

Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε $x$ σειρές με $x - 1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του $x$ (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει *90* μαθητές. (Μονάδες 6)

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω *90* μαθητές σε $\nu$ ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε *2* μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του $\nu$, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το πλήθος των μαθητών είναι:

$$x(x-1) \quad \acute{\eta} \quad (x+3)(x-3)-1$$

Πρέπει:

$$x(x-1)=(x+3)(x-3)-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-x=x^2-9-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x=-9-1 \Leftrightarrow x=10$$

**β)** Αντικαθιστούμε στον τύπο $x(x-1)$ όπου $x=10$ και βρίσκουμε:

$$10(10-1)=10\cdot 9=90 \text{ μαθητές}$$

**γ)** Το πλήθος των μαθητών στις ομάδες εργασίας αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου με $\alpha_1=2$, $\omega=2$ και $S_\nu=90$. Τότε:

$$S_\nu=\frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 90=\frac{\nu}{2}[2\cdot 2+(\nu-1)2] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 90=\frac{\nu}{2}(4+2\nu-2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 90=2\nu+\nu^2-\nu \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \nu^2+\nu-90=0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot 1\cdot(-90)=1+360=361>0$$

και ρίζες τις:

$$\nu_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{361}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 19}{2}=\begin{cases}\frac{-1+19}{2}=9\\ \frac{-1-19}{2}=-10\end{cases}$$

Η τιμή $\nu=-10$ απορρίπτεται διότι $\nu\in\mathbb{N}$. Άρα θα δημιουργηθούν $\nu=9$ ομάδες εργασίας.

**28. Θέμα 1502**

Οι αριθμοί : $x^2+5,\ x^2+x,\ 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού *x*. (Μονάδες 6)

β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά $\omega$ της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

iii) Το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \ldots + \alpha_{24}$. (Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Οι αριθμοί $x^2 + 5,\ x^2 + x,\ 2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$x^2 + x = \frac{x^2+5+2x+4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + x) = x^2 + 2x + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = x^2 + 2x + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow (x = -3 \ \text{ή} \ x = 3)$$

**β)** Για $x = 3$ είναι:

$$\alpha_4 = 3^2 + 5 = 14 \text{ και}$$

$$\alpha_5 = 3^2 + 3 = 12\,.$$

**i)** Η διαφορά ω της προόδου είναι:

$$\omega = \alpha_5 - \alpha_4 = 12 - 14 = -2$$

**ii)** Ισχύει ότι:

$$\alpha_4 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + (4-1)\omega = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 3(-2) = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 - 6 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 = 20$$

**iii)** Το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \ldots + \alpha_{24} =$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \ldots + \alpha_{24} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{14}) =$$

$$= S_{24} - S_{14} =$$

$$= \frac{24}{2}[2 \cdot 20 + (24-1) \cdot (-2)] - \frac{14}{2}[2 \cdot 20 + (14-1) \cdot (-2)] =$$

$$= 12(40 - 46) - 7(40 - 26) = -72 - 98 = -170$$

**29. Θέμα 1503** **Αρχέτυπο**

Σε μια αριθμητική πρόοδο $(\alpha_\nu)$, ο $3^{ος}$ όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο $8^{ος}$ όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο $1^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τον $31^{ο}$ όρο της. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \ldots + (\alpha_{31} + 31)$ (Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Είναι:

$$\alpha_3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + (3-1)\omega = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 8 - 2\omega \quad (1)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\alpha_8 = 23 \Leftrightarrow \alpha_1 + (8-1)\omega = 23 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + 7\omega = 23 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 8 - 2\omega + 7\omega = 23 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = 3$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = 8 - 2 \cdot 3 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$$

**β)** Είναι:

$$\alpha_{31} = \alpha_1 + (31-1)\omega =$$

$$= 2 + 30 \cdot 3 = 2 + 90 = 92$$

**γ)** Έχουμε:

$$S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + ... + (\alpha_{31} + 31) =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{31}) + (1 + 2 + 3 + \ldots + 31) = S_1 + S_2$$

