Κεφ. 3.3. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1 - Κωδικός: 14782

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. Θέμα 14782 Αρχέτυπο

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Τα σημεία $A(x,y)$ και $B(-x,y)$ είναι για κάθε τιμή των x,y συμμετρικά ως προς τον άξονα xx'.

ii. Η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$ με $\alpha<0$ και ν περιττό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

iii. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $|\alpha|+|\beta|=|\alpha+\beta|$.

iv. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$.

v. Για κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με λόγο $\lambda=1$, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $S_\nu=\nu\cdot\alpha_1$.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ να δείξετε ότι $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α)

i. Λάθος, είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.

ii. Σωστό.

ii. Λάθος, ισχύει $|\alpha|+|\beta|=|\alpha+\beta|$ αν και μόνο αν $\alpha\cdot\beta\geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α,β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

iv. Σωστό.

v. Σωστό.

β) Θεωρία της παραγράφου 3.3.

Θέμα 2 - Κωδικοί2:

1238, 1246, 1250, 1262, 1269, 1280, 1285, 1288, 1290, 1315,

1316, 1331, 1334, 1337, 1348, 1349, 1359, 13028

2. Θέμα 1238

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2+10x=12$. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$-2x^2+10x-12=0 \overset{:(-2)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

Για $\alpha=1$, $\beta=-5$ και $\gamma=6$, βρίσκουμε:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1>0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{5+1}{2}=3\\ \frac{5-1}{2}=2\end{cases}$$

β) Πρέπει:

$$x-2\neq0\Leftrightarrow x\neq2$$

Τότε ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x^2+10x-12=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x=3 \text{ ή } x=2)$$

Η ρίζα $x=2$ απορρίπτεται λόγω του περιορισμού.

Τελικά η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=3$.

3. Θέμα 1246

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-1)x=(\lambda+1)(\lambda+2)$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=1$ και για $\lambda=-1$. (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) • Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται:

$$(1^2 - 1)x = (1 + 1)(1 + 2) \Leftrightarrow 0x = 6, \text{ αδύνατη}$$

• Για $\lambda = -1$ η εξίσωση γίνεται:

$$((-1)^2 - 1)x = (-1 + 1)(-1 + 2) \Leftrightarrow 0x = 0, \text{ ταυτότητα}$$

β) Η εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\lambda^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda - 1 \neq 0 \text{ και } \lambda + 1 \neq 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda \neq 1 \text{ και } \lambda \neq -1)$$

4. Θέμα 1250

Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$. (Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = -2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{3+5}{4} = 2 \\ \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Τότε:

$$2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)(x - 2) = (2x + 1)(x - 2)$$

β) Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση Κ πρέπει ο παρονομαστής της να είναι διαφορετικός του μηδενός. Δηλαδή:

$$2x^2 - 3x - 2 \neq 0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)(x - 2) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1 \neq 0 \text{ και } x - 2 \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x \neq -\frac{1}{2} \text{ και } x \neq 2\right)$$

γ) Για $x \neq -\frac{1}{2}$ και $x \neq 2$ ισχύει ότι:

$$K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2} = \frac{(x-2)^2}{(2x+1)(x-2)} = \frac{x-2}{2x+1}$$

5. Θέμα 1262 Αρχέτυπο

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\frac{1}{5+\sqrt{5}}$, $B=\frac{1}{5-\sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι:

i) $A+B=\frac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A\cdot B=\frac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) i) Είναι:

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\frac{1}{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{5-\sqrt{5}}==$$

$$=\frac{5-\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}+\frac{5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{10}{5^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{10}{25-5}=$$

$$=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

ii) Ισχύει ότι:

$$A \cdot B = \frac{1}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5-\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{1}{5^2-(\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{1}{25-5} = \frac{1}{20}$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = A + B = \frac{1}{2} \text{ και } P = A \cdot B = \frac{1}{20}$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20} = 0 \Leftrightarrow 20x^2 - 10x + 1 = 0$$

6. Θέμα 1269 Αρχέτυπο

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+5x-1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: x_1+x_2, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για $α = 2$, $β = 5$ και $γ = -1$, βρίσκουμε:

$$Δ = β^2 - 4αγ = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 25 + 8 = 33 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1 και x_2 πραγματικές και άνισες.

β) Με τη βοήθεια των τύπων Vieta βρίσκουμε:

- $x_1 + x_2 = -\frac{β}{α} = -\frac{5}{2}$
- $x_1x_2 = \frac{γ}{α} = -\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = 5$

γ) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$x^2 - Sx + P = 0$

με

$$S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \overset{(β)}{\Leftrightarrow} S = 5 \text{ και}$$

$$P = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \overset{(β)}{\Leftrightarrow} P = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow P = -2$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$x^2 - 5x - 2 = 0$

7. Θέμα 1280

Έστω *α, β* πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-15$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς *α, β* και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

α) Είναι:

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)=-30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta\cdot 2=-30 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta=-15$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2-Sx+P=0$$

με

$$S=\alpha+\beta=2 \ \text{ και } \ P=\alpha\beta=-15$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2-2x-15=0$$

Το τριώνυμο $x^2-2x-15$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-15)=4+60=64>0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{64}}{2\cdot1}=\frac{2\pm8}{2}=\begin{cases}\frac{2+8}{2}=5\\ \frac{2-8}{2}=-3\end{cases}$$

Άρα είναι:

$$(\alpha=5 \ \text{ και } \ \beta=-3) \ \text{ ή } \ (\alpha=-3 \ \text{ και } \ \beta=5)$$

8. Θέμα 1285

Το πάτωμα του εργαστήριου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις *(x+1)*μέτρα και *x* μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του *x* την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

(Μονάδες 15)

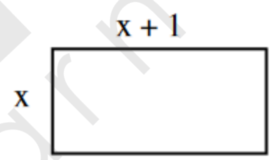
ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι:

$\Pi = 2(x + 1) + 2x = 4x + 2$, με $x > 0$

και το εμβαδόν του Ε είναι:

$E = x(x + 1) = x^2 + x$, με $x > 0$



β) Ισχύει ότι:

$E = 90$ αν και μόνο αν

$x^2 + x = 90$ αν και μόνο αν

$x^2 + x - 90 = 0$

Το τριώνυμο $x^2 + x - 90$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -90$ και διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 361 > 0$

Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 90 = 0$ είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 19}{2} = \begin{cases} \frac{-1+19}{2} = 9 \\ \frac{-1-19}{2} = -10, \text{ απορρίπτεται } (x > 0) \end{cases}$$

Άρα οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι:

x = 9 μέτρα και

x + 1 = 10 μέτρα.

9. Θέμα 1288 Αρχέτυπο

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - \kappa x - 2$, με $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta > 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1),

i) να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1).

(Μονάδες 6)

ii) να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2, όπου

$\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - \kappa x - 2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -\kappa$, $\gamma = -2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = (-\kappa)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = \kappa^2 + 8 > 0, \text{ για κάθε } \kappa \in \mathbb{R}$$

β)

i) Είναι

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\kappa}{1} = \kappa \quad \text{και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-2}{1} = -2$$

ii) Το άθροισμα των ριζών ρ_1, ρ_2 είναι:

$$\rho_1 + \rho_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2\kappa$$

και το γινόμενο:

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1x_2 = 4\cdot(-2) = -8$$

Επομένως η εξίσωση που έχει ρίζες τις ρ_1, ρ_2 είναι:

$$x^2 - 2\kappa x - 8 = 0$$

10. Θέμα 1290

Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-1)x+6=0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το *1*,να βρείτε το *λ*. (Μονάδες 13)

β) Για *λ=2* να λύσετε την εξίσωση (1) (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Αφού η εξίσωση (1) έχει λύση το 1, ισχύει ότι:

$$1^2 - (\lambda - 1)1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 8 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8$$

β) Για $\lambda = 2$ η εξίσωση γράφεται:

$$x^2 - (2-1)x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0$$

Για $\alpha = 1$, $\beta = -1$ και $\gamma = 6$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 - 24 = -23 < 0$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

