

Κεφ. 4.1. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Α' Λυκείου**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ****Θέμα 2 - Κωδικοί:**

**1243, 1252, 1260, 1261, 1268, 1278, 1284, 1330, 1355, 1357, 1365,
1367, 1374, 1376, 1378, 1379, 1383, 12909, 13025, 14295, 14319**

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. Θέμα 1243

- α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

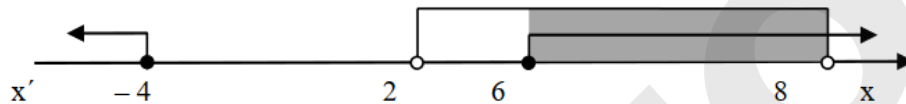
$$\begin{aligned} |x - 1| \geq 5 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 1 \leq -5 \text{ ή } x - 1 \geq 5) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \leq -4 \text{ ή } x \geq 6) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [6, +\infty) \end{aligned}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} d(x, 5) < 3 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x - 5| < 3 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3 < x - 5 < 3 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3 + 5 < x - 5 + 5 < 3 + 5 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 < x < 8 &\Leftrightarrow x \in (2, 8) \end{aligned}$$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών:



Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$6 \leq x < 8 \Leftrightarrow x \in [6, 8)$$

2. Θέμα 1252

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|y - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y - 3 < 1 \Leftrightarrow -1 + 3 < y - 3 + 3 < 1 + 3 \Leftrightarrow 2 < y < 4$$

β) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο: $\Pi = 2x + 2y$. Είναι:

$$1 < x < 3 \Leftrightarrow 1 \cdot 2 < 2x < 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 2 < 2x < 6 \quad (1)$$

$$2 < y < 4 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 < 2y < 2 \cdot 4 \Leftrightarrow 4 < 2y < 8 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$2 + 4 < 2x + 2y < 6 + 8 \Leftrightarrow 6 < \Pi < 14$$

Έξυπνα & Εύκολα!

3. Θέμα 1260

Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| - |x-2|$

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$ (Μονάδες 13)

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$$1 < x < 2 \Leftrightarrow (1 < x \text{ και } x < 2) \Leftrightarrow (0 < x - 1 \text{ και } x - 2 < 0)$$

Τότε:

$$|x - 1| = x - 1 \text{ και } |x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$$

Άρα:

$$A = |x - 1| - |x - 2| = x - 1 - (2 - x) = x - 1 - 2 + x = 2x - 3$$

β) Για $x < 1$ είναι:

$$|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x \text{ και } |x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$$

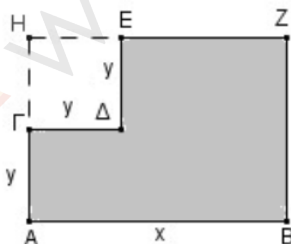
Επομένως:

$$A = |x - 1| - |x - 2| = 1 - x - (2 - x) = 1 - x - 2 + x = -1, \text{ σταθερή}$$

4. Θέμα 1261 Αρχέτυπο

Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος του ΕΖΒΑΓΔ είναι:

$$\begin{aligned}\Pi &= AB + BZ + ZE + ΕΔ + ΔΓ + ΓΑ = \\ &= x + 2y + x - y + y + y + y = 2x + 4y\end{aligned}$$

β) Είναι:

$$5 < x < 8 \Leftrightarrow 2 \cdot 5 < 2x < 2 \cdot 8 \Leftrightarrow 10 < 2x < 16 \quad (1)$$

$$1 < y < 2 \Leftrightarrow 4 \cdot 1 < 4y < 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 4 < 4y < 8 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$10 + 4 < 2x + 4y < 16 + 8 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 24$$

5. Θέμα 1268

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν: $|x-3| \leq 2$ και $|y-6| \leq 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|x-3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \Leftrightarrow -2+3 \leq x-3+3 \leq 2+3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$$

$$|y-6| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq y-6 \leq 4 \Leftrightarrow -4+6 \leq y-6+6 \leq 4+6 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 10$$

β) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y είναι $\Pi = 4x + 2y$.

Από το σκέλος (i) βρίσκουμε:

$$1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 \leq 4x \leq 5 \cdot 4 \Leftrightarrow 4 \leq 4x \leq 20 \quad (1)$$

$$2 \leq y \leq 10 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 \leq 2y \leq 10 \cdot 2 \Leftrightarrow 4 \leq 2y \leq 20 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$4 + 4 \leq 4x + 2y \leq 20 + 20 \Leftrightarrow 8 \leq \Pi \leq 40$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος είναι 8 και η μέγιστη η 40.

Έξυπνα & Εύκολα!

