# Κεφ. 4.2. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Α' Λυκείου

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

**Θέμα 2 - Κωδικοί:**

**1271, 1273, 1277, 1279, 1291, 1300, 1306, 1350, 1356,**

**1363, 12722, 12976, 13321, 14189, 14474, 14577**

Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

### 1. Θέμα 1271

Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-16\le 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2). (Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

**α)** • Το τριώνυμο $-x^2 + 5x - 6$ έχει $\alpha = -1$, $\beta = 5$, $\gamma = -6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6) = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-5+1}{-2} = 2 \\ \frac{-5-1}{-2} = 3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| x | $-\infty$ | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2 + 5x - 6$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

Επομένως ισχύει:

$$-x^2 + 5x - 6 < 0 \Leftrightarrow (x < 2 \ \text{ή} \ x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

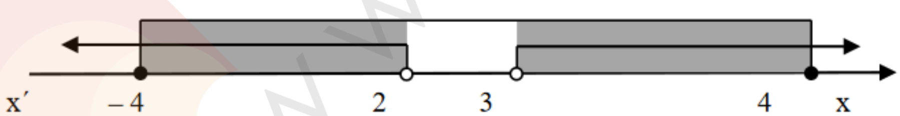
• Την ανίσωση $x^2 - 16 \leq 0$ θα τη λύσουμε με συντομότερο τρόπο. Ισχύει ότι:

$$x^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{16} \Leftrightarrow |x| \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-4, 4]$$

**β)** Παριστάνουμε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:




οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-4 \leq x < 2 \ \text{ή} \ 3 < x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-4, 2) \cup (3, 4]$$

**2. Θέμα 1273**

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$ (Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο (Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$ έχει $\alpha=-1$, $\beta=\sqrt{3}-1$, $\gamma=\sqrt{3}$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(\sqrt{3}-1\right)^2-4\cdot(-1)\cdot\sqrt{3}=$$

$$=\sqrt{3}^2-2\sqrt{3}+1^2+4\sqrt{3}=$$

$$=\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}+1^2=\left(\sqrt{3}+1\right)^2>0$$

**β)** Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(\sqrt{3}-1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2\cdot(-1)}=\frac{1-\sqrt{3}\pm(\sqrt{3}+1)}{-2}=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1}{-2}=-1\\[2mm]\dfrac{1-\sqrt{3}-\sqrt{3}-1}{-2}=\sqrt{3}\end{cases}$$

Επομένως:

$$-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}=-(x-(-1))\left(x-\sqrt{3}\right)=-(x+1)\left(x-\sqrt{3}\right)$$

**3. Θέμα 1277 Αρχέτυπο**

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-10x+21<0$ (Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση: $A=|x-3|+|x^2-10x+21|$

i) Για $3<x<7$, να δείξετε ότι: $A=-x^2+11x-24$ (Μονάδες 8)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x\in(3,7)$, για τις οποίες ισχύει $A=6$. (Μονάδες 5)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $x^2-10x+21$ έχει $\alpha=1$, $\beta=-10$, $\gamma=21$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-10)^2-4\cdot1\cdot21=100-84=16>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{10\pm4}{2}=\begin{cases}\frac{10+4}{2}=7\\ \frac{10-4}{2}=3\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | 3 | | 7 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-10x+21$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

Επομένως ισχύει:

$$x^2-10x+21<0 \Leftrightarrow 3<x<7 \Leftrightarrow x\in(3,7)$$

**β) i)** Για $3 < x < 7$ είναι $x - 3 > 0$, οπότε:

$$|x - 3| = x - 3$$

και από το σκέλος (α) ισχύει $x^2 - 10x + 21 < 0$, οπότε:

$$|x^2 - 10x + 21| = -(x^2 - 10x + 21) = -x^2 + 10x - 21$$

Τότε η παράσταση Α γράφεται:

$$A = x - 3 - x^2 + 10x - 21 = -x^2 + 11x - 24$$

**ii)** Είναι:

$$A = 6 \Leftrightarrow -x^2 + 11x - 24 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 30 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30 = 121 - 120 = 1 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{11+1}{2} = 6 \\ \frac{11-1}{2} = 5 \end{cases}$$

Οι ρίζες $x = 5$, $x = 6$ είναι και οι δύο δεκτές διότι ανήκουν στο διάστημα $(3, 7)$.

**4. Θέμα 1279 Αρχέτυπο**

α) Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$. (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha$, $\beta$ δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης. (Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $3x^2 - 4x + 1$ έχει $\alpha = 3$, $\beta = -4$, $\gamma = 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{4+2}{6} = 1 \\ \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2 - 4x + 1$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Επομένως ισχύει:

$$3x^2 - 4x + 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le x \le 1 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

**β)** Αφού οι αριθμοί α, β είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης ισχύει ότι:

$$\alpha \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le \alpha \le 1 \text{ και}$$

$$\beta \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le \beta \le 1$$

Τότε:

$$\frac{1}{3} \le \alpha \le 1 \Leftrightarrow 1 \le 3\alpha \le 3 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{3} \le \beta \le 1 \Leftrightarrow 2 \le 6\beta \le 6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$1 + 2 \le 3\alpha + 6\beta \le 3 + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \le 3\alpha + 6\beta \le 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{9} \le \frac{3\alpha + 6\beta}{9} \le \frac{9}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \le \frac{3\alpha + 6\beta}{9} \le 1$$

Άρα και ο αριθμός $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι λύση της ανίσωσης.

**5. Θέμα 1291**

α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (Μονάδες 8)

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 12)

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

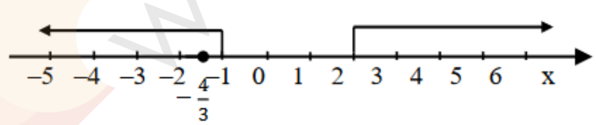
**β)** Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - x - 2$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 2) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

**γ)**




Το $-\frac{4}{3}$ ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -1)$, οπότε είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

**6. Θέμα 1300 Αρχέτυπο**

α) Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό $x$. (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$$ (Μονάδες 15)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $x^2+4x+5$ έχει $\alpha=1$, $\beta=4$, $\gamma=5$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot 1\cdot 5=16-20=-4<0$$

Επειδή $\alpha=1>0$, ισχύει ότι:

$$x^2+4x+5>0,$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

**β)** Είναι $x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$. Τότε:

$$B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow B=x^2+4x+5-(x^2+4x+4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B=x^2+4x+5-x^2-4x-4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B=1$$

**7. Θέμα 1306**

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=3x^2+9x-12$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $3x^2+9x-12$ έχει $\alpha=3$, $\beta=9$, $\gamma=-12$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9^2-4\cdot 3\cdot(-12)=81+144=225>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

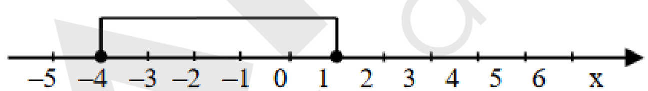
$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-9\pm\sqrt{225}}{2\cdot 3}=\frac{-9\pm 15}{6}=\begin{cases}\frac{-9+15}{6}=1\\ \frac{-9-15}{6}=-4\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| x | $-\infty$ | | $-4$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2+9x-12$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