11. Θέμα 1315

Έστω *α, β* πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = 4 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς *α, β*, και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta) = 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(\alpha + \beta) = 20 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha + \beta = 5 \ \text{ και } \ P = \alpha\beta = 4$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Το τριώνυμο $x^2 - 5x + 4$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

12. Θέμα 1316 Αρχέτυπο

Έστω *α, β* πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta = -1 \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta = -12$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς *α, β* και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = -12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)^2 = -12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta\cdot(-1)^2 = -12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta = -12$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha+\beta = -1 \ \text{ και } \ P = \alpha\beta = -12$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 + x - 12 = 0$$

Για $\alpha = 1, \beta = 1$ και $\gamma = -12$, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-12) = 1 + 48 = 49 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases}\frac{-1+7}{2}=3\\ \frac{-1-7}{2}=-4\end{cases}$$

Άρα είναι:

$$(\alpha=3\ \text{ και }\ \beta=-4)\ \text{ ή }\ (\alpha=-4\ \text{ και }\ \beta=3)$$

13. Θέμα 1331 Αρχέτυπο

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6=0$ (1) (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|<2$ (2) (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $2x^2-x-6$ έχει $\alpha=2$, $\beta=-1$, $\gamma=-6$ και διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-6)=1+48=49>0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 7}{4}=\begin{cases}\frac{1+7}{4}=2\\ \frac{1-7}{4}=-\frac{3}{2}\end{cases}$$

β) Είναι:

$$|x-1|<2\Leftrightarrow -2<x-1<2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2+1<x-1+1<2+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1<x<3$$

γ) Η τιμή του x που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2) είναι η $x=2$.

14. Θέμα 1334

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί *α* ,*β*, τέτοιοι ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 272 .$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha \cdot \beta = -64 .$$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς *α, β* .

(Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς *α* ,*β*. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Αντικαθιστώντας στην ταυτότητα $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε:

$$12^2 = 272 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow 144 = 272 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha\beta = -128 \Leftrightarrow \alpha\beta = -64$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \alpha + \beta = 12 \ \text{και} \ P = \alpha\beta = -64$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 12x - 64 = 0$$

γ) Για α = 1, β = – 12 και γ = – 64, βρίσκουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64) = 144 + 256 = 400 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{400}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 20}{2} = \begin{cases} \frac{12+20}{2} = 16 \\ \frac{12-20}{2} = -4 \end{cases}$$

Άρα είναι:

$$(\alpha = 16 \text{ και } \beta = -4) \text{ ή } (\alpha = -4 \text{ και } \beta = 16)$$

15. Θέμα 1337

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}}$, $B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς *Α, Β*

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) • Είναι:

$$A + B = \frac{1}{3-\sqrt{7}} + \frac{1}{3+\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{3+\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} + \frac{3-\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{3-\sqrt{7}+3+\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{6}{3^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{6}{9-7} = \frac{6}{2} = 3$$

• Ισχύει ότι:

$$A \cdot B = \frac{1}{3-\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{3+\sqrt{7}} =$$
$$= \frac{1}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} = \frac{1}{3^2-(\sqrt{7})^2} =$$
$$= \frac{1}{9-7} = \frac{1}{2}$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = A + B = 3 \text{ και } P = A \cdot B = \frac{1}{2}$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 0$$

16. Θέμα 1348 Αρχέτυπο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$$ (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\alpha = 1$, $\beta = -2\lambda$ και $\gamma = 4(\lambda - 1)$. Τότε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$$
$$= (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4(\lambda - 1) =$$
$$= 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 =$$
$$= (2\lambda - 4)^2$$

β) Επειδή $\Delta = (2\lambda - 4)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές.

γ) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2\lambda}{1} = 2\lambda \text{ και}$$
$$x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4(\lambda-1)}{1} = 4(\lambda - 1) = 4\lambda - 4$$

Άρα:

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\lambda = 4\lambda - 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 = 2\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 2$$

17. Θέμα 1349

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$ (Μονάδες 12)

β) Αν α, β με α< β είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+3=0$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|2x-1|=3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x-1=3 \text{ ή } 2x-1=-3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x=4 \text{ ή } 2x=-2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x=2 \text{ ή } x=-1)$$

β) Είναι $\alpha=-1$ και $\beta=2$. Τότε η εξίσωση γράφεται:

$$-x^2+2x+3=0$$

Για $\alpha=-1$, $\beta=2$ και $\gamma=3$, βρίσκουμε:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot(-1)\cdot 3=4+12=16>0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2(-1)}=\frac{-2\pm 4}{-2}=\begin{cases}\frac{-2+4}{-2}=-1\\ \frac{-2-4}{-2}=3\end{cases}$$

18. Θέμα 1359

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=\sqrt{3}$. (Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|x-2|=\sqrt{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2=\sqrt{3} \text{ ή } x-2=-\sqrt{3}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x=2+\sqrt{3} \text{ ή } x=2-\sqrt{3})$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2-Sx+P=0$$

με

$$S=x_1+x_2=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4 \text{ και}$$
$$P=x_1x_2=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-\sqrt{3}^2=4-3=1$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2-4x+1=0$$

19. Θέμα 13028

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - 2\alpha x - 2a - 2 = 0$, με $\alpha \in R^*$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3.

(Μονάδες 10)

β) Για α=2 να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Για x=3 η εξίσωση (1) γίνεται:

$\alpha 3^2 - 2\alpha 3 - 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow 9\alpha - 6\alpha - 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2.$

Άρα α=2

β) Στην (1) αντικαθιστούμε το α=2 και προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση

$2x^2 - 4x - 6 = 0$ απλοποιούμε με το 2 και έχουμε $x^2 - 2x - 3 = 0$, με α=1, β=-2 και γ=-3.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 1 = 16 > 0$ οπότε έχει δύο άνισες ρίζες $x_1 = \frac{-(-2)+4}{2} = 3$ και $x_2 = \frac{-(-2)-4}{2} = -1$.

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις x=-1 ή x=3.

Θέμα 3 - Κωδικοί: 14578, 14749

20. Θέμα 14578

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1-x}$$

(Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1-x} = 0.$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Η παράσταση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους ισχύει:

$x^2 - x \neq 0$ και $1 - x \neq 0$, δηλαδή

$x(x-1) \neq 0$ και $x \neq 1$, τελικά

$x \neq 0$ και $x \neq 1$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{2x^2-1}{x^2-x}+\frac{1}{1-x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^2-1}{x(x-1)}-\frac{1}{x-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2-1-x=0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2-x-1=0.$$

Η εξίσωση $2x^2-x-1=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-1)=9>0$ και ρίζες τις

$$x_1=\frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\cdot2}=-\frac{1}{2} \text{ και}$$

$$x_2=\frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\cdot2}=1 \text{ ,που δεν είναι δεκτή, αφού } x\neq1.$$

Άρα η εξίσωση έχει μία λύση την $x=-\dfrac{1}{2}$.

21. Θέμα 14749 **Αρχέτυπο**

α)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση: $\mathrm{A}=\dfrac{x}{x-|x|}$.

(Μονάδες 9)

ii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A, να δείξετε ότι $\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}$.

(Μονάδες 7)

β) Για $x<0$, να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{x^3}{x-|x|}=\dfrac{3}{2}x+2$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α)

i. Η παράσταση ορίζεται όταν $x-|x|\neq 0$, δηλαδή όταν $|x|\neq x$ και τελικά όταν $x<0$.

ii. $A=\frac{x}{x-|x|}=\frac{x}{x-(-x)}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$.