6. Θέμα 1278 Αρχέτυπο

Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T = 15 + 25 \cdot x, \text{ όταν } 0 \leq x \leq 200$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης θέτουμε στη δοθείσα σχέση $x = 30$ και βρίσκουμε ισοδύναμα:

$$T = 15 + 25 \cdot 30$$

$$T = 15 + 750$$

$$T = 765^{\circ}\text{C}$$

β) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C θέτουμε στη δοθείσα σχέση $T = 290$ και βρίσκουμε ισοδύναμα:

$$290 = 15 + 25 \cdot x$$

$$275 = 25x$$

$$x = 11 \text{ χιλιόμετρα}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Για να βρούμε σε ποιο βάθος η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C λύνουμε την ανίσωση:

$$T > 440 \Leftrightarrow$$

$$15 + 25 \cdot x > 440 \Leftrightarrow$$

$$25 \cdot x > 425 \Leftrightarrow$$

$$x > 17 \text{ χιλιόμετρα}$$

Επομένως η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη των 440°C σε βάθος άνω των 17 χιλιομέτρων.

7. Θέμα 1284 **Αρχέτυπο**

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4| \geq 3$ (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||\alpha+4|-3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|x+4| \geq 3 \quad \text{αν και μόνο αν}$$

$$x+4 \leq -3 \text{ ή } x+4 \geq 3 \quad \text{αν και μόνο αν}$$

$$x \leq -7 \text{ ή } x \geq -1$$

β) Ισχύει ότι:

$$\alpha \geq -1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + 4 \geq -1 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + 4 \geq 3, \text{ δηλαδή } \alpha + 4 > 0$$

Άρα, $|\alpha + 4| = \alpha + 4$. Τότε η παράσταση A γράφεται:

$$A = ||\alpha + 4| - 3| = |\alpha + 4 - 3| = |\alpha + 1| = \alpha + 1, \text{ αφού } \alpha \geq -1$$

Έξυπνα & Εύκολα!

8. Θέμα 1330

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x - 3| \leq 5$ (Μονάδες 9)

ii) $|2x - 3| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

αi) Είναι:

$$|2x - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow$$

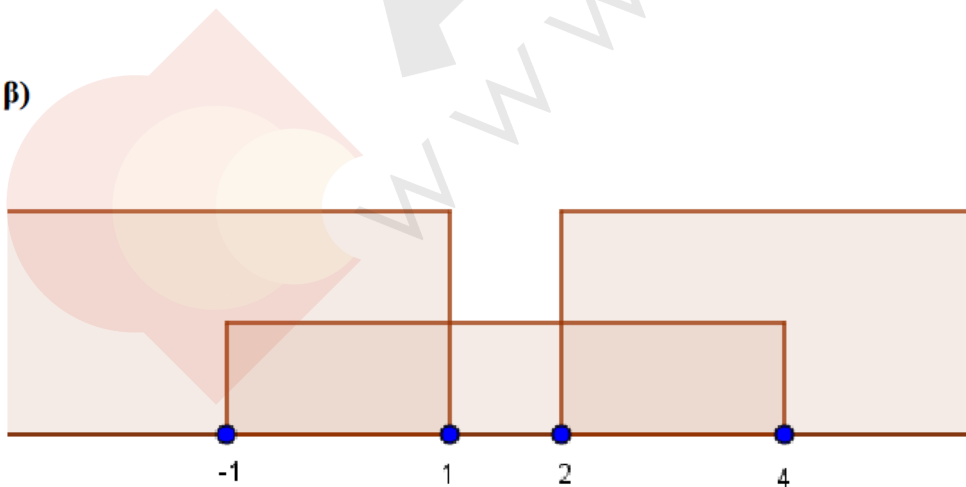
$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$$

αii) Είναι:

$$|2x - 3| \geq 1 \Leftrightarrow (2x - 3 \leq -1 \text{ ή } 2x - 3 \geq 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \leq 1 \text{ ή } x \geq 2)$$

β)



Έξυπνα & Εύκολα!

9. Θέμα 1355 **Αρχέτυπο**

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5| < 2$ (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x| > 5$ (Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

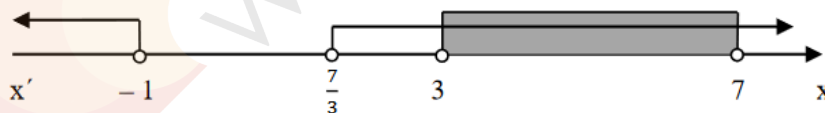
α) Είναι:

$$\begin{aligned} |x-5| < 2 &\Leftrightarrow -2 < x-5 < 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2+5 < x-5+5 < 2+5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 < x < 7 \quad (1) \end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} |2-3x| > 5 &\Leftrightarrow 2-3x < -5 \quad \text{ή} \quad 2-3x > 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -3x < -5-2 \quad \text{ή} \quad -3x > 5-2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-3x < -7 \quad \text{ή} \quad -3x > 3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x > \frac{7}{3} \quad \text{ή} \quad x < -1 \right) \quad (2) \end{aligned}$$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον ίδιο άξονα αριθμών:



Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$3 < x < 7 \Leftrightarrow x \in (3, 7)$$

Έξυπνα & Εύκολα!