Επομένως ισχύει:

$$f(x)\le 0 \Leftrightarrow 3x^2+9x-12\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4\le x\le 1 \Leftrightarrow x\in[-4,1]$$




**β)** Ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης αν και μόνο αν:

$$-4\le\sqrt[3]{2}\le 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}\le 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2}\right)^3\le 1^3 \Leftrightarrow 2\le 1, \text{ άτοπο}$$

Άρα ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ δεν είναι λύση της ανίσωσης

**8. Θέμα 1350**

α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5| \le 3$ και $2x^2 - x - 1 \ge 0$ (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Είναι:

$$|2x-5| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le 2x-5 \le 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3+5 \le 2x-5+5 \le 3+5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 \le 2x \le 8 \Leftrightarrow \frac{2}{2} \le \frac{2x}{2} \le \frac{8}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 \le x \le 4 \quad (1)$$

Το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1+3}{4} = 1 \\ \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

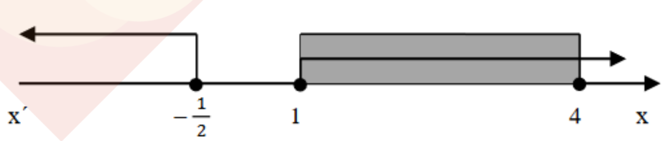
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2 - x - 1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Επομένως ισχύει:

$$2x^2 - x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \left(x \le -\frac{1}{2} \text{ ή } x \ge 1\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty) \quad (2)$$

**β)** Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών:




Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$1 \le x \le 4 \Leftrightarrow x \in [1, 4]$$

**9. Θέμα 1356**

Δίνεται το τριώνυμο *$2x^2$-3x+1*.

α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$ (Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2-3x+1<0$

(Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = 1$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{3+1}{4} = 1 \\ \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

**β)** Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| x | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2 - 3x + 1$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

Επομένως ισχύει:

$$2x^2 - 3x + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

**γ)** • Ο αριθμός $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ διότι:

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1^2 < \sqrt{3}^2 < 2^2 \Leftrightarrow 1 < 3 < 4, \text{ ισχύει}$$

• Ο αριθμός $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ διότι:

$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1^2 < \sqrt{2}^2 < 2^2 \Leftrightarrow 1 < 2 < 4, \text{ ισχύει}$$

Τελικά οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

**10. Θέμα 1363 Αρχέτυπο**

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$ (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος. (Μονάδες7)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Είναι:

$$\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5|x+1| - 3(|x+1| + 4) = 5 \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5|x+1| - 3|x+1| - 12 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|x+1| = 22 \Leftrightarrow |x+1| = 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 1 = -11 \text{ ή } x + 1 = 11) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = -12 \text{ ή } x = 10)$$

**β)** Το τριώνυμο $-x^2 + 2x + 3$ έχει $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{-2} = -1 \\ \frac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2 + 2x + 3$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

Επομένως ισχύει:

$$-x^2 + 2x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x \leq -1 \text{ ή } x \geq 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

**γ)** Ο αριθμός $-12$ ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και ο αριθμός 10 ανήκει στο διάστημα $[3, +\infty)$. Συνεπώς και οι δύο αριθμοί είναι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης.

**11. Θέμα 12722**

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$

α)Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$ (Μονάδες 12)

β)Να επιλύσετε την ανίσωση $-2 \cdot f(x) < 0$ (Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13 > 0$

Άρα το $f(x)$ έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

$$x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) - \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \text{ και } x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) + \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

β) $-2 \cdot f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f(x) > 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) > 0$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου, με βάση το α) ερώτημα.

Καθώς είναι $\alpha = 1 > 0$, παρατηρούμε ότι είναι $f(x) > 0$ για

$$x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \infty\right)$$

| $x$ | $-\infty$ $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | + | - | + |

**12. Θέμα 12976**

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1-2x) \leq -1$.

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

α) Επειδή α=2, β=-1 και γ=-1 η διακρίνουσα είναι

Δ= $(-1)^2 - 4 \cdot 2(-1) = 9 > 0$ . Το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες:

$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$ και $x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Επομένως το τριώνυμο γίνεται

$2x^2 - x - 1 = 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x+1)$

Άρα έχουμε $2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$.

β) Η ανίσωση γίνεται $x(1-2x) \leq -1 \Leftrightarrow -2x^2+x+1 \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2-x-1 \geq 0$

Έχουμε να λύσουμε ανίσωση δευτέρου βαθμού.

Παρατηρούμε πως το τριώνυμο της ανίσωσης είναι το τριώνυμο του πρώτου ερωτήματος. Άρα μηδενίζεται για $x_1=1$ και $x_2=-\frac{1}{2}$ και επειδή το α=2>0 προκύπτει:

| x | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2-x-1$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων το τριώνυμο θα είναι ομόσημο του α, δηλαδή θετικό για $x \leq -\frac{1}{2}$ ή $x \geq 1$.

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$.

**13. Θέμα 13321** **Αρχέτυπο**

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4-16=0$. (1)

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+3x \leq 0$. (2)

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

(Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α) Έχουμε:

$$x^4-16=0 \Leftrightarrow$$
$$x^4=16 \Leftrightarrow$$
$$x=\pm\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow$$
$$x=\pm 2.$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x=2$, $x=-2$.

β) Για να λύσουμε την ανίσωση, θα βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2+3x$ και στη συνέχεια θα κάνουμε τον πίνακα προσήμου του $x^2+3x$. Για να βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου, παραγοντοποιώντας έχουμε:

$$\begin{aligned} &x^2+3x=0 \Leftrightarrow \\ &x(x+3)=0 \Leftrightarrow \\ &x=0 \text{ ή } x=-3 \end{aligned}$$

Συνεπώς ο πίνακας προσήμου είναι ο παρακάτω:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+3x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Άρα η ανίσωση (2) αληθεύει για $x\in[-3,0]$.

γ) Από τις λύσεις της εξίσωσης (1) μόνο η $x=-2$ είναι και λύση της ανίσωσης (2), διότι ανήκει στο διάστημα $[-3,0]$.

**14. Θέμα 14189**

α) Αν $x^2-3x-4<0$, να δείξετε ότι $-1<x<4$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση $A=|2x+2|+|x-5|$ με τις τιμές του $x$ να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A=x+7$.

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$

Οι ρίζες του τριωνύμου $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \ \ 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 3x - 4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Άρα $x \in (-1{,}4)$.

β) Είναι $A = |2x + 2| + |x - 5| = 2|x + 1| + |x - 5|$.

Επειδή $x \in (-1{,}4)$ τότε $x > -1$ και $x + 1 > 0$. Άρα $|x + 1| = x + 1$.

Επειδή $x \in (-1{,}4)$ τότε $x < 4 < 5$ και $x - 5 < 0$. Άρα $|x - 5| = 5 - x$.

Επομένως η παράσταση $A = 2(x + 1) + 5 - x = 2x + 2 + 5 - x = x + 7$.

**15. Θέμα 14474**

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.

α) Να εξετάσετε αν το $1$ είναι ρίζα του τριωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

α) Παρατηρούμε ότι: $2\cdot 1^2+3\cdot 1-5=2+3-5=0$, οπότε το $x_1=1$ είναι ρίζα του τριωνύμου.

β) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο, θα βρούμε και την δεύτερη ρίζα του χρησιμοποιώντας το γινόμενο των ριζών $x_1\cdot x_2=\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2}$.

Οπότε:

$$x_1\cdot x_2=-\frac{5}{2}\text{, δηλαδή}$$

$$1\cdot x_2=-\frac{5}{2}\text{ και τελικά}$$

$$x_2=-\frac{5}{2}$$

Άρα το τριώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$$2x^2+3x-5=2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right).$$

**16. Θέμα 14577** **Αρχέτυπο**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x-2=0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $-1$ .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 8)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A=\frac{x^2-x-2}{x^2+x}$, $x\neq 0, x\neq -1$.

(Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

α) Παρατηρούμε ότι $(-1)^2-(-1)-2=1+1-2=0$, οπότε ο αριθμός $-1$ είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

β) Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης ισούται με $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{-2}{1}=-2$ και η μια ρίζα της είναι $x_1=-1$. Άρα για την δεύτερη ρίζα της εξίσωσης έχουμε:

$$\begin{aligned}&x_1\cdot x_2=-2\Leftrightarrow\\&-1\cdot x_2=-2\Leftrightarrow\\&x_2=2.\end{aligned}$$

γ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα οι ρίζες του τριωνύμου $x^2-x-2$ είναι $x_1=-1$ και $x_2=2$. Οπότε παραγοντοποιείται ως εξής:

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1).$$

Η παράσταση γίνεται:

$$\mathrm{A}=\frac{x^2-x-2}{x^2+x}=\frac{(x-2)(x+1)}{x(x+1)}=\frac{x-2}{x}.$$

**Θέμα 3 - Κωδικός: 14601**

**17. Θέμα 14601**

Αν για τον πραγματικό αριθμό $x$ ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $0<x<1$.

(Μονάδες 12)

β) Να βάλετε σε αύξουσα διάταξη τους αριθμούς $1,\ x,\ x^2$.

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$|2x-1|<1$, οπότε

$-1<2x-1<1$, προσθέτουμε στα μέλη της ανίσωσης το $1$ και έχουμε

$0<2x<2$, διαιρούμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2 και τελικά

$$0<x<1$$

β) Από το α) ερώτημα, έχουμε $0<x<1$, οπότε και $0<x^2<1$ . Πρέπει να βρούμε τη σχέση του $x$ με τον $x^2$. Θα πάρουμε τη διαφορά τους $x^2-x$ και θα βρούμε το πρόσημό της. Το τριώνυμο $x^2-x=x(x-1)$ έχει ρίζες $x_1=0$ και $x_2=1$. Δεδομένου ότι $0<x<1$, μας ενδιαφέρει το πρόσημο του τριωνύμου στο διάστημα εντός των ριζών του. Στο διάστημα αυτό το τριώνυμο είναι αρνητικό. Δηλαδή $x^2-x<0$ για $x\in(0,1)$. Οπότε $x^2<x$.

Τελικά, $x^2<x<1$.

Εναλλακτικά, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της $0<x<1$ με $x>0$, οπότε προκύπτει: $0<x^2<x$ και τελικά $x^2<x<1$.

**Θέμα 4 - Κωδικοί:**

**1391, 1396, 1397, 1402, 1409, 1420, 1421, 1425, 1426, 1432, 1436, 1441, 1450, 1457, 1458, 1462, 1465, 1473, 1480, 1481, 1483, 1484, 1486, 1487, 1493**

**18. Θέμα 1391**

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα $\Delta$ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 9)

β) Για ποιες τιμές του $\lambda$ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda$, ώστε $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda \le 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $\lambda x - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = (\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda^2 =$$
$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 =$$
$$= (\lambda^2 - 1)^2 \ge 0, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

**β)** Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda - 1 = 0 \text{ ή } \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

**γ)** Είναι $\lambda x - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \le 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν:

$$(\lambda < 0 \text{ και } \Delta \le 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda < 0 \text{ και } (\lambda^2 - 1)^2 \le 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda < 0 \text{ και } (\lambda^2 - 1)^2 = 0) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda < 0 \text{ και } \lambda^2 - 1 = 0) \Leftrightarrow$$

$$[\lambda < 0 \text{ και } (\lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 1)]$$

Άρα $\lambda = -1$.

**19. Θέμα 1396** **Αρχέτυπο**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του $\lambda$, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda$ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

δ) Αν $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

(Μονάδες 5)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Για λ = 5 η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-10)^2 - 4\cdot 25 = 0$, οπότε η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή.

**β)** Η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ έχει διπλή ρίζα, αν και μόνο αν

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-2\lambda)^2 - 4(4\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 16\lambda - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -1$$

Συνεπώς και για λ = -1 η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

**γ)** Η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ έχει δυο ρίζες άνισες, αν και μόνο αν

$$\Delta > 0 \overset{(\beta)}{\Leftrightarrow}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda < -1 \text{ ή } \lambda > 5$$

**δ)** Αν

$$|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5 = -(\lambda^2 - 4\lambda - 5) \qquad \lambda \in \mathbb{R}-\{-1, 5\},$$

τότε $\lambda^2 - 4\lambda - 5 < 0$, δηλαδή η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$ είναι αρνητική, οπότε η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

**20. Θέμα 1397 Αρχέτυπο**

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)= \lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda,\quad \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα $\Delta$ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν $x_1$, $x_2$ είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0<\lambda\neq 1$ και $x_1$, $x_2$, με $x_1 < x_2$, είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0)\cdot f(\kappa)\cdot f(\mu)$, όπου $\kappa$, $\mu$ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$.

(Μονάδες 6)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4\cdot\lambda\cdot\lambda = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2$$

Επειδή $\Delta \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$, το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

**β)** Το τριώνυμο έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2+1)$ και $\gamma = \lambda$. Οπότε:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-[-(\lambda^2+1)]}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda}$$

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

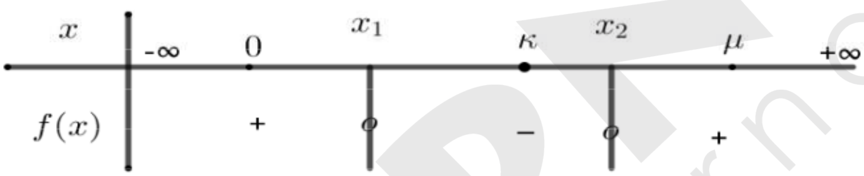
**γ)** Το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου είναι Ρ = 1 > 0, άρα οι ρίζες του είναι ομόσημες. Αν επιπλέον λ > 0, τότε και S > 0. Οπότε οι ρίζες θα είναι θετικές (δυο ομόσημοι αριθμοί των οποίων το άθροισμα είναι θετικό, είναι θετικοί).