όπου

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{31} = \frac{31}{2}[2 \cdot 2 + (31-1) \cdot 3] = \frac{31}{2}(4 + 30 \cdot 3) = \frac{31}{2} \cdot 94 = 1457$$

$$S_2 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 31 = \frac{31}{2}(1 + 31) = \frac{31}{2} \cdot 32 = 496$$

Τελικά:

$$S = 1497 + 496 = 1953$$

**30. Θέμα 1507 Αρχέτυπο**

Δίνεται αριθμητική πρόοδος $(\alpha_\nu)$ με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι $x$ και $y$ της παραπάνω προόδου $(\alpha_\nu)$, τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$. (Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Είναι:

$$\alpha_3 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + (3-1)\omega = 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 = 10 - 2\omega \quad (1)$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\alpha_{20} = 61 \Leftrightarrow \alpha_1 + (20-1)\omega = 61 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 10 - 2\omega + 19\omega = 61 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 17\omega = 51 \Leftrightarrow \omega = 3$$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = 10 - 2 \cdot 3 = 4$$

**β)** Έχουμε:

$$\alpha_\nu = 333 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 333 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 + (\nu-1)3 = 333 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 + 3\nu - 3 = 333 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\nu = 332 \Leftrightarrow \nu = \frac{332}{3}$$

Ο αριθμός $\frac{332}{3}$ δεν είναι φυσικός και επομένως ο 333 δεν μπορεί να είναι όρος της αριθμητικής προόδου.

**γ)** Έστω ότι οι x, y είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με x < y. Τότε ισχύει ότι:

$$y = \omega + x \quad (2)$$

Είναι:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2} = \frac{\omega+x}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2(\omega + x) \Leftrightarrow 3x = 2\omega + 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2\omega \Leftrightarrow x = 6$$

Ο αριθμός 6 δεν είναι όρος της αριθμητικής προόδου αφού θα έπρεπε να υπάρχει φυσικός αριθμός ν ώστε να ισχύει:

$\alpha_\nu = 6 \Leftrightarrow 4 + (\nu - 1)\, 3 = 6 \Leftrightarrow 3\nu = 5 \Leftrightarrow \nu = \frac{5}{3}$, που δεν είναι φυσικός αριθμός.

**31. Θέμα 12694**

Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά $\omega$ της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά $\omega$ στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 3 + 4)

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.

(Μονάδες 6)

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

(Μονάδες 6)

**ΛΥΣΗ**

α) Το χρονικό όριο του επιπέδου 1 είναι $\alpha_1 = 300$ δευτερόλεπτα και του επιπέδου 4 είναι $\alpha_4 = 255$ δευτερόλεπτα. Σε μια αριθμητική πρόοδο ο γενικός όρος δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \text{, οπότε}$$

$$\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega \text{, δηλαδή}$$

$$255 = 300 + 3\omega \text{, οπότε}$$

$$\omega = -15.$$

Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνει το επίπεδο δυσκολίας (από 1 σε 2, από 2 σε 3, από 3 σε 4, κ.ο.κ) το χρονικό όριο που έχει ο παίκτης για να το ολοκληρώσει ελαττώνεται (σταθερά) κατά 15 δευτερόλεπτα κάθε φορά.

β) Αν τα επίπεδα είναι στο σύνολό τους $\nu$, τότε $\alpha_\nu = 45$ (το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων) και ζητάμε την τιμή του $\nu$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
&\alpha_\nu = 45 \quad \Leftrightarrow \\
&\alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 45 \quad \Leftrightarrow \\
&300 + (\nu - 1)(-15) = 45 \quad \Leftrightarrow \\
&300 - 15\nu + 15 = 45 \quad \Leftrightarrow \\
&15\nu = 270 \quad \Leftrightarrow \\
&\nu = 18
\end{aligned}$$

Άρα το παιχνίδι ολοκληρώνεται σε 18 επίπεδα.