10. Θέμα 1357

Δίνονται οι ανισώσεις: $3x-1 < x+9$ και $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned} 3x - 1 &< x + 9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x - x &< 9 + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x &< 10 \Leftrightarrow x < 5 \quad (1) \end{aligned}$$

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{x}{2} &\leq x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 - x \leq 2x + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2x - x &\leq 1 - 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3x &\leq -3 \Leftrightarrow x \geq 1 \quad (2) \end{aligned}$$

β) Συναληθεύουμε τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$1 \leq x < 5 \Leftrightarrow x \in [1, 5)$$

Έξυπνα & Εύκολα!

11. Θέμα 1365 Αρχέτυπο

α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 5| \geq 3$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

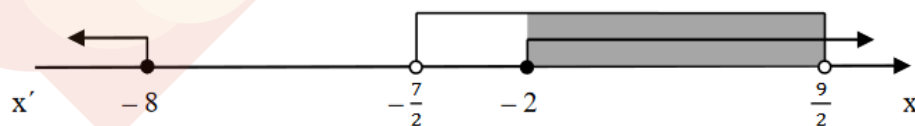
α) Είναι:

$$\begin{aligned} \left|x - \frac{1}{2}\right| < 4 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4 < x - \frac{1}{2} < 4 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4 + \frac{1}{2} < x < 4 + \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < \frac{9}{2} \end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} |x + 5| \geq 3 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + 5 \leq -3 \text{ ή } x + 5 \geq 3) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x \leq -8 \text{ ή } x \geq -2) \end{aligned}$$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών:



Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-2 \leq x < \frac{9}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-2, \frac{9}{2}\right)$$

Έξυπνα & Εύκολα!

12. Θέμα 1367

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 4| = 3|x - 1|$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x - 5| > 1$ (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned} & |2x - 4| = 3|x - 1| \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \{2x - 4 = -3(x - 1) \text{ ή } 2x - 4 = 3(x - 1)\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \{2x - 4 = -3x + 3 \text{ ή } 2x - 4 = 3x - 3\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \{5x = 7 \text{ ή } -x = 1\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{x = \frac{5}{7} \text{ ή } x = -1\right\} \end{aligned}$$

β) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} & |3x - 5| > 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \{2x - 5 < -1 \text{ ή } 3x - 5 > 1\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \{3x < 4 \text{ ή } 3x > 6\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{x < \frac{4}{3} \text{ ή } x > 2\right\} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup (2, +\infty) \end{aligned}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Είναι $\frac{7}{5} - \frac{4}{3} = \frac{21}{15} - \frac{20}{15} = \frac{1}{15} > 0 \Leftrightarrow \frac{7}{5} > \frac{4}{3}$ και $\frac{7}{5} - 2 = \frac{7}{5} - \frac{10}{5} = -\frac{3}{5} < 0 \Leftrightarrow \frac{7}{5} < 2$. Άρα

ο αριθμός $\frac{7}{5}$ δεν ανήκει στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup (2, +\infty)$, οπότε δεν είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

Είναι $-1 < 0 < \frac{4}{3}$, άρα ο αριθμός -1 ανήκει στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup (2, +\infty)$, οπότε είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β).

13. Θέμα 1374 Αρχέτυπο

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1 - 2x| < 5$ και (Μονάδες 9)

ii) $|1 - 2x| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) i) Είναι:

$$\begin{aligned} |1 - 2x| < 5 &\Leftrightarrow -5 < 1 - 2x < 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -5 - 1 < 1 - 2x - 1 < 5 - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -6 < -2x < 4 \Leftrightarrow \frac{-6}{-2} > \frac{-2x}{-2} > \frac{4}{-2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 > x > -2 \Leftrightarrow -2 < x < 3 \end{aligned}$$

ii) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} |1 - 2x| \geq 1 &\Leftrightarrow (1 - 2x \leq -1 \text{ ή } 1 - 2x \geq 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-2x \leq -2 \text{ ή } -2x \geq 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-2x}{-2} \geq \frac{-2}{-2} \text{ ή } \frac{-2x}{-2} \leq \frac{0}{-2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \geq 1 \text{ ή } x \leq 0) \end{aligned}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Παριστάνουμε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα αριθμών και όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί:



οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι:

$$-2 < x \leq 0 \text{ ή } 1 \leq x < 3 \Leftrightarrow x \in (-2, 0] \cup [1, 3)$$