**δ)** Για **λ > 0** και **λ ≠ 1** το τριώνυμο f(x) έχει δυο ρίζες άνισες τις $x_1$ και $x_2$ που λόγω του γ) ερωτήματος είναι θετικές. Επίσης είναι δεδομένο ότι *κ* και *μ* είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε:

$$0 < x_1 < \kappa < x_2 < \mu$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, που έχει

$$\alpha = \lambda > 0$$




Από τον παραπάνω πίνακα προσήμου προκύπτει λοιπόν ότι:

**f(0) > 0**

**f(κ) < 0**

**f(μ) > 0**

Άρα: $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu) < 0$

**21. Θέμα 1402**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2$-$2(λ$-$1)x+λ+5=0$ (1), με παράμετρο $λ \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$Δ = 4λ^2$-$12λ$-$16$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του $λ \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1, x_2$ και $d(x_1,x_2)$ είναι η απόσταση των $x_1, x_2$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του $λ$ ισχύει:

$d(x_1,x_2)=\sqrt{24}$ . (Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $x^2 - 2(λ-1)x + (λ+5)$ έχει $α = 1$, $β = -2(λ-1)$, $γ = λ+5$ και διακρίνουσα:

$$Δ = β^2 - 4αγ = [-2(λ-1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (λ+5) = 4(λ^2 - 2λ + 1) - 4λ - 20 = 4λ^2 - 12λ - 16$$

**β)** Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$Δ > 0 \Leftrightarrow$$

$$4λ^2 - 12λ - 16 > 0 \Leftrightarrow$$

$$λ^2 - 3λ - 4 > 0 \qquad (2)$$

Το τριώνυμο $λ^2 - 3λ - 4$ έχει διακρίνουσα: $Δ_0 = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$ και ρίζες τις:

$$λ_{1,2} = \frac{-β\pm\sqrt{Δ}}{2α} = \frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $λ$ | $-\infty$ | $-1$ | | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $λ^2 - 3λ - 4$ | + | 0 | − | 0 | + |

Επομένως η (2) αληθεύει για:

$$λ < -1 \text{ ή } λ > 4$$

**γ)** Από τους τύπους Vieta για το τριώνυμο της εξίσωσης (1) βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2(\lambda-1)}{1} = 2(\lambda-1) \quad \text{και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda+5}{1} = \lambda + 5$$

Τότε, για $\lambda \in (-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$ :

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24} \Leftrightarrow$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{24} \Leftrightarrow$$

$$|x_1 - x_2|^2 = \sqrt{24}^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 24 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 24 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 - 2x_1 \cdot x_2 = 24 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = 24 \Leftrightarrow$$

$$[2(\lambda - 1)]^2 - 4(\lambda + 5) = 24 \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda - 20 - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 12\lambda - 40 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -2$$

**22. Θέμα 1409 Αρχέτυπο**

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος *y (*σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση:

$$y = 60t - 5t^2$$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος; (Μονάδες 8)

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος y = 175 m; (Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m. (Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Όταν η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος θα ισχύει:

$$y = 0 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5t(12 - t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = 0 \text{ ή } t = 12$$

Για t = 0sec η σφαίρα βρίσκεται στην αρχή της κίνησης οπότε απορρίπτεται. Άρα η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος μετά από t = 12sec.

**β)** Ισχύει ότι:

$$y = 175 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 = 175 \Leftrightarrow$$

$$5t^2 - 60t + 175 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 12t + 35 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = 5 \text{ ή } t = 7$$

Άρα η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος 175m τις χρονικές στιγμές 5 sec και 7 sec.

**γ)** Η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m όταν:

$$y > 100 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 > 100 \Leftrightarrow$$

$$60t - 5t^2 > 100 \Leftrightarrow$$

$$-5t^2 + 60t - 100 > 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 12t + 20 < 0$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| t | $-\infty$ | | 2 | | 10 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t^2 - 12t + 20$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

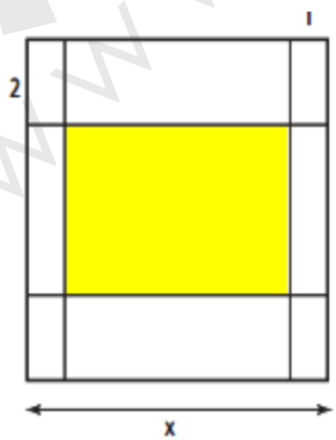
Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$t^2 - 12t + 20 < 0 \Leftrightarrow 2 < t < 10$$

Άρα η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m μεταξύ των χρονικών στιγμών 2 sec και 10 sec.

**23. Θέμα 1420 Αρχέτυπο**

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς *x cm* *($5 \le x \le 10$)* στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια *2 cm* στο πάνω και στο κάτω μέρος της και *1 cm* δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν *Ε* της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

*E(x)=(x-2)(x-4)* (Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί η τιμή του *x* ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm$^2$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά *x* του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον *24* cm$^2$.

(Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το κίτρινο ορθογώνιο έχει διαστάσεις:

$$x-1-1=x-2 \text{ και } x-2-2=x-4$$

Επομένως, το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)=(x-2)(x-4),\ 5\le x\le 10$$

**β)** Είναι:

$$E(x)=35 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)=35 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+8=35 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x-27=0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-27)=36+108=144>0$$

και ρίζες τις:

$$t_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{144}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 12}{2}=\begin{cases}\frac{6+12}{2}=9\\ \frac{6-12}{2}=-3\end{cases}$$

Επειδή πρέπει $5\le x\le 10$, δεχόμαστε την τιμή $x=9$ cm.

**γ)** Αναζητούμε τις τιμές του x που αποτελούν λύση της ανίσωσης:

$$E(x) \geq 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 \geq 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 6x - 16$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = -16$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{6+10}{2} = 8 \\ \frac{6-10}{2} = -2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $8$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 6x - 16$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

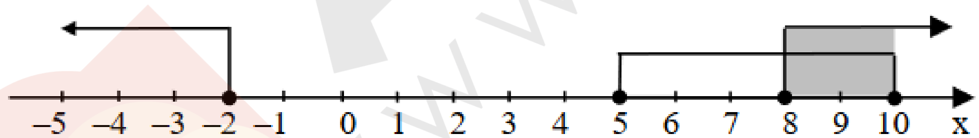
Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 6x - 16 \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq -2 \text{ ή } x \geq 8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [8, +\infty) \quad (1)$$

Πρέπει όμως να ισχύει και $5 \leq x \leq 10$ (2).

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:

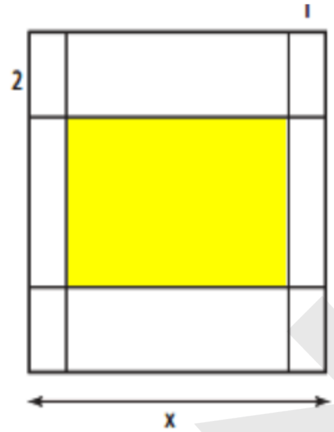



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$8 \leq x \leq 10 \Leftrightarrow x \in [8, 10]$$

**24. Θέμα 1421**

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς *x cm* *(5≤x≤10)*, στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια *2 cm* στο πάνω και στο κάτω μέρος της και *1 cm* δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).




α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν *E* της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)= x^2-6x+8$$ (Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί το η τιμή του *x* ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $24\ cm^2$. (Μονάδες 7)

γ) Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ $35\ cm^2$, να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά *x* του τετραγώνου.

(Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

***α)*** Το κίτρινο ορθογώνιο έχει διαστάσεις:

$$x - 1 - 1 = x - 2 \ \text{ και } \ x - 2 - 2 = x - 4$$

Επομένως, το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = (x - 2)(x - 4) = x^2 - 6x + 8, \ \ 5 \le x \le 10$$

**β)** Είναι:

$$E(x) = 24 \Leftrightarrow \ x^2 - 6x + 8 = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100 > 0$$

και ρίζες τις:

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{6+10}{2} = 8 \\ \frac{6-10}{2} = -2 \end{cases}$$

Επειδή πρέπει $5 \le x \le 10$, δεχόμαστε την τιμή $x = 8$ cm.

**γ)** Αναζητούμε τις τιμές του x που αποτελούν λύση της ανίσωσης:

$$E(x) \le 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \le 35 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 \le 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 6x - 27$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = -27$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27) = 36 + 108 = 144 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 12}{2} = \begin{cases} \frac{6+12}{2} = 9 \\ \frac{6-12}{2} = -3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

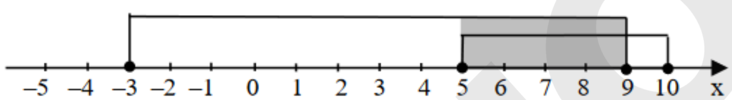
| $x$ | $-\infty$    $-3$      $9$    $+\infty$ |
|---|---|
| $x^2-6x-27$ | +   0   −   0   + |

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2-6x-27 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 9 \Leftrightarrow x \in [-3, 9] \quad (1)$$

Πρέπει όμως να ισχύει και $5 \le x \le 10$ (2).

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:




οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$5 \le x \le 9 \Leftrightarrow x \in [5, 9]$$

**25. Θέμα 1425**

Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \le |x| \le 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί $\rho_1$ και $\rho_2$ ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

**α)** • Είναι:

$$2 \le |x| \le 3 \Leftrightarrow (2 \le |x| \ \ (1) \ \text{ και } \ |x| \le 3 \ \ (2))$$

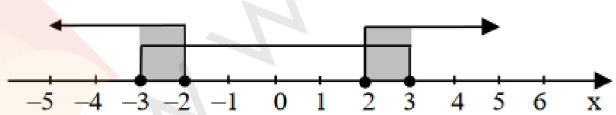
Από την ανίσωση (1) βρίσκουμε:

$$|x| \ge 2 \Leftrightarrow (x \le -2 \ \text{ ή } \ x \ge 2) \ \ (3)$$

Από την ανίσωση (2) βρίσκουμε:

$$|x| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3 \ \ (4)$$

Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (3) και (4) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:




οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-3 \le x \le -2 \ \text{ ή } \ 2 \le x \le 3 \Leftrightarrow x \in [-3,-2] \cup [2,3] \ \ (5)$$

• Το τριώνυμο $x^2 - 4x$ έχει ρίζες τις:

$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 4)$$

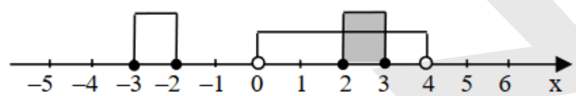
Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 4x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (0, 4) \ \ (6)$$

**β)** Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (5) και (6) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:




οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$2 \leq x \leq 3 \ \Leftrightarrow x \in [2, 3]$$

**γ)** Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in [2, 3]$ ισχύει ότι:

$$2 \leq \rho_1 \leq 3 \ \ (7) \quad \text{και} \quad 2 \leq \rho_2 \leq 3 \ \ (8)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (7) και (8) και βρίσκουμε:

$$2 + 2 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq 3 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq \rho_1 + \rho_2 \leq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{2} \leq \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \leq \frac{6}{2} \Leftrightarrow 2 \leq \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \leq 3$$

Άρα $\frac{\rho_1+\rho_2}{2} \in [2, 3]$, οπότε και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. Ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ εκφράζει το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς $\rho_1, \rho_2$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

**26. Θέμα 1426**

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1|\leq 2$ και $x^2-x-2>0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3,-1)$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί $\rho_1$ και $\rho_2$ ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2,2)$ (Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

**α)** • Είναι:

$$|x+1|\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq x+1\leq 2 \Leftrightarrow -2-1\leq x+1-1\leq 2-1 \Leftrightarrow -3\leq x\leq 1 \quad (1)$$

• Το τριώνυμο $x^2-x-2$ έχει $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=-2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2\\ \frac{1-3}{2}=-1\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

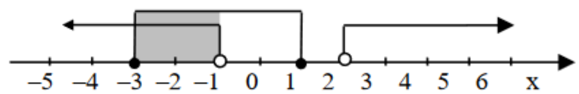
| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x-2$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Επομένως ισχύει:

$$x^2-x-2>0 \Leftrightarrow (x<-1 \text{ ή } x>2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty) \quad (2)$$

**β)** Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:




οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-3 \le x < -1 \Leftrightarrow x \in [-3, -1)$$

**γ)** Επειδή $\rho_1, \rho_2 \in [-3, -1)$ ισχύει ότι:

$$-3 \le \rho_1 < -1 \quad (3) \quad \text{και}$$

$$-3 \le \rho_2 < -1 \Leftrightarrow 1 < -\rho_2 \le 3 \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$-3 + 1 < \rho_1 - \rho_2 < -1 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < \rho_1 - \rho_2 < 2$$

Άρα $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

**27. Θέμα 1432**

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η εξίσωση

$$\frac{1}{4}x^2 + (2-\lambda)x + \lambda - 2 = 0 \qquad (1) \text{ με παράμετρο } \lambda.$$

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

(Μονάδες 5)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 5x + 6$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x < 2 \text{ ή } x > 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty) \text{ και}$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$$

**β) i)** Το τριώνυμο $\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2$ έχει $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = 2 - \lambda$, $\gamma = \lambda - 2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2 - \lambda)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\lambda - 2) =$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 - \lambda + 2 =$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 > 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda < 2 \text{ ή } \lambda > 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$$

**ii)** Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 2}{\frac{1}{4}} = 4(\lambda - 2)$$

Η εξίσωση (1) έχει ομόσημες ρίζες, αν και μόνο αν:

$$(\Delta \geq 0 \;\text{ και }\; P > 0) \Leftrightarrow (\lambda^2 - 5\lambda + 6 \geq 0 \;\text{ και }\; 4(\lambda - 2) > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda \leq 2 \;\text{ ή }\; \lambda \geq 3 \;\text{ και }\; \lambda > 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \geq 3 \Leftrightarrow \lambda \in [3, +\infty)$$

**28. Θέμα 1436** **Αρχέτυπο**

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός *α* με *0<α<1*.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$$0, \quad 1, \quad \alpha, \quad \alpha^2, \quad \sqrt{a}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

(Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+a} < 1 + \sqrt{a}$ (Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Είναι:

$$x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0$$

Το πολυώνυμο $x^2 - x$ έχει ρίζες τις:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1)$$

Το πρόσημο του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| | $x$ | $-\infty$    $0$    $1$    $+\infty$ |
|---|---|---|
| | $x^2 - x$ | $+$   o   $-$   o   $+$ |

Επομένως ισχύει:

$$x^2 - x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$

**β) i)** • $0 < \alpha^2$

• $\alpha < 1 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha \cdot \alpha < 1 \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 < \alpha$

• $\alpha^2 < \alpha \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \sqrt{\alpha^2} < \sqrt{\alpha} \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha < \sqrt{\alpha}$

• $\alpha < 1 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \sqrt{\alpha} < 1$

Τελικά:

$$0 < \alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha} < 1$$

**ii)** Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\alpha}^2 < \left(1 + \sqrt{\alpha}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \alpha < 1 + 2\sqrt{\alpha} + \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{\alpha}$$

Ισχύει για κάθε $\alpha > 0$.

