Κεφ. 5.1. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 4 - Κωδικοί:

13056, 13171

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. **Θέμα 13056** **Αρχέτυπο**

Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.

.	. . .	. . . . . .	. . . .	...
1	3	6	10	...

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_\nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α) Να βρείτε τον $10^{\text{ο}}$ τριγωνικό αριθμό.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Ο δέκατος τριγωνικός αριθμός είναι

$$T_{10} = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

β) Ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός μόνο όταν η εξίσωση $T_\nu = 120$ έχει λύση θετικό ακέραιο αριθμό. Είναι:

$$T_\nu = 120 \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu+1)}{2} = 120 \Leftrightarrow \nu(\nu+1) = 240 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 240 = 0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = 961$ και οι ρίζες της

$$\nu_{1,2} = \frac{-1 \pm 31}{2} = \begin{cases} \nu_1 = \dfrac{30}{2} = 15 \\ \nu_2 = -\dfrac{32}{2} = -16 \end{cases}$$

Από τις ρίζες της εξίσωσης δεκτή είναι μόνο ο αριθμός 15. Άρα ο αριθμός 120 είναι ο δέκατος πέμπτος τριγωνικός αριθμός $(T_{15} = 120)$.

γ) Έστω T_ν, $T_{\nu+1}$ δυο διαδοχικοί τριγωνικοί αριθμοί με ν θετικό ακέραιο. Τότε έχουμε:

$$T_\nu + T_{\nu+1} = \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2} = \frac{1}{2}(\nu+1)(\nu+\nu+2) = \frac{1}{2}(\nu+1) \cdot 2(\nu+1) = (\nu+1)^2$$

οπότε το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

2. Θέμα 13171 **Αρχέτυπο**

Το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = S_\nu = 2\nu^2 + 3\nu$, $\nu \in N$ με $\nu \geq 1$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1} = 2\nu^2 - \nu - 1, \nu \geq 2$

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $a_\nu = 4\nu + 1, \nu \geq 1$

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Προφανώς $\alpha_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 5$.

β) Θέτοντας όπου ν το $\nu - 1$, παίρνουμε: $S_{\nu-1} = 2(\nu-1)^2 + 3(\nu-1) =$

$2(\nu^2 - 2\nu + 1) + 3\nu - 3 = 2\nu^2 - 4\nu + 2 + 3\nu - 3 = 2\nu^2 - \nu - 1$ για κάθε $\nu \geq 2$.

γ) Για κάθε $\nu \geq 2$, έχουμε $a_\nu = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{\nu-1} + a_\nu) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{\nu-1}) =$

S_ν - $S_{\nu-1}$ = $2\nu^2 + 3\nu - (2\nu^2 - \nu - 1)$ = $2\nu^2 + 3\nu - 2\nu^2 + \nu + 1$ = $4\nu + 1$.

Αλλά $\alpha_1 = 5 = 4 \cdot 1 + 1$. Ώστε $a_\nu = 4\nu + 1$, για κάθε $\nu \geq 1$.

δ) Για να είναι η ακολουθία (α_ν) αριθμητική πρόοδος, θα πρέπει η διαφορά δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων να είναι σταθερή.

Πράγματι: $\alpha_{\nu+1} - a_\nu = [4(\nu+1) + 1] - [4\nu + 1] = 4\nu + 4 + 1 - 4\nu - 1 = 4$

Άρα η διαφορά ω είναι ίση με 4.