Οι ακέραιες λύσεις είναι οι:

$$x = -1, x = 0, x = 1 \text{ και } x = 2$$

14. Θέμα 1376

Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$$(x-4 \geq 0 \text{ και } x+1 \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq 4 \text{ και } x \geq -1) \Leftrightarrow x \geq 4 \Leftrightarrow x \in [4, +\infty)$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}) = (\sqrt{x-4})^2 - (\sqrt{x+1})^2 = \\ &= x-4 - (x+1) = x-4-x-1 = -5 \end{aligned}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

15. Θέμα 1378

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$$(x-4 \geq 0 \text{ και } 6-x \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq 4 \text{ και } -x \geq -6) \Leftrightarrow (x \geq 4 \text{ και } x \leq 6) \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow x \in [4, 6]$$

β) Για $x=5$, είναι:

$$A = \sqrt{5-4} + \sqrt{6-5} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$$

Τότε:

$$A^2 + A - 6 = 2^2 + 2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$$

16. Θέμα 1379 Αρχέτυπο

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)

β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$$(x^2+4 \geq 0 \text{ και } x-4 \geq 0) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ και } x \geq 4) \Leftrightarrow x \geq 4 \Leftrightarrow x \in [4, +\infty)$$

β) Για $x=4$, είναι:

$$A = \sqrt{4^2+4} - \sqrt{4-4} = \sqrt{16+4} - \sqrt{0} = \sqrt{20}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} A^2 - A &= \sqrt{20}^2 - \sqrt{20} = 20 - \sqrt{4 \cdot 5} = 20 - \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = \\ &= 20 - 2\sqrt{5} = 2(10 - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

17. Θέμα 1383

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$,

α) να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$

(Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned} |x+1| < 2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 < x+1 < 2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2-1 < x+1-1 < 2-1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -3 < x < 1 &\Leftrightarrow x \in (-3, 1) \end{aligned}$$

β) Από το σκέλος (α) ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} -3 < x < 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (-3 < x \text{ και } x < 1) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (0 < x+3 \text{ και } x-1 < 0) &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

Άρα:

$$|x+3| = x+3 \text{ και } |x-1| = -(x-1) = 1-x$$

Τότε:

$$K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4} = \frac{x+3+1-x}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Έξυπνα & Εύκολα!

18. Θέμα 12909 Αρχέτυπο

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3| < 5$.

α) Να δείξετε ότι $x \in (-2, 8)$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3| < 5$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) $|x-3| < 5 \Leftrightarrow -5 < x-3 < 5 \Leftrightarrow -2 < x < 8 \Leftrightarrow x \in (-2, 8)$.

β) Οι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3| < 5$ είναι οι ακέραιοι αριθμοί που ανήκουν στο διάστημα $(-2, 8)$, δηλαδή οι: $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

γ) Είναι $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$ οπότε:

$A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και $A \cap B = \{-1, 0, 3, 4\}$.

Έξυπνα & Εύκολα!

19. Θέμα 13025 Αρχέτυπο

α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x-1| \leq 23$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα ανίσωση γράφεται $-\frac{(3-2x)}{7} \geq 5$ οπότε $\frac{2x-3}{7} \geq 5 \Leftrightarrow 2x-3 \geq 35$, άρα $2x \geq 38 \Leftrightarrow x \geq 19$.

β) Καθώς οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές, η δοθείσα ανίσωση γράφεται ισοδύναμα $|x+1| \leq 23 \Leftrightarrow -23 \leq x+1 \leq 23 \Leftrightarrow -23-1 \leq x \leq 23-1 \Leftrightarrow -24 \leq x \leq 22$.