γ) Ο μέγιστος επιτρεπόμενος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι θα προκύψει αν προσθέσουμε το μέγιστο χρονικό όριο και των 18 επιπέδων του παιχνιδιού, δηλαδή

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{18} = S_{18}.$$

Στην αριθμητική πρόοδο ισχύει η σχέση:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)\text{, συνεπώς}$$

$$S_{18} = \frac{18}{2}(\alpha_1 + \alpha_{18})\text{, οπότε τελικά}$$

$$S_{18} = 9(300+45) = 9 \cdot 345 = 3105.$$

Ο μέγιστος χρόνος που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι είναι 3105 δευτερόλεπτα (δηλαδή 51 λεπτά και 45 δευτερόλεπτα).

δ) Αν $\beta_1 = 147$ είναι ο χρόνος που χρειάζεται ο παίκτης για να ολοκληρώσει το επίπεδο 1, $\beta_\nu$ είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να ολοκληρώσει το επίπεδο $\nu$ και $(\beta_\nu)$ είναι αριθμητική πρόοδος με $\beta_1 = 147$ και $\omega = 3$. Θέλουμε να ελέγξουμε αν ο χρόνος που χρειάζεται ο παίκτης για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο είναι μικρότερος ή ίσος από τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο κάθε επιπέδου.

Θέλουμε τη μέγιστη τιμή του $\nu \in \mathbb{N}$, ώστε $\beta_\nu \le \alpha_\nu$. Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
&147 + (\nu - 1)3 \le 300 + (\nu - 1)(-15) \quad \Leftrightarrow \\
&144 + 3\nu \le 315 - 15\nu \quad \Leftrightarrow \\
&18\nu \le 171 \quad \Leftrightarrow \\
&\nu \le \frac{171}{18} \quad \Leftrightarrow \\
&\nu \le 9{,}5
\end{aligned}$$

Άρα η μέγιστη τιμή του $\nu$ είναι 9, που σημαίνει ότι ο παίκτης, με το ρυθμό που παίζει, θα ολοκληρώσει μόνο 9 από τα 18 επίπεδα του παιχνιδιού.

**32. Θέμα 12764**

Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν $a_\nu$ το πλήθος των καθισμάτων της ν - οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι $a_\nu$ είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο $\alpha_1$ και τη διαφορά $\omega$.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

(Μονάδες 9)

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

(Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

α) Ισχύει ότι $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+2$, άρα είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω=2.

Σε μία αριθμητική πρόοδο ισχύει ότι:

$$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega, \text{ άρα}$$

$$a_{10}=a_1+9\omega, \text{ οπότε}$$

$$a_1=\alpha_{10}-9\omega=50-9\cdot 2=32.$$

Συνεπώς ισχύει ότι $\alpha_1 = 32$ και ω=2.

β) Σε μία αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι ίσο με:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega).$$

Επομένως για ν = 40 έχουμε:

$$S_{40} = \frac{40}{2}(2 \cdot 32 + 39 \cdot 2) = 20(64 + 78) = 20 \cdot 142 = 2.840.$$

Συνεπώς, το σύνολο των καθισμάτων της κερκίδας είναι 2.840.

γ) Η 1η σειρά καθισμάτων έχει 32 καθίσματα, η 2η 34 και η 3η 36. Αν οι θεατές μπορούν να καθίσουν μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων, τότε δημιουργείται μία αριθμητική πρόοδος με $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_3$,... με πρώτο όρο $\beta_1 = 32$ και διαφορά $\delta=4$.

Το πλήθος των όρων αυτής της αριθμητικής προόδου που πρέπει να καταμετρηθεί είναι οι 20 πρώτοι όροι, καθώς σε 40 σειρές καθισμάτων οι μισές θα είναι περιττές.