β) Για $x<0$, έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{x^3}{x-|x|}=\frac{3}{2}x+2\Leftrightarrow$$
$$\frac{x}{x-|x|}\cdot x^2=\frac{3}{2}x+2\Leftrightarrow$$
$$A\cdot x^2=\frac{3}{2}x+2\overset{\alpha)ii}{\Leftrightarrow}$$
$$\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x+2\Leftrightarrow$$
$$x^2-3x-4=0\Leftrightarrow$$
$$x=-1,\ x=4.$$

Δεκτή είναι η λύση $x=-1$.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1388, 1406, 1407, 1412, 1418, 1431, 1437, 1439, 1440, 1448, 1451, 1452, 1459, 1460, 1461, 1463, 1469, 1475, 1476, 1477, 1478, 1485, 1491, 1500, 1508, 1509, 1516, 12683, 12912, 13320, 14406, 14490, 14543, 14651, 14759

22. Θέμα 1388 Αρχέτυπο

Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2 -2(\lambda-2)x+1=0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι 1ου βαθμού. (Μονάδες 5)

β) Αν η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 10)

γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο

$$(8-\lambda)x^2 -2(\lambda-2)x+1$$

είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση είναι 1^{ου} βαθμού όταν

$$8 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8$$

β) Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού για $\lambda \neq 8$. Για να έχει η εξίσωση αυτή μια διπλή ρίζα πρέπει:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$[-2(\lambda - 2)]^2 - 4 \cdot (8 - \lambda) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda - 2)^2 - 4(8 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 32 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 16\lambda + 16 - 32 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda^2 - 12\lambda - 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta' = 25$ και ρίζες τις

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

- Για $\lambda = 4$ η εξίσωση γράφεται:

$$(8 - 4)x^2 - 2(4 - 2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

που έχει διπλή ρίζα την $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

- Για $\lambda = -1$ η εξίσωση γράφεται:

$$(8 + 1)x^2 - 2(-1 - 2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$9x^2 + 6x + 1 = 0$$

που έχει διπλή ρίζα την $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{-6}{2 \cdot 9} = -\dfrac{1}{3}$

γ) Για λ = 4 το τριώνυμο γράφεται:

$$(8-4)x^2 - 2(4-2)x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geq 0,$$

δηλαδή μη αρνητικό για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Για λ = – 1 το τριώνυμο γράφεται:

$$(8+1)x^2 - 2(-1-2)x + 1 = 9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2 \geq 0$$

δηλαδή μη αρνητικό για κάθε πραγματικό αριθμό x.

23. Θέμα 1406

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha+1)x + 4+\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (\alpha - 1)^2 - 16.$$

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες x_1, x_2, τότε:

i) Να εκφράσετε το άθροισμα $S= x_1+x_2$ και το γινόμενο $P= x_1 \cdot x_2$ των ριζών του συναρτήσει του α (Μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = 4$ (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - (\alpha + 1)x + 4 + \alpha$ έχει διακρίνουσα:

$\Delta = [-(\alpha+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4+\alpha) = (\alpha+1)^2 - 4(4+\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - 16 - 4\alpha = (\alpha^2 - 2\alpha + 1) - 16 =$
$=(\alpha-1)^2 - 16$

β) Το τριώνυμο $x^2-(\alpha+1)x+4+\alpha$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-1)^2-16>0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-1)^2>16 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(\alpha-1)^2}>\sqrt{16} \Leftrightarrow$$

$$|\alpha-1|>4 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-1<-4 \text{ ή } \alpha-1>4) \Leftrightarrow$$

$$\alpha<-3 \text{ ή } \alpha>5$$

γ) i) Είναι:

$$S=x_1+x_2=-\frac{-(\alpha+1)}{1}=\alpha+1 \quad \text{και}$$

$$P=x_1\cdot x_2=\frac{4+\alpha}{1}=4+\alpha$$

ii) Ισχύει ότι:

$d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=|x_1-1|\cdot|x_2-1|=|(x_1-1)\cdot(x_2-1)|=|x_1x_2-x_1-x_2+1|=|P-S+1|=$

$=|4+\alpha-\alpha-1+1|=4$

24. Θέμα 1407 **Αρχέτυπο**

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ *και* t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $t_A < t_B$

$$t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} \quad \text{και}$$

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|.$$

α) i) Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \dfrac{t_A + t_B}{2}$. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A + t_B = 6 \quad \text{και} \quad t_A \cdot t_B = 8$$

i) Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) i) Ισχύει ότι:

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta| \Leftrightarrow$$

$$(t_A - t_\Delta = t_B - t_\Delta \text{ ή } t_A - t_\Delta = -(t_B - t_\Delta)) \Leftrightarrow$$

$$(t_A = t_B, \text{ απορρίπτεται ή } t_A - t_\Delta = -t_B + t_\Delta) \Leftrightarrow$$

$$(t_A + t_B = 2t_\Delta) \Leftrightarrow$$

$$t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$$

ii) Είναι:

$t_\Gamma - t_B = \frac{t_A + 2t_B}{3} - t_B = \frac{t_A + 2t_B - 3t_B}{3} = \frac{t_A - t_B}{3} < 0.$ Άρα $t_\Gamma < t_B$ (1)

Ισχύει ότι:

$t_\Delta - t_\Gamma = \frac{t_A + t_B}{2} - \frac{t_A + 2t_B}{3} = = \frac{3t_A + 3t_B - 2t_A - 4t_B}{6} = \frac{t_A - t_B}{6} < 0.$ Άρα $t_\Delta < t_\Gamma$ (2)

Έχουμε:

$t_A - t_\Delta = t_A - \frac{t_A + t_B}{2} = \frac{2t_A - t_A - t_B}{2} = \frac{t_A - t_B}{2} < 0.$ Άρα $t_A < t_\Delta$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) βρίσκουμε:

$$t_A < t_\Delta < t_\Gamma < t_B$$

Επομένως, 1ος τερμάτισε ο Αργύρης, 2ος ο Δημήτρης, 3ος ο Γιώργος και 4ος ο Βασίλης.

β) i) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $t^2 - St + P = 0$ με $S = t_A + t_B = 6$ και $P = t_A \cdot t_B = 8$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η: $t^2 - 6t + 8 = 0$

ii) Η εξίσωση $t^2 - 6t + 8 = 0$ έχει ρίζες $t_A = 2$ λεπτά και $t_B = 4$ λεπτά (επειδή $t_A < t_B$).

Επομένως:

$t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$ λεπτά και

$t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} = \frac{2 + 2 \cdot 4}{3} = \frac{10}{3}$ λεπτά

25. Θέμα 1412 **Αρχέτυπο**

Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda^2-\lambda\right)\cdot x^2-\left(\lambda^2-1\right).x+\lambda-1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή : $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$ (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού αν και μόνο αν:

$$\lambda^2-\lambda\neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\lambda\neq 0 \text{ και } \lambda\neq 1}$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$(\lambda^2-\lambda)x^2-(\lambda^2-1)x+\lambda-1=0$$

$$\lambda(\lambda-1)x^2-(\lambda-1)(\lambda+1)x+(\lambda-1)=0$$

$$(\lambda-1)[\lambda x^2-(\lambda+1)x+1]=0 \overset{\lambda\neq 1}{\Longleftrightarrow}$$

$$\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$$

γ) Για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ -{0, 1} το τριώνυμο $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1$ έχει διακρίνουσα:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=[-(\lambda+1)]^2-4\cdot\lambda\cdot 1=\lambda^2+2\lambda+1-4\lambda=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2>0$,

Επομένως η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-(\lambda+1))\pm\sqrt{(\lambda-1)^2}}{2\cdot\lambda}=\frac{\lambda+1\pm(\lambda-1)}{2\lambda}=\begin{cases}\dfrac{\lambda+1+\lambda-1}{2\lambda}=1\\[2mm]\dfrac{\lambda+1-\lambda+1}{2\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\end{cases}$$

26. Θέμα 1418

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά (d+1)cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. (Μονάδες 6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (Μονάδες 12)

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν που καλύπτει ένα πλακάκι τύπου Α είναι $E_A = d^2$ cm².

Το εμβαδόν που καλύπτει ένα πλακάκι τύπου Β είναι $E_B = (d+1)^2$ cm².