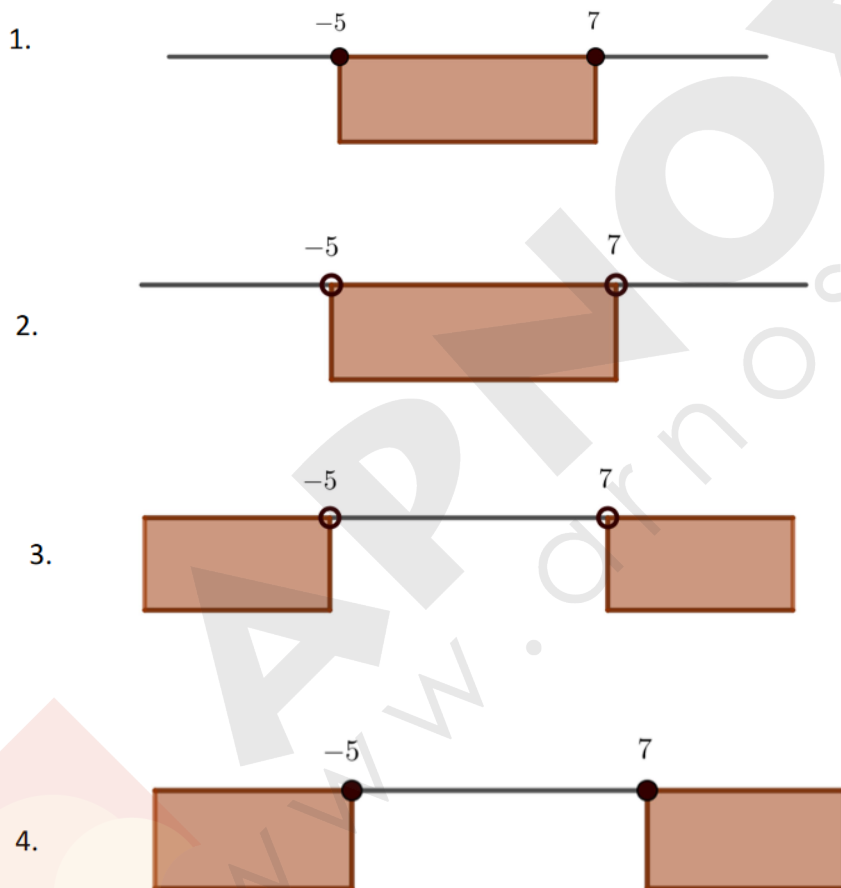
γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων στον ίδιο άξονα, απ'όπου προκύπτει ότι $19 \leq x \leq 22$.



Έξυπνα & Εύκολα!

20. Θέμα 14295 Αρχέτυπο

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1| \geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:



(Μονάδες 12)

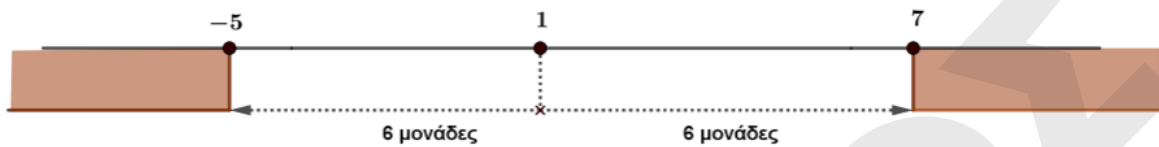
β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

(Μονάδες 13)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Το ζητούμενο της ανίσωσης $|x - 1| \geq 6$ διατυπώνεται γεωμετρικά ως εξής: Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x οι οποίοι απέχουν από το 1 απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του 6. Η σωστή αναπαράσταση είναι η 4^η, διότι



β) Θα λύσουμε την ανίσωση αλγεβρικά, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$|x - 1| \geq 6, \text{ δηλαδή}$$

$$x - 1 \leq -6 \quad \text{ή} \quad x - 1 \geq 6, \text{ οπότε}$$

$$x \leq -5 \quad \text{ή} \quad x \geq 7$$

Δηλαδή το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το $(-\infty, -5] \cup [7, +\infty)$ που είναι πράγματι η αναπαράσταση 4.

21. Θέμα 14319 Αρχέτυπο

Δίνεται η ανίσωση $|2x - 5| < 3$

α) Να λύσετε την ανίσωση.

(Μονάδες 12)

β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$A = (\alpha - 1)(\alpha - 5).$$

(Μονάδες 13)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|2x - 5| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 5 < 3 \Leftrightarrow -3 + 5 < 2x < 3 + 5 \Leftrightarrow 2 < 2x < 8 \Leftrightarrow 1 < x < 4.$$

Άρα, λύση της ανίσωσης είναι κάθε αριθμός x , με $x \in (1, 4)$.

β) Ο αριθμός α είναι λύση της ανίσωσης, οπότε $\alpha \in (1, 4)$. Έτσι έχουμε $\alpha > 1$, οπότε $\alpha - 1 > 0$ και $\alpha < 5$, οπότε $\alpha - 5 < 0$.

Επομένως οι παράγοντες του γινομένου $(\alpha - 1)(\alpha - 5)$ είναι ετερόσημοι, οπότε

$$A = (\alpha - 1)(\alpha - 5) < 0.$$

Θέμα 3 – Κωδικός: 14753**22. Θέμα 14753 Αρχέτυπο**Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $2|x| - 2 \leq 0$ (1).α) Να δείξετε ότι $x \in [-1, 1]$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το -3 απόσταση το πολύ 4.

(Μονάδες 5)

γ) Για τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παρακάτω παράσταση A χωρίς τις απόλυτες τιμές.

$$A = |2x - 3| - |4 - 3x|$$

(Μονάδες 10)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Από την (1) έχουμε ισοδύναμα :

$$2|x| - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 2|x| \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι : $d(x, -3) \leq 4$.

Είναι: $d(x, -3) = |x+3| \leq |x| + 3 \leq 1 + 3 = 4$, δηλαδή $d(x, -3) \leq 4$.