**29. Θέμα 1441 Αρχέτυπο**

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \quad \text{και} \quad g(x) = \alpha x - 5, \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του $\alpha$. (Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$ (Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ (Μονάδες 5+5=10)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Είναι:

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + \alpha = 4 - 8 + \alpha = -4 + \alpha \ \text{ και}$$
$$g(2) = 2\alpha - 5$$

Τότε:

$$f(2) = g(2) \Leftrightarrow -4 + \alpha = 2\alpha - 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4 + 5 = 2\alpha - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$$

**β)** Για $\alpha = 1$ είναι:

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \text{ και}$$
$$g(x) = x - 5$$

**i)** Τότε:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = x - 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

**ii)** Είναι:

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 5x + 6$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq 2 \text{ ή } x \geq 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

Από τη ιδιότητα $|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$ ισχύει ότι:

$$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

**30. Θέμα 1450 Αρχέτυπο**

Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 = \lambda(4x - 3)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha \neq 0$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $x_1$, $x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S=x_1+x_2$ και $P=x_1x_2$

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του $\lambda$, δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Η εξίσωση γράφεται:

$$(x-2)^2 = \lambda(4x-3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4\lambda x - 3\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 4\lambda x + 4 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4(1+\lambda)x + 4 + 3\lambda = 0$$

**β)** Το τριώνυμο $x^2 - 4(1+\lambda)x + 4 + 3\lambda$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -4(1+\lambda)$, $\gamma = 4 + 3\lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-4(1+\lambda)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4+3\lambda) =$$
$$= 16 + 32\lambda + 16\lambda^2 - 16 - 12\lambda =$$
$$= 16\lambda^2 + 20\lambda$$

Η εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 + 20\lambda > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 5\lambda > 0$$

Το τριώνυμο $4\lambda^2 + 5\lambda$ έχει ρίζες τις:

$$4\lambda^2 + 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(4\lambda+5) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\lambda = -\frac{5}{4} \text{ ή } \lambda = 0\right)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $\lambda$ | $-\infty$ | | $-\frac{5}{4}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4\lambda^2+5\lambda$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Επομένως ισχύει:

$$4\lambda^2+5\lambda>0 \Leftrightarrow \left(\lambda<-\frac{5}{4} \text{ ή } \lambda>0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda\in\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)\cup(0,+\infty)$$

**γ)** **i)** Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-4(1+\lambda)}{1}=4(1+\lambda) \quad \text{και}$$

$$P=x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{4+3\lambda}{1}=4+3\lambda$$

**ii)** Είναι:

$$A=(4x_1-3)(4x_2-3)=$$

$$=16x_1x_2-12x_1-12x_2+9=$$

$$=16x_1x_2-12(x_1+x_2)+9=$$

$$=16(4+3\lambda)-12\cdot 4(1+\lambda)+9=$$

$$=64+48\lambda-48-48\lambda+9=25$$

**31. Θέμα 1457**

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα $\Delta$ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $\lambda$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το $\lambda$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+\lambda-\lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) =$$
$$= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in R$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

**β)** Η εξίσωση έχει δύο (πραγματικές) ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

**γ)** Για να έχει η συνάρτηση πεδίο ορισμού το R αρκεί να ισχύει:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in R$$

Επειδή ο συντελεστής του $x^2$ είναι $\alpha = 1 > 0$, πρέπει:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

**32. Θέμα 1458 Αρχέτυπο**

Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα $\Delta$ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $\lambda$ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και $x_1, x_2$ είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$ (Μονάδες 4)

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_2)$, $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, $f(x_2 + 1)$. (Μονάδες 5)

**ΛΥΣΗ**

i) Το τριώνυμο $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) =$$
$$= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in R$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Το τριώνυμο έχει δύο (πραγματικές) ρίζες ίσες αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

**γ) i)** Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < x_2 \Leftrightarrow \left(x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} \ \text{ και } \ \frac{x_1+x_2}{2} < x_2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x_1 < x_1 + x_2 \ \text{ και } \ x_1 + x_2 < 2x_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1 < x_2 \ \text{ και } \ x_1 < x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2,$$

που ισχύει από υπόθεση.

**ii)** Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | $\frac{x_1+x_2}{2}$ | $x_2$ | $x_2+1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Είναι:

$$f(x_2) = 0,\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < 0,\ f(x_2 + 1) > 0$$

Άρα:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f(x_2) < f(x_2 + 1)$$

**33. Θέμα 1462**

Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς *1* και *2*.

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα *S* και το γινόμενο *P* των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma = 2\alpha$ και $\beta = -3\alpha$. (Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x\in(1, 2)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha<0$. (Μονάδες 9)

ii) να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2+\beta x+\alpha<0$. (Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 1 + 2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \beta = -3\alpha \quad (1)$$

και

$$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 1\cdot 2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \gamma = 2\alpha \quad (2)$$

**β) i)** Ισχύει ότι:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha(x-x_1)(x-x_2) > 0 \Leftrightarrow \alpha(x-1)(x-2) > 0 \quad (3)$$

Είναι:

$$1 < x < 2 \Leftrightarrow (1 < x \text{ και } x < 2) \Leftrightarrow (0 < x-1 \text{ και } x-2 < 0)$$

Άρα $(x-1)(x-2) < 0$. Τότε από την (3) συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha < 0$$

**ii)** Ισχύει ότι:

$$\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0 \overset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha x^2 + (-3\alpha)x + \alpha < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha(2x^2 - 3x + 1) < 0 \overset{\alpha<0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 > 0$$

Το τριώνυμο $2x^2-3x+1$ έχει $\alpha=2$, $\beta=-3$, $\gamma=1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=9-8=1>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot2}=\frac{3\pm1}{4}=\begin{cases}\frac{3+1}{4}=1\\ \frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2-3x+1$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

Επομένως ισχύει:

$$2x^2-3x+1>0 \Leftrightarrow \left(x<\frac{1}{2} \text{ ή } x>1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$$

**34. Θέμα 1465**

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=3x^2+\kappa x-4$, με παράμετρο $\kappa\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του $\kappa$, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

γ) Αν $x_1$ και $x_2$ είναι οι ρίζες του τριωνύμου και $\alpha$, $\beta$ δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει

$$\alpha<x_1<x_2<\beta,$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου: $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $3x^2 + \kappa x - 4$ έχει $\alpha = 3$, $\beta = \kappa$, $\gamma = -4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \kappa^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = \kappa^2 + 48$$

Επειδή ισχύει $\Delta > 0$, για κάθε $\kappa \in R$ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

**β)** Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-4}{3} < 0$$

Άρα οι ρίζες είναι ετερόσημες.