β) i) Αν το εμβαδόν της επιφάνειας είναι Ε, τότε ισχύει:

$$E = 200d^2 \text{ και } E = 128(d+1)^2$$

Πρέπει επομένως:

$$200d^2 = 128(d+1)^2 \overset{:8}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow 25d^2 = 16(d+1)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 25d^2 = 16(d^2+2d+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 25d^2 = 16d^2 + 32d + 16 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9d^2 - 32d - 16 = 0$$

Το τριώνυμο $9d^2 - 32d - 16$ έχει $\alpha = 9$, $\beta = -32$, $\gamma = -16$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-32)^2 - 4\cdot 9\cdot(-16) = 1024 + 576 = 1600$$

και ρίζες τις:

$$d_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-32)\pm\sqrt{1600}}{2\cdot 9} = \frac{32\pm 40}{18} = \begin{cases} \frac{32+40}{18} = 4 \\ \frac{32-40}{18} = -\frac{4}{9} \end{cases}$$

Η λύση $d = -\frac{4}{9}$ απορρίπτεται διότι δεν μπορεί το μήκος να είναι αρνητικό. Άρα $d = 4$ cm.

ii) $E = 200d^2 = 200 \cdot 4^2 = 200 \cdot 16 = 3.200\ cm^2$.

27. Θέμα 1431 Αρχέτυπο

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0 \qquad (1) \qquad \text{με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ.

(Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το πολυώνυμο: $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -4$, $\gamma = 2 - \lambda^2$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - \lambda^2) = 16 - 8 + 4\lambda^2 = 8 + 4\lambda^2$$

Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 8 + 4\lambda^2 > 0, \text{ το οποίο ισχύει για κάθε } \lambda \in R$$

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4}{1} = 4$$

ii) και

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2-\lambda^2}{1} = 2 - \lambda^2$$

γ) i) Έστω $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ και x_2 η ζητούμενη ρίζα. Τότε:

$$x_1 + x_2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} + x_2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 4 - 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

ii) Είναι:

$$x_1 \cdot x_2 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^2 - \sqrt{3}^3 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 - 3 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1)$$

28. Θέμα 1437 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού *A* της συνάρτησης *f*. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = |x| - 2$. (Μονάδες 9)

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x)+2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει:

$$|x| - 3 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \neq -3 \text{ και } x \neq 3)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = R - \{-3, 3\}$.

β) Θα παραγοντοποιήσουμε την παράσταση:

$$x^2 - 5|x| + 6 = |x|^2 - 5|x| + 6$$

Θέτουμε $|x| = y$ (1) και βρίσκουμε:

$$y^2 - 5y + 6$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Τότε:

$$y^2 - 5y + 6 = (y-2)(y-3) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5|x| + 6 = (|x| - 3)(|x| - 2)$$

Τελικά ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3} = \frac{(|x|-3)(|x|-2)}{|x|-3} = |x| - 2,\ x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

i) Η εξίσωση γράφεται:

$$(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|x| - 2 + 2)^2 - 4(|x| - 2) - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 8 - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0$$

Θέτουμε $|x| = z$ (2) και βρίσκουμε:

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

και ρίζες τις:

$$z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Τότε από την ισότητα (2) βρίσκουμε:

- $|x| = 3 \Leftrightarrow (x = -3 \;\text{ ή }\; x = 3)$, απορρίπτονται
- $|x| = 1 \Leftrightarrow (x = -1 \;\text{ ή }\; x = 1)$

29. Θέμα 1439

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών . (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda < 0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-(\lambda^2 + 1))^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda =$$
$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 =$$
$$= (\lambda^2 - 1)^2$$

Επειδή $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda \in R - \{0\}$ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \quad \text{και}$$
$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) i) Επειδή $S = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} < 0$, για $\lambda < 0$ και $P = 1 > 0$, οι ρίζες είναι αρνητικές.

ii) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2 \Leftrightarrow |S| \geq 2P \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{\lambda^2+1}{\lambda}\right| \geq 2 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{|\lambda^2+1|}{|\lambda|} \geq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\lambda^2 + 1| \geq 2|\lambda| \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq 2|\lambda| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\lambda|^2 - 2|\lambda| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (|\lambda| - 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda \in R - \{0\}$

30. Θέμα 1440

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, με $\lambda>0$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 10)

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 8)

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 3)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2 + 1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-(\lambda^2+1))^2 - 4\cdot\lambda\cdot\lambda =$$
$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 =$$
$$= (\lambda^2 - 1)^2$$

Επειδή $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$, για κάθε $\lambda > 0$ το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \quad \text{και}$$
$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

Επειδή $S = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} > 0$, για $\lambda > 0$ και $P = 1 > 0$, οι ρίζες είναι θετικές.

β) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E = x_1 \cdot x_2 = 1$.

ii) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2S = 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda}$

Είναι:

$$\Pi \geq 4 \Leftrightarrow 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda} \geq 4 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2(\lambda^2 + 1) \geq 4\lambda \overset{:2}{\Leftrightarrow} \lambda^2 + 1 \geq 2\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $\lambda > 0$.

iii) Έχουμε:

$$\Pi = 4 \Leftrightarrow 2\frac{\lambda^2+1}{\lambda} = 4 \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2(\lambda^2 + 1) = 4\lambda \overset{:2}{\Leftrightarrow} \lambda^2 + 1 = 2\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ το τριώνυμο γράφεται:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $x_1 = x_2 = 1$, οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

31. Θέμα 1448

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν α=2. (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x+\frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $\alpha x^2 - 5x + \alpha$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \alpha = 25 - 4\alpha^2$$

Η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 25 - 4\alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\alpha^2 \geq -25 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2} \leq \sqrt{\frac{25}{4}} \Leftrightarrow |\alpha| \leq \frac{5}{2}$$

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, τότε από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

Άρα οι ρίζες x_1, x_2 είναι αντίστροφοι αριθμοί.

β) Για α = 2 η εξίσωση γράφεται:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 2$ έχει α = 2, β = – 5, γ = 2 και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$$

και ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{5+3}{4} = 2 \\ \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

γ) Θέτουμε στη δοθείσα εξίσωση $x + \frac{1}{x} = y$ (1), οπότε γράφεται:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) λύθηκε στο σκέλος (ii) και προέκυψε ότι:

$$y = 2 \;\text{ ή }\; y = \frac{1}{2}$$

- Για $y = 2$ η ισότητα (1) δίνει:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

- Για $y = \frac{1}{2}$ η ισότητα (1) δίνει:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x + 2 = 0$$

Η εξίσωση αυτή έχει $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 1 - 16 = -15 < 0$, οπότε είναι αδύνατη.

32. Θέμα 1451

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5)$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = -(\lambda^2 + 5)$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-(\lambda^2 + 5)] = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 20 = 5\lambda^2 + 20$$

β) Έχουμε $5\lambda^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in R$ και $20 > 0$ οπότε $\Delta > 0$, για κάθε $\lambda \in R$ η εξίσωση

$$x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$$

έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in R$.

γ) $(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) = -4 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = -4 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 8 = 0$ (1)

Από τους τύπους Vieta έχουμε $x_1 + x_2 = S = \frac{-\beta}{\alpha} = \lambda$ και $x_1 x_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha} = -(\lambda^2 + 5)$

Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$-(\lambda^2 + 5) - 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 + 2\lambda - 3$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$ και διακρίνουσα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

33. Θέμα 1452 **Αρχέτυπο**

α) Να λύσετε την εξίσωση: x^2-3x-4=0 (1) (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί *α*, *β* για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο *α* είναι τετραπλάσιος του *β*. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x - 4$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = -4$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

β) i) Ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 3\frac{\alpha}{\beta} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 3\frac{\alpha}{\beta} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0,$$

το οποίο ισχύει από υπόθεση.

ii) Οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι $x_1 = 4$ ή $x_2 = -1$. Στο σκέλος (βi) αποδείξαμε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) άρα πρέπει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 4 \text{ ή } \frac{\alpha}{\beta} = -1$$

Επειδή οι α, β είναι ομόσημοι η περίπτωση $\frac{\alpha}{\beta} = -1$ απορρίπτεται. Άρα ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4\beta$$

δηλαδή, ο α είναι τετραπλάσιος του β.