Εναλλακτικά, αξιοποιώντας το α ερώτημα, έχουμε :

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x+3 \leq 4, \text{ οπότε}$$

$$|x+3| \leq 4 \Leftrightarrow d(x, -3) \leq 4.$$

γ) Είναι:

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -5 \leq 2x-3 \leq -1 < 0, \text{ οπότε}$$

$$|2x-3| = -2x+3.$$

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 3 \geq -3x \geq -3 \Leftrightarrow 7 \geq 4-3x \geq 1 > 0, \text{ οπότε}$$

$$|4-3x| = 4-3x.$$

$$\text{Τελικά: } A = |2x-3| - |4-3x| = -2x+3 - (4-3x) = -2x+3-4+3x = x-1.$$

Έξυπνα & Εύκολα!

Θέμα 4 - Κωδικοί:**1416, 1427, 1455, 1521, 13114, 13312, 13474, 14650****23. Θέμα 1416 Αρχέτυπο**

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$.

(Μονάδες 5)

β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

(Μονάδες 10)

ii. Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να

προσδιορίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για $\lambda = 0$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$0 \cdot x^2 + 2(0 - 1)x + 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2x - 2 = 0$$

$$x = -1$$

Έξυπνα & Εύκολα!

β) i) Το τριώνυμο $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [2(\lambda - 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (\lambda - 2) = 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda^2 + 8\lambda = 4$$

Επειδή είναι $\Delta > 0$, για κάθε $\lambda \neq 0$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2(\lambda-1) \pm \sqrt{4}}{2\lambda} = \frac{(-2\lambda+2) \pm 2}{2\lambda} = \begin{cases} \frac{-2\lambda+2+2}{2\lambda} = \frac{-\lambda+2}{\lambda} = -1 + \frac{2}{\lambda} \\ \frac{-2\lambda+2-2}{2\lambda} = -1 \end{cases}$$

ii) Είναι:

$$|x_1 - x_2| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left| -1 - \left(-1 + \frac{2}{\lambda} \right) \right| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left| -1 + 1 - \frac{2}{\lambda} \right| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{2}{\lambda} \right| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{|\lambda|} > 1 \Leftrightarrow$$

$$|\lambda| < 2 \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2$$

Τελικά $\lambda \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

24. Θέμα 1427

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x . (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x+4| + |x-14| = 18 \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

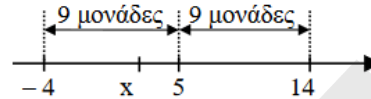
Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Η απόσταση του σημείου $M(x)$ του άξονα των πραγματικών αριθμών από το σημείο $A(5)$ είναι μικρότερη ή ίση του 9.

β) Από το διπλανό σχήμα βρίσκουμε ότι:

$$x \in [-4, 14]$$



γ) Είναι:

$$\begin{aligned} d(x, 5) \leq 9 &\Leftrightarrow |x - 5| \leq 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -9 \leq x - 5 \leq 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -9 + 5 \leq x - 5 + 5 \leq 9 + 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 14 \end{aligned}$$

δ) Ισχύει ότι:

$$x \geq -4 \Leftrightarrow x + 4 \geq 0 \quad \text{και} \quad x \leq 14 \Leftrightarrow x - 14 \leq 0$$

Τότε:

$$\begin{aligned} |x + 4| + |x - 14| &= x + 4 - (x - 14) = \\ &= x + 4 - x + 14 = 18 \end{aligned}$$

25. Θέμα 1455 Αρχέτυπο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \lambda - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2$$

Επειδή είναι $\Delta \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Η εξίσωση έχει δύο (πραγματικές) ρίζες αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\Delta > 0 &\Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 2\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(1-2\lambda)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm (1-2\lambda)}{2} = \begin{cases} \frac{1+1-2\lambda}{2} = 1 - \lambda \\ \frac{1-1+2\lambda}{2} = \lambda \end{cases}$$

Τότε:

$$\begin{aligned}0 < d(x_1, x_2) < 2 &\Leftrightarrow 0 < |x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 < |1 - \lambda - \lambda| < 2 \Leftrightarrow 0 < |1 - 2\lambda| < 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (0 < |1 - 2\lambda| \text{ και } |1 - 2\lambda| < 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - 2\lambda \neq 0 \text{ και } -2 < 1 - 2\lambda < 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2\lambda \neq 1 \text{ και } -3 < -2\lambda < 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\lambda \neq \frac{1}{2} \text{ και } -\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

26. Θέμα 1521

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 4| < 2$.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned} |x - 4| < 2 &\Leftrightarrow -2 < x - 4 < 2 \Leftrightarrow -2 + 4 < x - 4 + 4 < 2 + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 < x < 6 \Leftrightarrow x \in (2, 6) \end{aligned}$$

β) i) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} d(x, 4) < 2 &\Leftrightarrow |x - 4| < 2 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow 2 < x < 6 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 < 3 \cdot x < 3 \cdot 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6 - 4 < 3x - 4 < 18 - 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 < 3x - 4 < 14 \end{aligned}$$

Άρα $3x - 4 > 0$ (1).