Οπότε το πλήθος των θεατών που μπορούν να καθίσουν στην κερκίδα είναι:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \cdot 32 + 19 \cdot 4) = 10(64 + 76) = 10 \cdot 140 = 1.400.$$

**33. Θέμα 12945 Αρχέτυπο**

Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο $(\alpha_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο $(\beta_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του $56$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε αν ο αριθμός $\beta_2$ περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.

(Μονάδες 8)

γ) Αν το άθροισμα των $2\nu$ πρώτων όρων της $(\alpha_\nu)$ είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της $(\beta_\nu)$ να βρείτε τον αριθμό ν.

(Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

α) Ισχύουν: $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$, οπότε $\alpha_1 + 2\omega = 8$, (1) και $\alpha_1 + 10\omega = 32$, (2).

Αν από την (2) αφαιρέσουμε την (1) βρίσκουμε

$$8\omega = 24 \Rightarrow \omega = 3$$

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε

$$\alpha_1 + 6 = 8 \Rightarrow \alpha_1 = 2$$

β) Η πρόοδος $(\beta_\nu)$ έχει πρώτο όρο $\beta_1 = 57$ και διαφορά $\omega' = 2$ οπότε $\beta_2 = 57 + 2 = 59$ και

$$\alpha_\nu = \beta_2 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 59 \Leftrightarrow 2 + 3(\nu - 1) = 59 \Leftrightarrow 3\nu = 60 \Leftrightarrow \nu = 20$$

Επομένως ο εικοστός όρος της πρώτης προόδου είναι ίσος με τον δεύτερο όρο της δεύτερης.

γ) Το άθροισμα των $2\nu$ πρώτων όρων της $(\alpha_\nu)$ είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της $(\beta_\nu)$, οπότε έχουμε: $[2\alpha_1 + (2\nu - 1)\cdot 3]\cdot\frac{2\nu}{2} = [2\beta_1 + (\nu - 1)\cdot 2]\cdot\frac{\nu}{2}$, απ' όπου, με αντικατάσταση των πρώτων όρων, παίρνουμε $2\cdot 2 + (2\nu - 1)\cdot 3 = 2(57 + \nu - 1)\cdot\frac{1}{2}$.

Η τελευταία ισότητα γράφεται $4 + 6\nu - 3 = 57 + \nu - 1$, απ' όπου προκύπτει ότι $5\nu = 55$, δηλαδή $\nu = 11$, που είναι η ζητούμενη τιμή του ν.

**34. Θέμα 13089**

Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ!

Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α)

i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου $(\alpha_\nu)$ της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο $\alpha_\nu$, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

(Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου $(\beta_\nu)$ της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο $\beta_\nu$, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

(Μονάδες 5)

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_\nu = \beta_{8-\nu}$ για κάθε $\nu = 1, 2, \dots, 7$.

(Μονάδες 5)

**ΛΥΣΗ**

α)

i. Η ακολουθία $(\alpha_\nu)$ είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της, πέραν του 1ου, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού 2, με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 2$ οπότε ο γενικός της όρος είναι

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega = 1 + (\nu-1)\cdot 2 = 1 + 2\nu - 2 = 2\nu - 1.$$

ii. Η ακολουθία $(\beta_\nu)$ είναι αριθμητική πρόοδος αφού κάθε όρος της, πέραν του 1ου, προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του αριθμού -2, με $\beta_1 = 13$ και $\omega = -2$ οπότε ο γενικός της όρος είναι

$$\beta_\nu = \beta_1 + (\nu-1)\cdot\omega = 13 + (\nu-1)\cdot(-2) = 13 - 2\nu + 2 = 15 - 2\nu.$$

β) Έστω ότι διάβασε το βιβλίο σε $\nu$ μέρες. Τότε $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu$ δηλαδή :

$$\frac{(2\cdot 1 + (\nu-1)\cdot 2)\cdot\nu}{2} = \frac{(2\cdot 13 + (\nu-1)\cdot(-2))\cdot\nu}{2}$$

και ισοδύναμα: $\dfrac{(2 + 2\nu - 2)\cdot\nu}{2} = \dfrac{(26 - 2\nu + 2)\cdot\nu}{2}$,

δηλαδή $\dfrac{2\nu\cdot\nu}{2} = \dfrac{(28 - 2\nu)\cdot\nu}{2}$.