34. Θέμα 1459

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = (2x+5)^2 - 8x \qquad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος; (Μονάδες 6)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος; (Μονάδες 6)

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5. (Μονάδες 6)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $x = -5$ και βρίσκουμε:

$$\lambda = (2(-5)+5)^2 - 8\cdot(-5) =$$
$$= (-10+5)^2 + 40 = (-5)^2 + 40 =$$
$$= 25 + 40 = 65$$

β) Αντικαθιστούμε στην δοθείσα ισότητα $\lambda = 20$ και βρίσκουμε:

$$20 = (2x+5)^2 - 8x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 20 = 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 5 = 0$$

Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + 5$ έχει $\alpha = 4$, $\beta = 12$, $\gamma = 5$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 12^2 - 4\cdot 4\cdot 5 = 144 - 80 = 64 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-12\pm\sqrt{64}}{2\cdot 4} = \frac{-12\pm 8}{8} = \begin{cases} \frac{-12+8}{8} = -\frac{1}{2} \\ \frac{-12-8}{8} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

γ) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$\lambda = (2x+5)^2 - 8x \Leftrightarrow \lambda = 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + (25-\lambda) = 0 \quad (2)$$

i) Έστω ότι ο εξαγόμενος αριθμός μπορεί να γίνει $\lambda = 5$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$4x^2 + 12x + (25-5) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 = 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) είναι αδύνατη διότι έχει διακρίνουσα $\Delta = -11 < 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο.

ii) Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + (25 - \lambda)$ έχει $\alpha = 4$, $\beta = 12$, $\gamma = 25 - \lambda$.

Πρέπει η εξίσωση (2) να έχει πραγματικές ρίζες. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$\Delta_0 \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (25 - \lambda) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 144 - 400 + 16\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16\lambda \geq 256 \Leftrightarrow \lambda \geq 16$$

35. Θέμα 1460 **Αρχέτυπο**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\beta}{1} = \beta$$

Είναι:

$$|x_1 + x_2| = 4 \Leftrightarrow |S| = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |\beta| = 4 \Leftrightarrow (\beta = -4 \text{ ή } \beta = 4)$$

β) Επειδή η δοθείσα εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες ισχύει ότι:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\beta|^2 > 4\gamma \Leftrightarrow 16 > 4\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma < 4$$

γ) • Για $\beta = 4$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 - 4|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0 \ (2)$$

Θέτουμε στην εξίσωση (2) $|x| = y$ (3) με $y>0$ και βρίσκουμε:

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \ \ (4)$$

Η εξίσωση (4) έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \text{δεκτές}$$

- Για $y = 3$ η σχέση (3) δίνει:

$$|x| = 3 \Leftrightarrow (x = 3 \ \text{ ή } \ x = -3)$$

- Για $y = 1$ η σχέση (3) δίνει:

$$|x| = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \ \text{ ή } \ x = -1)$$

• Για $\beta = -4$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 - (-4)|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + 4|x| + 3 = 0 \ (5)$$

Θέτουμε στην εξίσωση (5) $|x| = \omega$ (6) με $\omega>0$ και βρίσκουμε:

$$\omega^2 + 4\omega + 3 = 0 \ \ (7)$$

Η εξίσωση (7) έχει διακρίνουσα $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και ρίζες τις:

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{-4+2}{2} = -1 \\ \frac{-4-2}{2} = -3 \end{cases} \text{απορρίπτονται}$$

36. Θέμα 1461

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

γ) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - \lambda x + 1$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$, $\gamma = 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 4$$

Η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\lambda| > 2 \Leftrightarrow (\lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2)$$

β) Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) την επαληθεύει, ισχύει δηλαδή ότι:

$$\rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0 \ \ (2) \text{ προφανώς } \rho \neq 0$$

Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) αν και μόνο αν:

$$\frac{1}{\rho^2} - \lambda\frac{1}{\rho} + 1 = 0 \overset{\cdot\rho^2}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \lambda\rho + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0,$$

που ισχύει λόγω της (2).

γ) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda > 0 \quad \text{και}$$

$$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$$

Επειδή $S > 0$ και $P > 0$ οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) Ισχύει ότι:

$$P = x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{x_1} \quad (3)$$

Τότε:

$$x_1 + 4x_2 \geq 4 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} x_1 + 4\frac{1}{x_1} \geq 4 \overset{x_1>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + 4 \geq 4x_1 \Leftrightarrow x_1^2 - 4x_1 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

37. Θέμα 1463 Αρχέτυπο

Δίνεται η εξίσωση

$$\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$$

όπου *α, β* δύο **θετικοί** αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα *Δ* της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 - \beta^2)^2$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών *α, β,* ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των *α, β*. (Μονάδες 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4.$$ (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\Delta = [-(\alpha^2+\beta^2)]^2 - 4\cdot\alpha\beta\cdot\alpha\beta =$$
$$= \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - 4\alpha^2\beta^2 =$$
$$= \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = (\alpha^2-\beta^2)^2$$

β) Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (\alpha^2-\beta^2)^2 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha^2-\beta^2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha+\beta) \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta\neq 0 \;\text{ και }\; \alpha+\beta\neq 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha\neq\beta \;\text{ και }\; \alpha\neq-\beta)$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-[-(\alpha^2+\beta^2)]\pm\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)^2}}{2\alpha\beta} = \frac{\alpha^2+\beta^2\pm(\alpha^2-\beta^2)}{2\alpha\beta} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta} = \dfrac{2\alpha^2}{2\alpha\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta} \\[2ex] \dfrac{\alpha^2+\beta^2-\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta} = \dfrac{2\beta^2}{2\alpha\beta} = \dfrac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$

γ) Ισχύει ότι:

$$(1+x_1)(1+x_2) \geq 4 \Leftrightarrow \left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right) \geq 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta} \geq 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \geq 2 \overset{\alpha\beta>0}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta\frac{\beta}{\alpha} + \alpha\beta\frac{\alpha}{\beta} \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0,$$

το οποίο ισχύει για κάθε θετικούς αριθμούς α, β.

38. Θέμα 1469

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα *Δ* της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του *λ*, δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του *λ*. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του *λ* η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = 2\lambda - 1$, $\gamma = \lambda - 1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda - 1)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (\lambda - 1) =$$
$$= 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 1$$

Άρα η διακρίνουσα Δ είναι σταθερή.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(2\lambda-1) \pm \sqrt{1}}{2\lambda} = \frac{1-2\lambda \pm 1}{2\lambda} = \begin{cases} \frac{2-2\lambda}{2\lambda} = \frac{1-\lambda}{\lambda} \\ \frac{-2\lambda}{2\lambda} = -1 \end{cases}$$

γ) Η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι $|x_2 - x_1|$. Τότε:

$$|x_2 - x_1| = 2 \Leftrightarrow \left|-1 - \frac{1-\lambda}{\lambda}\right| = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{-\lambda-1+\lambda}{\lambda}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\lambda}\right| = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\lambda} = 2 \text{ ή } \frac{1}{\lambda} = -2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\lambda = \frac{1}{2} \text{ ή } \lambda = -\frac{1}{2}\right)$$

39. Θέμα 1475 Αρχέτυπο

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S= x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P= x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ και *1*. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$ έχει $\alpha = \lambda$, $\beta = -(\lambda^2+1)$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda^2+1)]^2 - 4\cdot\lambda\cdot\lambda =$$
$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 =$$
$$= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2-1)^2$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in R-\{0\}$ ισχύει $\Delta = (\lambda^2-1)^2 \geq 0$ το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \quad \text{και}$$
$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) Επειδή είναι $S=\frac{\lambda^2+1}{\lambda}>0$ για $\lambda>0$ και $P=1>0$ οι ρίζες είναι θετικές.

δ) Είναι:

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{S}{2}=\frac{\frac{\lambda^2+1}{\lambda}}{2}=\frac{\lambda^2+1}{2\lambda}$$

Τότε:

$$\frac{x_1+x_2}{2}-1=\frac{\lambda^2+1}{2\lambda}-1=\frac{\lambda^2+1-2\lambda}{2\lambda}=\frac{(\lambda-1)^2}{2\lambda}>0$$

διότι:

$$(\lambda-1)^2>0, \text{ για κάθε } \lambda\neq 1 \text{ και } \lambda>0 \text{ από υπόθεση}$$

Τελικά:

$$\frac{x_1+x_2}{2}-1>0\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2}{2}>1$$

40. Θέμα 1476

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2+\lambda x-36=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

(α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

(i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$2x^2-\lambda x-36=0$$

(Μονάδες 7)

(ii) Να δείξετε ότι:

- $\rho\neq 0$ και
- ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2+\lambda x+2=0$

(Μονάδες 4+6=10)

ΛΥΣΗ

i) Το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 36$ έχει $\alpha = 2$, $\beta = \lambda$, $\gamma = -36$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \lambda^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36) = \lambda^2 + 288$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in R$ ισχύει $\Delta = \lambda^2 + 288 > 0$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) ισχύει ότι:

$$2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0 \quad (2)$$

ii) α) Ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$ αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$2(-\rho)^2 - \lambda(-\rho) - 36 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0,$$

που ισχύει λόγω της σχέσης (2).