Έξυπνα & Εύκολα!

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}2 < d(3x, 4) < 14 &\Leftrightarrow 2 < |3x - 4| < 14 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\&\Leftrightarrow 2 < 3x - 4 < 14 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 2 + 4 < 3x - 4 + 4 < 14 + 4 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 6 < 3x < 18 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \frac{6}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{18}{3} \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 2 < x < 6,\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει από σκέλος (α).

ii) Θέλουμε να βρούμε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση:

$$d(3x, 19) = |3x - 19|$$

Από το σκέλος (α) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}2 < x < 6 &\Leftrightarrow 2 \cdot 3 < 3 \cdot x < 3 \cdot 6 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 6 - 19 < 3x - 19 < 18 - 19 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow -13 < 3x - 19 < -1 \quad (2)\end{aligned}$$

Άρα $3x - 19 < 0$. Τότε:

$$d(3x, 19) = |3x - 19| = -(3x - 19) = -3x + 19$$

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης (2) με -1 και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}-13 < 3x - 19 < -1 &\Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow -13 \cdot (-1) > (3x - 19) \cdot (-1) > -1 \cdot (-1) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 13 > -3x + 19 > 1 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 1 < -3x + 19 < 13 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 1 < d(3x, 19) < 13\end{aligned}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

27. Θέμα 13114 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-1| - |3-3x| + |2x-4|}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = d(x, 2) - d(x, 1)$.

(Μονάδες 9)

β) Αν τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{|x-1| - |3-3x| + |2x-4|}{2} = \frac{|x-1| - 3|1-x| + 2|x-2|}{2} = \\ &= \frac{|x-1| - 3|x-1| + 2|x-2|}{2} = \frac{2|x-2| - 2|x-1|}{2} = \\ &= \frac{2(|x-2| - |x-1|)}{2} = |x-2| - |x-1| = d(x, 2) - d(x, 1). \end{aligned}$$

β) Η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow d(x, 2) - d(x, 1) = 0 \Leftrightarrow d(x, 2) = d(x, 1)$.

Αν M το σημείο του άξονα που αντιστοιχεί στη λύση x της παραπάνω εξίσωσης, αυτό θα πρέπει να ισαπέχει από τα σημεία A και B και κατά συνέπεια θα είναι το μέσο του τμήματος AB . Άρα $x = \frac{3}{2}$.

$$\gamma) \text{ Έχουμε } f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-2| = |x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = x-1 \Leftrightarrow -2 = -1 \\ \text{ή} \\ x-2 = -x+1 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση είναι αδύνατη. Άρα $x = \frac{3}{2}$.

Έξυπνα & Εύκολα!

28. Θέμα 13312

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha \cdot \beta = \lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \leq 9$.

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α , β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 36 - 4\lambda$ και για να έχει πραγματικές ρίζες πρέπει και αρκεί $\Delta \geq 0$ ισοδύναμα $36 - 4\lambda \geq 0$ οπότε $-4\lambda \geq -36$ και τελικά $\lambda \leq 9$.

β)

i. Αφού οι πραγματικοί αριθμοί α , β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο λ θα είναι ρίζες της (1) και αυτό όπως δείξαμε στο α) ερώτημα συμβαίνει αν και μόνο αν $\lambda \leq 9 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \leq 9$.

ii. Αφού οι πραγματικοί αριθμοί α , β είναι ρίζες της (1), θα είναι $\alpha = \beta$ αν και μόνο αν η (1) έχει δύο ρίζες ίσες, δηλαδή ισοδύναμα αν $\Delta = 0$ δηλαδή $36 - 4\lambda = 0$ οπότε $-4\lambda = -36$ και τελικά $\lambda = 9$ πράγμα που σημαίνει ότι $\alpha \cdot \beta = 9$.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Έστω α, β οι διαστάσεις τυχαίου ορθογωνίου παραλληλογράμμου με περίμετρο 12.

Τότε $2\alpha + 2\beta = 12$ δηλαδή $\alpha + \beta = 6$. Το εμβαδόν τους είναι ίσο με $\alpha \cdot \beta$.

Δείξαμε στο β) ερώτημα ότι αν για δύο πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $\alpha + \beta = 6$, τότε $\alpha \cdot \beta \leq 9$ και μάλιστα $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.

Συνεπώς η μεγαλύτερη τιμή του εμβαδού είναι 9 και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι ίσες, δηλαδή αν και μόνο αν είναι τετράγωνο.