Και αφού $\nu \neq 0$, θα είναι $2\nu = 28 - 2\nu$, δηλαδή $4\nu = 28$ και τελικά $\nu = 7$.

γ) Προφανώς ανεξάρτητα από τον τρόπο που διάβασε το βιβλίο, το πλήθος των σελίδων του βιβλίου είναι το $S_7 = \dfrac{(2\cdot 1 + (7-1)\cdot 2)\cdot 7}{2} = 49$.

δ) Για κάθε $\nu = 1, 2, \ldots, 7$,

είναι $\beta_{8-\nu} = \beta_1 + (8 - \nu - 1)\cdot(-2) = 13 - 16 + 2\nu + 2 = 2\nu - 1 = \alpha_\nu$.

**35. Θέμα 13171**

Το άθροισμα των $\nu$ πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας $(\alpha_\nu)$ είναι

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = S_\nu = 2\nu^2 + 3\nu$, $\nu \in N$ με $\nu \geq 1$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο $\alpha_1$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1} = 2\nu^2 - \nu - 1$, $\nu \geq 2$

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 4\nu + 1$, $\nu \geq 1$

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά $\omega$.

(Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

α) Προφανώς $\alpha_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5$.

β) Θέτοντας όπου $\nu$ το $\nu - 1$, παίρνουμε: $S_{\nu-1} = 2(\nu-1)^2 + 3(\nu-1) =$

$2(\nu^2 - 2\nu + 1) + 3\nu - 3 = 2\nu^2 - 4\nu + 2 + 3\nu - 3 = 2\nu^2 - \nu - 1$ για κάθε $\nu \geq 2$.

γ) Για κάθε $\nu \geq 2$, έχουμε $\alpha_\nu = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{\nu-1}) =$

$S_\nu - S_{\nu-1} = 2\nu^2 + 3\nu - (2\nu^2 - \nu - 1) = 2\nu^2 + 3\nu - 2\nu^2 + \nu + 1 = 4\nu + 1$.

Αλλά $\alpha_1 = 5 = 4 \cdot 1 + 1$. Ώστε $\alpha_\nu = 4\nu + 1$, για κάθε $\nu \geq 1$.

δ) Για να είναι η ακολουθία $(\alpha_\nu)$ αριθμητική πρόοδος, θα πρέπει η διαφορά δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων να είναι σταθερή.

Πράγματι: $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = [4(\nu+1)+1] - [4\nu+1] = 4\nu + 4 + 1 - 4\nu - 1 = 4$

Άρα η διαφορά ω είναι ίση με 4.

**36. Θέμα 13173 Αρχέτυπο**

Δίνεται η ακολουθία ($\alpha_\nu$) με γενικό τύπο $\alpha_\nu = 10 + 3\nu$.

α)

i. Να δείξετε ότι η ακολουθία ($\alpha_\nu$) είναι αριθμητική πρόοδος.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της $\alpha_1$ και τη διαφορά $\omega$ της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε ποιοι όροι της ($\alpha_\nu$) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

(Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α) Η ακολουθία ($\alpha_\nu$) είναι αριθμητική πρόοδος, διότι η διαφορά δυο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της είναι σταθερή:

$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = [10 + 3(\nu+1)] - (10 + 3\nu) = 10 + 3\nu + 3 - 10 - 3\nu = 3$.

Ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 10 + 3 \cdot 1 = 13$ και η διαφορά $\omega = 3$.

β) Πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές του $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
&14 < \alpha_\nu < 401 \quad \Leftrightarrow \\
&14 < 10 + 3\nu < 401 \quad \Leftrightarrow \\
&4 < 3\nu < 391 \quad \Leftrightarrow \\
&\frac{4}{3} < \nu < \frac{391}{3} \quad \Leftrightarrow \\
&1,\overline{3} < \nu < 130,\overline{3}
\end{aligned}$$

Οι όροι της αριθμητικής προόδου που είναι μεταξύ των αριθμών 14 και 401, είναι οι $\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{130}$ που είναι 129 όροι.

γ) Έχουμε:

$$\alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_{130} = S_{130} - \alpha_1 = \frac{130}{2}(2\alpha_1 + 129 \cdot \omega) - \alpha_1 = 65(2 \cdot 13 + 129 \cdot 3) - 13 = 26832,$$

ή εναλλακτικά, αν θεωρήσουμε τον $\alpha_2$ πρώτο όρο, έχουμε άθροισμα 129 πρώτων όρων και:

$$\alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_{130} = S_{129} = \frac{129}{2}(2a_2 + 128\omega) = 129(\alpha_2 + 64\omega) = 129(\alpha_1 + \omega + 64\omega) =$$
$$= 129(\alpha_1 + 65\omega) = 129(13 + 65 \cdot 3) = 26832.$$

Τα Θέματα «**Αρχέτυπο**» είναι επιλεγμένες ασκήσεις και αποτελούν τη **βάση για τη μελέτη και την κατανόηση** του μαθητή, ώστε να είναι σε θέση να διαχειρίζεται επιτυχώς κάθε άσκηση της Τράπεζας. Παρουσιάζονται σε αναλυτική video-διδασκαλία στο **Course Άλγεβρα Α' Λυκείου** της ιστοσελίδα arnos.gr.

**37. Θέμα 14758**

Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν $5$ τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν $13$ νέα οχήματα.

α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου;

(Μονάδες 6)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια;

(Μονάδες 6)

δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το $250^{o}$ αυτοκίνητο;

(Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

α) Στο τέλος του $1^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα $5$ αυτοκίνητα.

Στο τέλος του $2^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα $18$ αυτοκίνητα.

Στο τέλος του $3^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα $31$ αυτοκίνητα.

Στο τέλος του $4^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα $44$ αυτοκίνητα.

Στο τέλος του $5^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα $57$ αυτοκίνητα και στο τέλος του $6^{ου}$ μήνα θα είναι κατασκευασμένα $70$ αυτοκίνητα.

β) Τα αυτοκίνητα που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 5$ και διαφορά $\omega = 13$ (τα αυτοκίνητα που κατασκευάζονται κάθε μήνα αυξάνονται σταθερά κατά 13).

γ) Τα τέσσερα πρώτα χρόνια (στο τέλος του $48^{ου}$ μήνα δηλαδή) θα έχουν κατασκευαστεί:

$$\alpha_{48} = \alpha_1 + 47\omega = 5 + 47 \cdot 13 = 616 \text{ αυτοκίνητα.}$$

δ) Ζητάμε τον φυσικό αριθμό $\nu$ για τον οποίο ισχύει:

$$\alpha_\nu \geq 250 \text{, δηλαδή}$$

$$5+(\nu-1)13 \geq 250 \text{, οπότε}$$

$$(\nu-1) \geq \frac{245}{13} \text{, δηλαδή}$$

$$\nu \geq \frac{245}{13}+1 \text{ και τελικά}$$

$$\nu \geq 19\frac{11}{13}.$$

Οπότε μετά από $20$ μήνες θα έχει κατασκευαστεί το $250^{\circ}$ αυτοκίνητο.

**38. Θέμα 14809** **Αρχέτυπο**

Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ…

α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο $(\alpha_\nu)$ με $\alpha_1=5$ και να βρείτε τη διαφορά της.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για $23^{\eta}$ φορά το γράμμα Β.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην $200^{\eta}$ θέση στην παραπάνω διαδοχή.

(Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

α) Το γράμμα Β υπάρχει ακριβώς μια φορά στη λέξη «ΑΛΓΕΒΡΑ». Την πρώτη φορά που το συναντάμε είναι στην $5^η$ θέση της διαδοχής και επειδή η λέξη έχει 7 γράμματα, η δεύτερη εμφάνιση του γράμματος Β είναι στην $12^η$ θέση και κάθε εμφάνισή του είναι 7 θέσεις μετά την προηγούμενη. Έτσι, η ακολουθία που σχηματίζουν οι θέσεις που συναντάμε το γράμμα Β είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 5$ και $\omega = 7$.

β) Αρκεί να βρούμε τον $23^ο$ όρο της προόδου. Είναι:

$$\alpha_{23} = \alpha_1 + 22\omega = 5 + 22 \cdot 7 = 5 + 154 = 159$$

Επομένως, η $23^η$ φορά που συναντάμε το γράμμα Β είναι στην $159^η$ θέση.

γ) Αν διαιρέσουμε τον αριθμό 200 με το 7, βρίσκουμε πηλίκο 28 και υπόλοιπο 4, οπότε $200 = 7 \cdot 28 + 4$. Έτσι, μέχρι την $196^η$ θέση έχουμε 28 φορές επανάληψη της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ» οπότε το γράμμα που βρίσκεται στην $200^η$ θέση είναι το $4^ο$ γράμμα της λέξης, δηλαδή είναι το γράμμα Ε.

**39. Θέμα 14927**

Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για $50$ καλεσμένους είναι $6560$ ευρώ, ενώ για $100$ καλεσμένους είναι $11910$ ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου $(\alpha_\nu)$.

α) Να δείξετε ότι το κόστος για $\nu$ καλεσμένους είναι $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$. (1)

(Μονάδες 9)

β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία

i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1).

(Μονάδες 5)

ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για $80$ καλεσμένους.

(Μονάδες 6)

**ΛΥΣΗ**

α) Το κόστος για $50$ καλεσμένους είναι $6560$ ευρώ, δηλαδή:

$$\alpha_{50} = 6560.$$

Το κόστος για $100$ καλεσμένους είναι $11910$ ευρώ, δηλαδή:

$$\alpha_{100} = 11910.$$

Οπότε:

$$\alpha_1 + 49\omega = 6560 \text{ και}$$

$$\alpha_1 + 99\omega = 11910.$$

Αφαιρώντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$50\omega = 5350 \text{ και τελικά}$$

$$\omega = 107.$$

Άρα

$$\alpha_1 + 49\omega = 6560 \Leftrightarrow$$
$$\alpha_1 + 49 \cdot 107 = 6560 \Leftrightarrow$$
$$\alpha_1 + 5243 = 6560 \Leftrightarrow$$
$$\alpha_1 = 1317.$$

Συνεπώς το κόστος για $\nu$ καλεσμένους είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1) \cdot \omega = 1317 + (\nu - 1) \cdot 107 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_\nu = 107\nu + 1210.$$

β)

i. Όπως δείξαμε στο α) ερώτημα, $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$ είναι το κόστος για $\nu$ καλεσμένους. Ακόμα και αν δεν εμφανιστεί καλεσμένος στο γάμο, ο χώρος δεξίωσης θα κοστίσει στους ενδιαφερόμενους $1210$ ευρώ.

ii. Έχουμε:

$$\alpha_1 = 107 \cdot 1 + 1210.$$

$$\alpha_2 = 107 \cdot 2 + 1210 = \alpha_1 + 107.$$

$$\alpha_3 = 107 \cdot 3 + 1210 = 107 \cdot (2 + 1) + 1210 = 107 \cdot 2 + 1210 + 107 = \alpha_2 + 107, \text{ κοκ.}$$

Οπότε κάθε φορά που το πλήθος των καλεσμένων αυξάνει κατά ένα άτομο το κόστος της δεξίωσης του γάμου θα αυξάνει κατά $107$ ευρώ.

γ) Το κόστος για $80$ καλεσμένους θα είναι $\alpha_{80} = 107 \cdot 80 + 1210 = 9770$ ευρώ.