**γ)** Επειδή $x_1 < x_2$ και οι ρίζες είναι ετερόσημες, ισχύει ότι:

$$x_1 < 0 \ \text{ και } \ x_2 > 0$$

Επίσης είναι: $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, άρα:

$$\alpha < 0 \ \text{ και } \ \beta > 0 \ (1)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ $\alpha$ | $x_1$ | | $x_2$ | $\beta$ $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2 + \kappa x - 4$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$f(\alpha) > 0 \ \text{ και } \ f(\beta) > 0 \ (2)$$

Από τις ανισώσεις των σχέσεων (1) και (2) βρίσκουμε:

$$\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta) < 0$$

**35. Θέμα 1473 Αρχέτυπο**

α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha$ η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την τιμή του $\alpha$ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 6)

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2+2x+3$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2} \leq 2$ (Μονάδες 6)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Η εξίσωση:

$$x^2 + 2x + 3 = \alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 - \alpha = 0 \quad (1)$$

έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - \alpha) =$$
$$= 4 - 12 + 4\alpha = 4\alpha - 8$$

**i)** Η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 8 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha > 8 \Leftrightarrow \alpha > 2$$

**ii)** Η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα αν και μόνο αν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2$ .Τότε η διπλή ρίζα είναι: x=-1

**β) i)** Είναι:

$$f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \geq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in R$.

**ii)** Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\sqrt{f(x) - 2} \leq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x) - 2}\right)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x) - 2 \leq 4 \Leftrightarrow f(x) \leq 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 \leq 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0$$

Το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta_0 = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| x | $-\infty$ | $-3$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + 2x - 3$ | + | 0 | − | 0 | + |

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-3, 1]$$

**36. Θέμα 1480 Αρχέτυπο**

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2-3x+2=0$ (1) και $x^4-3x^2+2=0$ (2).

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2).

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό $x$, να έχει θετική τιμή.

(Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $x^2-3x+2$ έχει $\alpha=1$, $\beta=-3$, $\gamma=2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1>0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=2\\ \frac{3-1}{2}=1\end{cases}$$

**β)** Θέτουμε στη δοθείσα εξίσωση $x^2=y$ (3). Τότε:

$$x^4-3x^2+2=0\Leftrightarrow(x^2)^2-3x^2+2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2-3y+2=0$$

Η εξίσωση που προέκυψε είναι ίδια με το σκέλος (α) οπότε έχει ρίζες τις $y_1=1$, $y_2=2$.

- Για $y=1$ η σχέση (3) δίνει:

$$x^2=1\Leftrightarrow(x=-1\ \text{ή}\ x=1)$$

- Για $y=2$ η σχέση (3) δίνει:

$$x^2=2\Leftrightarrow\left(x=-\sqrt{2}\ \text{ή}\ x=\sqrt{2}\right)$$

**γ)** Επειδή το ζητούμενο τριώνυμο έχει $α = 1 > 0$ το πρόσημο του θα είναι αυτό που δίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+βx+γ$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

όπου $x_1, x_2$ οι ρίζες του με $x_1 < x_2$ και $x_1, x_2 \in \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$

Για να είναι $x^2 + βx + γ > 0$ για κάθε $x < 0$ πρέπει οι ρίζες του $x_1$, $x_2$ να είναι θετικές αφού είναι $0 < x_1 < x_2$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

**1η περίπτωση**

Οι ρίζες να είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = \sqrt{2}$. Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = 1 + \sqrt{2} \text{ και}$$

$$P = x_1x_2 = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - (1+\sqrt{2})x + \sqrt{2}$$

**2η περίπτωση**

Οι ρίζες να είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = 1$. Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = 1 + 1 = 2 \text{ και}$$

$$P = x_1x_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

**3η περίπτωση**

Οι ρίζες να είναι $x_1 = \sqrt{2}$ και $x_2 = \sqrt{2}$. Τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Το ζητούμενο τριώνυμο είναι το:

$$x^2 - Sx + P = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = \left(x - \sqrt{2}\right)^2$$

**37. Θέμα 1481**

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα $\Delta$ του τριωνύμου. (Μονάδες 4)

β) i) Αν $\beta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (Μονάδες 7)

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta$ που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

(Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot 1 \cdot \beta^2 = -3\beta^2$$

**β) i)** Για $\beta \neq 0$ ισχύει ότι:

$$\Delta = -3\beta^2 < 0$$

Επειδή ο συντελεστή του $x^2$ είναι $1 > 0$ το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x \in R$.

**ii)** Για $\beta = 0$ είναι $\Delta = 0$, οπότε το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x \in R - \{0\}$ αφού για $x = 0$ μηδενίζεται.

**γ)** Θέτουμε στο αρχικό τριώνυμο $x = \alpha$ και βρίσκουμε:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

**Περίπτωση 1η**

Αν $\beta \neq 0$ τότε από το σκέλος (αii) συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

**Περίπτωση 2η**

Αν $\beta = 0$ (οπότε $\alpha \neq 0$) τότε από το σκέλος (βii) συμπεραίνουμε ότι:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

**38. Θέμα 1483** **Αρχέτυπο**

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού $x$

(Μονάδες 10)

β) Αν $\kappa = -\dfrac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8\,;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 8$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = -8$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = 4 \\ \frac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 2x - 8$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 - 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (-2, 4)$$

$$x^2 - 2x - 8 > 0 \Leftrightarrow (x < -2 \text{ ή } x > 4) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$$

**β)** Ισχύει ότι:

$$\kappa = -\frac{8889}{4444} = -\frac{8888+1}{4444} = -\left(\frac{8888}{4444} + \frac{1}{4444}\right) = -2 - \frac{1}{4444} < -2$$

Από τον πίνακα προσήμων του σκέλους (i) διαπιστώνουμε ότι για $\kappa < -2$ είναι:

$$\kappa^2 - 2\kappa - 8 > 0$$

**γ)** Η δοθείσα παράσταση γράφεται:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8 = |\mu|^2 - 2|\mu| - 8$$

Επομένως προκύπτει από το αρχικό τριώνυμο θέτοντας $x = |\mu|$.

Από το δεδομένο $-4 < \mu < 4$ συμπεραίνουμε ότι:

$$-4 < \mu < 4 \Leftrightarrow |\mu| < 4 \Leftrightarrow 0 \le |\mu| < 4$$

Από τον πίνακα προσήμων του σκέλους (α) διαπιστώνουμε ότι για $0 \le |\mu| < 4$ είναι:

$$|\mu|^2 - 2|\mu| - 8 < 0$$

**39. Θέμα 1484 Αρχέτυπο**

Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο Ο.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με *ΟΜ>600 μέτρα*.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ, με *ΟΑ=600 μέτρα*.

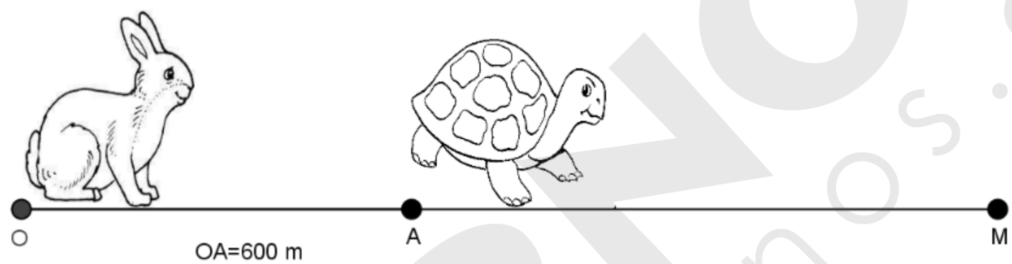
Υποθέτουμε ότι, για $t \ge 0$, η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή *t min* δίνεται από τον τύπο $S_\Lambda(t) = 10\,t^2$ *μέτρα*, ενώ η απόσταση της χελώνας από το Ο τη στιγμή *t min* δίνεται από τον τύπο $S_X(t) = 600 + 40t$ *μέτρα*.