29. Θέμα 13474 Αρχέτυπο

Δίνονται οι ανισώσεις

$$|x-1| \leq \sqrt{3} \quad (1) \quad \text{και} \quad 3 - \frac{x+4}{2} < 0 \quad (2)$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 5)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1).

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha + 4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|x-1| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x-1 \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 1-\sqrt{3} \leq x \leq 1+\sqrt{3}$$

β) Η μικρότερη λύση της (1) είναι ο αριθμός $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ και η μεγαλύτερη είναι $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

Για το άθροισμα s και το γινόμενο p των αριθμών αυτών ισχύει:

$$s = x_1 + x_2 = 1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 2 \quad \text{και} \quad p = x_1 x_2 = (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2.$$

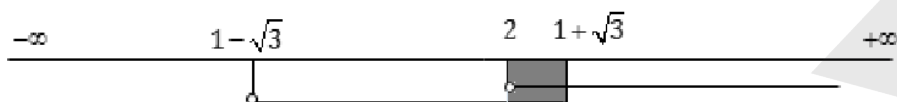
Με τη βοήθεια του τύπου $x^2 - sx + p = 0$ βρίσκουμε ότι η εξίσωση με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1), είναι η $x^2 - 2x - 2 = 0$.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Για την ανίσωση (2) έχουμε:

$$3 - \frac{x+4}{2} < 0 \Leftrightarrow 6 - (x+4) < 0 \Leftrightarrow 6 - x - 4 < 0 \Leftrightarrow -x < -2 \Leftrightarrow x > 2$$

Όπως φαίνονται στο επόμενο σχήμα, οι κοινές λύσεις των δυο ανισώσεων είναι όλοι οι αριθμοί x με: $2 < x \leq 1 + \sqrt{3}$



δ) Οι αριθμοί α , β που είναι κοινές λύσεις των (1) και (2) περιέχονται στο διάστημα $(2, 1 + \sqrt{3}]$.

Έτσι έχουμε: $2 < \alpha \leq 1 + \sqrt{3}$, οπότε $6 < 3\alpha \leq 3(1 + \sqrt{3})$, (3).

Ανάλογα, $2 < \beta \leq 1 + \sqrt{3}$, οπότε $8 < 4\beta \leq 4(1 + \sqrt{3})$, (4).

Με πρόσθεση των ανισοτήτων (3), (4) παίρνουμε $14 < 3\alpha + 4\beta \leq 7(1 + \sqrt{3})$ απ' όπου συνεπάγεται ότι:

$$2 < \frac{3\alpha + 4\beta}{7} \leq 1 + \sqrt{3}$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha + 4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση των (1) και (2), που είναι το ζητούμενο.

Έξυπνα & Εύκολα!

30. Θέμα 14650

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| \leq 3$ (1).

(Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-1|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-1| \leq 3$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-1| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

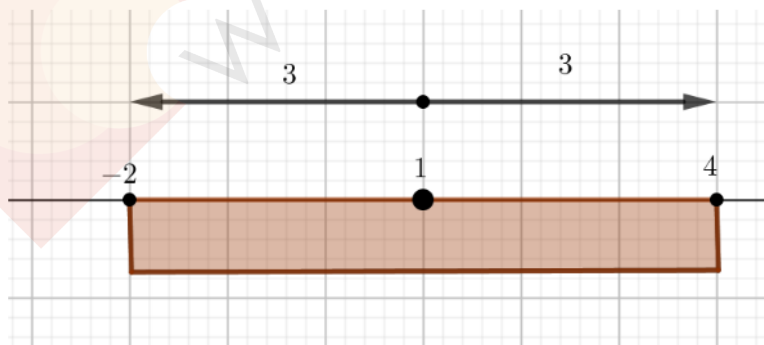
(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned} |x-1| \leq 3 &\Leftrightarrow \\ -3 \leq x-1 \leq 3 &\Leftrightarrow \\ -2 \leq x \leq 4. \end{aligned}$$

β) Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης (1) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών απεικονίζεται ως εξής:



Έξυπνα & Εύκολα!

Στον άξονα των πραγματικών αριθμών βλέπουμε τους πραγματικούς αριθμούς x , οι οποίοι απέχουν από το 1 απόσταση μικρότερη ή ίση του 3.

γ) Οι ακέραιοι που ικανοποιούν την ανίσωση (1) είναι οι: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ και 4

δ) Θέτουμε $|x| = \omega$ και η ανίσωση γίνεται $|\omega - 1| \leq 3$. Από το γ) ερώτημα γνωρίζουμε ότι την επαληθεύουν οι ακέραιοι $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ και 4. Δεδομένου ότι $\omega = |x| \geq 0$, δεκτοί είναι οι ακέραιοι: 0, 1, 2, 3 και 4. Συνεπώς:

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$|x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3 \text{ και}$$

$$|x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4.$$

Έξυπνα & Εύκολα!