β) • Έστω ότι $\rho = 0$. Τότε:

$$(2) \Leftrightarrow 2 \cdot 0^2 + \lambda \cdot 0 - 36 = 0 \Leftrightarrow -36 = 0, \text{ άτοπο}$$

Άρα $\rho \neq 0$.

• Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$ αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$-36\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \lambda\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow -36\frac{1}{\rho^2} + \lambda\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -36 + \lambda\rho + 2\rho^2 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0$$

που ισχύει λόγω της σχέσης (2).

41. Θέμα 1477 Αρχέτυπο

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι: Αν $\gamma < 0$ τότε

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$ (Μονάδες 3)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Αν θέσουμε όπου $x^2 = u$ $με$ $u \geq 0$.

Η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $u^2 - 8u - 9 = 0$.

Έχουμε α=1, β= -8 και γ= -9 οπότε Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 65 + 36 = 100$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$u_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{8+\sqrt{100}}{2} = \frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9 \ \ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \\ \frac{8-\sqrt{100}}{2} = \frac{8-10}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \ \ \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota \end{array} \right\}$$

Όμως έχουμε $x^2 = u \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$

β) Για την εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, αν θέσουμε όπου $x^2 = u \;\; με \;\; u \geq 0$, η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$u^2 + \beta u + \gamma = 0 \; (1).$$

i. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$, με:

$$\beta^2 \geq 0 \; και$$

$$\gamma < 0 \quad άρα \quad -\gamma > 0.$$

Συνεπώς Δ>0 ως άθροισμα ενός μη αρνητικού και ενός θετικού αριθμού.

ii. Από τους τύπους Vieta το γινόμενο των ριζών της (1) είναι $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \gamma < 0$. Άρα οι ρίζες $u_{1,2}$ είναι ετερόσημες. Έστω $\begin{Bmatrix} u_1 < 0 \; απορρίπτεται \\ u_2 > 0 \;\; δεκτή \end{Bmatrix}$

Τότε έχουμε $x^2 = u_2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{u_2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{u_2}$

42. Θέμα 1478 Αρχέτυπο

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο Π = 34 cm και διαγώνιο δ=13 cm

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι E= 60 cm^2. (Μονάδες 5)

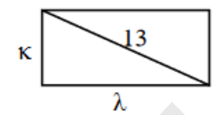
ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) i) Από τα δεδομένα της άσκησης βρίσκουμε ότι:



$$\Pi = 34 \Leftrightarrow 2\kappa + 2\lambda = 34 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa + \lambda = 17 \Leftrightarrow \kappa = 17 - \lambda \quad (1)$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε:

$$\kappa^2 + \lambda^2 = 13^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} (17-\lambda)^2 + \lambda^2 = 169 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 289 - 34\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 = 169 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2 - 34\lambda + 120 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 17\lambda + 60 = 0$$

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 = 289 - 240 = 49 > 0$$

και ρίζες τις:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{17+7}{2} = 12 \\ \frac{17-7}{2} = 5 \end{cases}$$

- Για $\lambda = 12$ από τη σχέση (1) βρίσκουμε $\kappa = 5$.
- Για $\lambda = 5$ από τη σχέση (1) βρίσκουμε $\kappa = 12$.

Σε κάθε περίπτωση το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$$E = \kappa \cdot \lambda = 5 \cdot 12 = 60 \text{ cm}^2$$

ii) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

με

$$S = \kappa + \lambda = 17 \quad \text{και} \quad P = \kappa \cdot \lambda = 60$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι η:

$$x^2 - 17x + 60 = 0$$

iii) Τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι 5 cm και 12 cm.

β) Έστω ότι υπάρχει ορθογώνιο με μήκη πλευρών α και β. Τότε πρέπει:

$$E_0 = 40 \Leftrightarrow \alpha\beta = 40 \quad (2)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 8^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 64 \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 80 = 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 = 144 \overset{\alpha,\beta>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 12$$

Μια δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες τα μήκη α και β είναι η:

$$x^2 - 12x + 40 = 0$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta_0 = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 144 - 160 = -16 < 0$

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη. Άρα δεν υπάρχει ορθογώνιο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm.

43. Θέμα 1485 Αρχέτυπο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)^2 - 4$ και $g(x) = |x-1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. (Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x΄x$. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x αν και μόνο αν:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 > 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-1| > 2 \Leftrightarrow (x-1 < -2 \text{ ή } x-1 > 2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 3)$$

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x αν και μόνο αν:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow |x-1| + 2 > 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \in R$ αφού $|x-1| \geq 0$ και $2 > 0$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = |x-1| + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-1|^2 - |x-1| - 6 = 0 \ (1)$$

Θέτουμε $|x-1| = y$ (2) οπότε η εξίσωση (1) γράφεται:

$$y^2 - y - 6 = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

και ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην ισότητα (2) και βρίσκουμε:

- $|x-1| = 3 \Leftrightarrow (x-1=-3 \text{ ή } x-1=3) \Leftrightarrow (x=-2 \text{ ή } x=4)$
- $|x-1| = -2$, αδύνατη.

Αντικαθιστούμε $x=-2$ στον τύπο της συνάρτησης g και βρίσκουμε:

$$g(-2) = |-2-1| + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(-2) = |-3| + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(-2) = 5$$

Αντικαθιστούμε $x=4$ στον τύπο της συνάρτησης g και βρίσκουμε:

$$g(4) = |4-1| + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(4) = |3| + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g(4) = 5$$

Τελικά τα σημεία τομής έχουν συντεταγμένες:

$$A(-2, 5) \text{ και } B(4, 5)$$

44. Θέμα 1491

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0.$$ (Μονάδες9)

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 5\lambda x - 1$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -5\lambda$, $\gamma = -1$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 25\lambda^2 + 4$$

Επειδή για κάθε $\lambda \in R$ ισχύει $\Delta = 25\lambda^2 + 4 > 0$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-5\lambda}{1} = 5\lambda \quad \text{και}$$

$$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1$$

i) Τότε:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1x_2)^{24} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5\lambda)^2 - 18 - 7(-1)^{24} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2 - 18 - 7 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1)$$

ii) Για $\lambda = 1$ είναι:

$$S = x_1 + x_2 = 5 \quad \text{και} \quad P = x_1x_2 = -1$$

Τότε:

$$x_1^2x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1x_2^2 =$$

$$= x_1x_2(x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2) + 4 =$$

$$= -1 \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 = -16$$

45. Θέμα 1500

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S= x_1+x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P= x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 2)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 - 6|x| + \lambda = 7 \qquad (1)$$

έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 8)

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 6x + \lambda - 7$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = \lambda - 7$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 7) = 36 - 4\lambda + 28 = 64 - 4\lambda$$

Το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 64 - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\lambda \geq -64 \Leftrightarrow \lambda \leq 16$$

β) i) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-6}{1} = 6 \quad \text{και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 7}{1} = \lambda - 7$$

ii) Το τριώνυμο έχει δύο άνισες και ομόσημες ρίζες αν και μόνο αν:

$$(\Delta > 0 \text{ και } P > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (64 - 4\lambda > 0 \text{ και } \lambda - 7 > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-4\lambda > -64 \text{ και } \lambda > 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda < 16 \text{ και } \lambda > 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 < \lambda < 16$$

Επειδή $S = 6 > 0$, οι ρίζες είναι θετικές.