α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα. (Μονάδες 10) β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι *ΟΜ=2250 μέτρα*. Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα. (Μονάδες 5)

ii) Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή *t = 12min* και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση. (Μονάδες 5)

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα. (Μονάδες 5)




**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα θα πρέπει να βρίσκεται σε οποιαδήποτε θέση για την οποία ισχύει:

$$S_X(t) > S_\Lambda(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 600 + 40t > 10t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 < 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60) = 16 + 240 = 256 > 0$$

και ρίζες τις:

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 16}{2} = \begin{cases} \frac{4+16}{2} = 10 \\ \frac{4-16}{2} = -6 \end{cases}$$

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $t$ | $-\infty$ | $-6$ | | $10$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t^2 - 4t - 60$ | + | 0 | − | 0 | + | |

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$t^2 - 4t - 60 < 0 \Leftrightarrow -6 < t < 10 \Leftrightarrow t \in (-6, 10)$$

Επειδή όμως είναι $t \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι:

$$t \in [0, 10)$$

Τότε:

$$0 \leq t < 10 \Leftrightarrow 0 \leq 40t < 400 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 600 + 0 \leq 600 + 40t < 600 + 400 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 600 \leq S_\Lambda(t) < 1000 \Leftrightarrow$$

Άρα, το Μ μπορεί να απέχει λιγότερο από 1000 μέτρα από το σημείο Ο και η χελώνα θα έχει διαρκώς προβάδισμα.

**β) i)** Ο λαγός φτάνει τη χελώνα τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει:

$$S_X(t) = S_\Lambda(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 600 + 40t = 10t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 = 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow t = 10 \text{ min}$$

**ii)** Είναι:

$$S_\Lambda(12) = 10 \cdot 12^2 = 10 \cdot 144 = 1440 \text{ μέτρα}$$

$$S_X(12) = 600 + 40 \cdot 12 = 600 + 480 = 1080 \text{ μέτρα}$$

Επομένως ο λαγός προηγείται της χελώνας και η μεταξύ τους απόσταση είναι:

$$1440 - 1080 = 360 \text{ μέτρα}$$

**iii)** Αναζητούμε τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει:

$$S_\Lambda(t) = 2250 \Leftrightarrow 10t^2 = 2250 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 225 \Leftrightarrow t^2 = 15^2 \overset{t \geq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow t = 15 \text{ min}$$

**40. Θέμα 1486**

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα $\Delta$ του τριωνύμου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda$ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

(i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)

(ii) Αν $x_1$, $x_2$ με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και $\kappa$, $\mu$ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

**α)** Το τριώνυμο $x^2 - 6x + \lambda - 3$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = \lambda - 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 3) =$$
$$= 36 - 4\lambda + 12 = 48 - 4\lambda$$

**β)** Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 48 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4\lambda > -48 \Leftrightarrow \lambda < 12$$

**γ) i)** Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-6}{1} = 6 \text{ και}$$
$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 3}{1} = \lambda - 3$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι άνισες και θετικές αν και μόνο αν:

$$(\Delta > 0, S > 0 \text{ και } P > 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (48 - 4\lambda > 0, 6 > 0 \text{ και } \lambda - 3 > 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda < 12 \text{ και } \lambda > 3) \Leftrightarrow 3 < \lambda < 12, \text{ ισχύει}$$

**ii)** Επειδή ο συντελεστής του $x^2$ είναι $1 > 0$ το τριώνυμο είναι θετικό εκτός των ριζών $x_1$, $x_2$ και αρνητικό εντός των ριζών.

Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-6x+\lambda-3$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

- Επειδή $x_1 < \mu < x_2$ είναι:

$$\mu > 0, \text{ αφού } x_1, x_2 > 0$$

  και από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι:

$$f(\mu) < 0$$

- Επίσης, αφού $x_1 > 0$ θα πρέπει το 0 να είναι αριστερά του $x_1$, όπως φαίνεται στον πίνακα προσήμων. Επειδή $\kappa < 0$ από τον πίνακα προσήμων διαπιστώνουμε ότι:

$$f(\kappa) > 0$$

  Τελικά, είναι $\kappa < 0$, $\mu > 0$, $f(\kappa) > 0$, $f(\mu) < 0$, οπότε:

$$\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu) > 0$$

**41. Θέμα 1487 Αρχέτυπο**

α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + 9x + 18$ (Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$ (Μονάδες 7)

β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x. (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$$ (Μονάδες 7)

**ΛΥΣΗ**

**α) i)** Το τριώνυμο $x^2 + 9x + 18$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 9$, $\gamma = 18$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 81 - 72 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-9+3}{2} = -3 \\ \frac{-9-3}{2} = -6 \end{cases}$$

**ii)** Επειδή $|x + 3| \geq 0$ και $|x^2 + 9x + 18| \geq 0$ ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|x + 3| = 0 \ \textbf{και} \ |x^2 + 9x + 18| = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 3 = 0 \ \textbf{και} \ x^2 + 9x + 18 = 0) \overset{(\alpha i)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x = -3 \ \textbf{και} \ x = -3 \ ή \ x = -6) \Leftrightarrow x = -3$$

**β) i)** Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$ | $-\infty$ | | $-6$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 + 9x + 18$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Από τον πίνακα προσήμων συμπεραίνουμε ότι:

$$x^2 + 9x + 18 < 0 \Leftrightarrow -6 < x < -3 \Leftrightarrow x \in (-6, -3)$$

$$x^2 + 9x + 18 > 0 \Leftrightarrow (x < -6 \ ή \ x > -3) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (-3, +\infty)$$

**ii)** Είναι:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x^2 + 9x + 18| = -(x^2 + 9x + 18) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9x + 18 < 0 \overset{(\beta ii)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -6 < x < -3 \Leftrightarrow x \in (-6, -3)$$

**42. Θέμα 1493**

Οι πλευρές $x_1$, $x_2$ ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2x + \lambda(2-\lambda) = 0 \quad \text{με} \quad \lambda \in (0, 2)$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο $\Pi$ του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν $E$ του ορθογωνίου συναρτήσει του $\lambda$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $E \le 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$ (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του $\lambda$ το εμβαδόν $E$ του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

**ΛΥΣΗ**

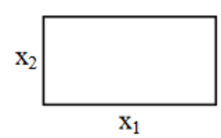
**α)** Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2}{1} = 2 \quad \text{και}$$

$$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda(2-\lambda)}{1} = \lambda(2-\lambda)$$

**i)** Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 2 = 4$$




**ii)** Το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου είναι:

$$E = x_1x_2 = \lambda(2-\lambda)$$

**β)** Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$E \le 1 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \ge 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda \in (0, 2)$.

γ) Είναι:

$$E = 1 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Στην περίπτωση αυτή είναι $x_1 = x_2 = 1$ οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.