γ) i) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 - 6|x| + \lambda = 7 \Leftrightarrow |x|^2 - 6|x| + \lambda - 7 = 0 \quad (2)$$

Θέτουμε στη (2) $|x| = y$ και έχουμε:

$$y^2 - 6y + \lambda - 7 = 0 \quad (3)$$

Επομένως για να έχει η εξίσωση (2) τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες αρκεί η εξίσωση (3) να έχει δύο θετικές άνισες μεταξύ τους πραγματικές ρίζες. Από το σκέλος (iiβ) προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν:

$$7 < \lambda < 16$$

ii) Ισχύει ότι:

$$7 < 3\sqrt{10} < 16 \Leftrightarrow \sqrt{49} < \sqrt{90} < \sqrt{256}, \text{ το οποίο ισχύει}$$

Τελικά για $\lambda = 3\sqrt{10}$ η εξίσωση (2) οπότε και η (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

46. Θέμα 1508

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$. (Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον:

$$|x_1 - 2| = |x_2 + 2|, \text{ τότε:}$$

i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$. (Μονάδες 7)

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $x^2 - 2x + \lambda$ έχει $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = \lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda = 4 - 4\lambda$$

Η δοθείσα εξίσωση έχει δύο ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\lambda > -4 \Leftrightarrow \lambda < 1$$

το οποίο ισχύει από υπόθεση.

β) Από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2}{1} = 2 \quad (1)$$

γ) i) Ισοδύναμα και διαδοχικά βρίσκουμε:

$$|x_1 - 2| = |x_2 + 2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2 = x_2 + 2 \text{ ή } x_1 - 2 = -(x_2 + 2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2 = 2 + 2 \text{ ή } x_1 - 2 = -x_2 - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2 = 4 \text{ ή } x_1 + x_2 = 0, \text{ απορρίπτεται λόγω του } (\beta)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 4 \quad (2)$$

ii) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ισότητες (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$x_1 + x_2 + x_1 - x_2 = 2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 3$$

Αντικαθιστούμε στην ισότητα (1) και βρίσκουμε:

$$3 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = -1$$

Επίσης, από τους τύπους Vieta βρίσκουμε:

$$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (-1) = \frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \lambda = -3$$

47. Θέμα 1509

Δίνονται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $p_1 = \alpha$ και $p_2 = -\frac{1}{\alpha}$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|p_1 - p_2| = 2$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha$ είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-(\alpha^2 - 1))^2 - 4 \cdot \alpha \cdot (-\alpha) =$$

$$= \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 =$$

$$= \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2$$

β) Είναι $\Delta > 0$ οπότε η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\left(-(\alpha^2-1)\right) \pm \sqrt{(\alpha^2+1)^2}}{2 \cdot \alpha} = \frac{\alpha^2 - 1 \pm (\alpha^2+1)}{2\alpha} = \begin{cases} \frac{\alpha^2-1+\alpha^2+1}{2\alpha} = \alpha \\ \frac{\alpha^2-1-\alpha^2-1}{2\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

γ) Είναι:

$$|\rho_1 - \rho_2| = 2 \Leftrightarrow \left|\alpha - \left(-\tfrac{1}{\alpha}\right)\right| = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\alpha + \tfrac{1}{\alpha} = -2 \ \text{ή} \ \alpha + \tfrac{1}{\alpha} = 2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha^2 + 1 = -2\alpha \ \text{ή} \ \alpha^2 + 1 = 2\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \ \text{ή} \ \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((\alpha + 1)^2 = 0 \ \text{ή} \ (\alpha - 1)^2 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + 1 = 0 \ \text{ή} \ \alpha - 1 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha = -1 \ \text{ή} \ \alpha = 1)$$

48. Θέμα 1516 Αρχέτυπο

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \qquad (1)$$

και

$$8x^2 - 14x + 3 = 0 \qquad (2)$$

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \qquad \text{και} \qquad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4),$$

με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i) $\rho \neq 0$ και (Μονάδες 5)

ii) ο $\dfrac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4). (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $3x^2 - 14x + 8$ έχει $\alpha = 3$, $\beta = -14$, $\gamma = 8$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 196 - 96 = 100 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{14 \pm 10}{6} = \begin{cases} \frac{14+10}{6} = 4 \\ \frac{14-10}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Το τριώνυμο $8x^2 - 14x + 3$ έχει $\alpha = 8$, $\beta = -14$, $\gamma = 3$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3 = 196 - 96 = 100 > 0$$

Άρα η εξίσωση (2) έχει ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 8} = \frac{14 \pm 10}{16} = \begin{cases} \frac{14+10}{16} = \frac{3}{2} \\ \frac{14-10}{16} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

β) Ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή αν και μόνο

αν ισχύει:

$$\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0 \quad (5)$$

i) Έστω ότι $\rho = 0$, τότε:

$$(5) \Leftrightarrow \alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$$

άτοπο, αφού $\alpha\gamma \neq 0$. Άρα $\rho \neq 0$.

ii) Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4) αν και μόνο αν:

$$\gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta\frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \gamma\frac{1}{\rho^2} + \beta\frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \overset{\rho \neq 0}{\Longleftrightarrow} \gamma + \beta\rho + \alpha\rho^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$$

που ισχύει λόγω της ισότητας (5).

49. Θέμα 12683 **Αρχέτυπο**

Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο $16m^3$, να βρείτε τις διαστάσεις της.

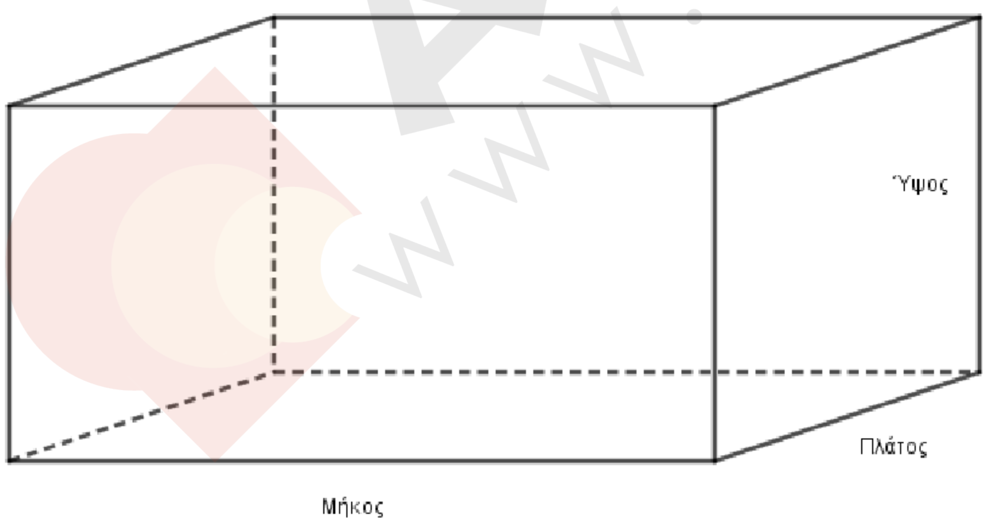
(Μονάδες 8)

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει $16m^3$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει $10m^3$ πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α)Γνωρίζουμε ότι ο όγκος της δεξαμενής ισούται με το γινόμενο των τριών διαστάσεων της. Επειδή η δεξαμενή έχει βάση τετράγωνη θέτουμε x το μήκος και το πλάτος της οπότε το ύψος της θα είναι $\frac{x}{4}$. Άρα ο όγκος της δεξαμενής V θα είναι:

$$V = x \cdot x \cdot \frac{x}{4} = \frac{x^3}{4}$$

Αφού η δεξαμενή έχει όγκο $V = 16m^3$ θα έχουμε:

$$V = 16 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3}{4} = 16 \Leftrightarrow$$

$$x^3 = 64 \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{4^3} \Leftrightarrow$$

$$x = 4m.$$

Οπότε η δεξαμενή έχει μήκος και πλάτος ίσα με 4m και ύψος ίσο με 1 m.

β) Έστω x, $(x > 0)$ το μήκος της δεξαμενής. Τότε το πλάτος της θα είναι x-2 και ο όγκος της δεξαμενής θα ισούται με $V = 2x(x-2)$.

Οπότε έχουμε :

$$V = 16 \Leftrightarrow$$

$$2x(x-2) = 16 \Leftrightarrow$$

$$x(x-2) = 8$$

$$x^2 - 2x = 8 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\cdot\alpha\cdot\gamma = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-8) = 4 + 32 = 36 > 0.$

Τότε:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\cdot\alpha} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \begin{cases} \frac{2-6}{2} \\ \frac{2+6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \begin{cases} -2 \;\; \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota, \gamma\iota\alpha\tau\iota \; \pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota \; x > 0 \\ 4, \;\; \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta} \end{cases}$$

Άρα το μήκος της δεξαμενής είναι 4 m και το πλάτος 2m.

γ) Αφού η νέα δεξαμενή περιέχει $10m^3$ πετρέλαιο και η βάση της έχει, μήκος 4m και πλάτος 2 m, αν x είναι το ύψος του υγρού μέσα στη δεξαμενή ο όγκος του υγρού θα είναι:

$$V_{\pi\varepsilon\tau\rho.} = 10 \Leftrightarrow$$

$$4\cdot 2\cdot x = 10 \Leftrightarrow$$

$$8\cdot x = 10 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{10}{8} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{5}{4} m.$$

Άρα το ύψος του υγρού στη δεξαμενή είναι $\frac{5}{4} m$.

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

50. Θέμα 12912 Αρχέτυπο

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε: $x^2 = y$, $(y \geq 0)$ οπότε η δοσμένη εξίσωση γίνεται:

$$y^2 - 7y + 12 = 0.$$

Το τριώνυμο $y^2 - 7y + 12$ έχει $\alpha = 1, \beta = -7, \gamma = 12$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1 > 0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{7+1}{2} = 4 \text{ δεκτή} \\ \frac{7-1}{2} = 3 \text{ δεκτή} \end{cases}$$

- Για $y = 4$ έχουμε : $x^2 = 4$, δηλαδή $x = 2$ ή $x = -2$.
- Για $y = 3$ έχουμε : $x^2 = 3$, δηλαδή $x = \sqrt{3}$ ή $x = -\sqrt{3}$

β) Θέτουμε: $x^2 = y$, $(y \geq 0)$ οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$y^2 + \beta y + \gamma = 0 . \quad (2)$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης (2) είναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \text{, από υπόθεση.}$$

Επομένως η εξίσωση (2) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις οποίες συμβολίζουμε y_1 και y_2.

Από τους τύπους για το άθροισμα και γινόμενο των ριζών βρίσκουμε:

- $S = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{\beta}{1} = -\beta > 0$, άρα οι ρίζες y_1, y_2 έχουν άθροισμα θετικό.
- $P = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\gamma}{1} = \gamma > 0$, άρα οι ρίζες y_1, y_2 είναι ομόσημες.

Εφόσον οι ρίζες είναι ομόσημες και έχουν άθροισμα θετικό, θα είναι και οι δύο θετικές.

Οπότε: $\begin{cases} x^2 = y_1 \Leftrightarrow \\ x = \sqrt{y_1} \text{ ή } x = -\sqrt{y_1} \end{cases}$ ή $\begin{cases} x^2 = y_2 \Leftrightarrow \\ x = \sqrt{y_2} \text{ ή } x = -\sqrt{y_2} \end{cases}$

Τελικά η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

51. Θέμα 13320 Αρχέτυπο

Θεωρούμε τις εξισώσεις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (I) και $\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ (II) όπου α, β, γ είναι μη μηδενικοί ακέραιοι, με $\alpha \neq \gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν το ίδιο πλήθος ριζών.

(Μονάδες 8)

β) Αν ο αριθμός $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της (I) να δείξετε ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (II) .

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι καμία από τις εξισώσεις (I), (II) δεν μπορεί να έχει ως ρίζα τον αριθμό $\sqrt{2}$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Ας είναι Δ_1, Δ_2 οι διακρίνουσες των εξισώσεων (I) και (II) αντίστοιχα. Τότε $\Delta_1=\beta^2-4\alpha\gamma$ και $\Delta_2=\beta^2-4\gamma\alpha$. Ώστε $\Delta_1=\Delta_2$, που σημαίνει ότι οι εξισώσεις (I) και (II) ή θα έχουν δύο διαφορετικές λύσεις η κάθε μία αν $\Delta_1=\Delta_2>0$, ή και οι δύο θα είναι αδύνατες στο R αν $\Delta_1=\Delta_2<0$ ή θα έχουν από μία διπλή ρίζα η κάθε μία, αν $\Delta_1=\Delta_2=0$.

β) Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της (I) θα ισχύει η σχέση $\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0$ (1).

Για να είναι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (II) πρέπει και αρκεί να ισχύει

$\gamma(\frac{1}{\rho})^2+\beta\frac{1}{\rho}+\alpha=0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\rho^2}+\frac{\beta}{\rho}+\alpha=0 \Leftrightarrow \gamma+\beta\rho+\alpha\rho^2=0$ που ισχύει από την (1).

γ) Υποθέτουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (I). Τότε θα ισχύει

$\alpha(\sqrt{2})^2+\beta\sqrt{2}+\gamma=0 \Leftrightarrow 2\alpha+\gamma+\beta\sqrt{2}=0$. Ώστε $\sqrt{2}=-\frac{2\alpha+\gamma}{\beta}$, αφού είναι $\beta \neq 0$.

Άρα ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι πηλίκο ακεραίων, επομένως ρητός, άτοπο.

Ανάλογα, αποδεικνύουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρίζα ούτε της εξίσωσης (II).

52. Θέμα 14406 **Αρχέτυπο**

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β, έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta\cdot(\alpha^2+1)=\alpha\cdot(\beta^2+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta+\beta=\alpha\cdot\beta^2+\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta+\beta-\alpha\cdot\beta^2-\alpha=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta\cdot(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta-1)=0 \overset{\alpha\neq\beta}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\cdot\beta-1=0 \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta=1.$$

Άρα οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

β) Η παράσταση γράφεται:

$$K=\frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}=\frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{-2}\cdot\alpha^{25}\cdot\beta^{25}}=\frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{23}\cdot\beta^{25}}=\frac{\alpha^{22}}{\alpha^{23}}\cdot\frac{\beta^{24}}{\beta^{25}}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=1.$$

γ) Γνωρίζουμε πως $\alpha+\beta=\frac{5}{2}$ και $\alpha\cdot\beta=1$ με $\alpha,\beta>0$. Σύμφωνα με τους τύπους Vieta:

$$s=\alpha+\beta \text{ και } p=\alpha\cdot\beta,\ x^2-sx+p=0$$

προκύπτει ότι οι αριθμοί α, β είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$x^2-\frac{5}{2}x+1=0 \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = (-5)^2 - 16 = 9$ και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x_1 = 2 \text{ ή } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι α=2 και $\beta = \frac{1}{2}$ ή αντίστροφα.

δ) Από το προηγούμενο ερώτημα θεωρούμε α=2 και $\beta = \frac{1}{2}$. Για να είναι το σχήμα τετράγωνο πρέπει τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να γίνουν ίσα. Έστω ω ο αριθμός που θα προσθέσουμε στον μικρότερο που είναι ο β για να γίνει ίσο με το α, τότε :

$$\alpha = \beta + \omega \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2} + \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{3}{2}.$$

Άρα πρέπει να προστεθεί στο β ο αριθμός $\frac{3}{2}$.

53. Θέμα 14490

Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω.

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in R$.

Να βρείτε:

i. Το σύνολο Α που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 10)

ii. Την πραγματική τιμή του λ, αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

(Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης.

(Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α) Οι ενδείξεις ενός ζαριού είναι οι ακέραιες τιμές από το 1 ως το 6.

Άρα $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

β) i. Η εξίσωση $x^2-2x+\lambda-2=0$ ως δευτεροβάθμια δεν έχει πραγματικές ρίζες όταν

Δ<0.

Επομένως,

$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(\lambda-2)=4-4\cdot\lambda+8=12-4\cdot\lambda.$

Άρα $12-4\cdot\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>3.$

Δηλαδή $\lambda\in(3,+\infty)$, επιπλέον $\lambda\in\Omega$, δηλαδή $\lambda\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

Προκύπτει λ=4 ή 5 ή 6.

Άρα το ζητούμενο σύνολο $A=\{4,5,6\}$.

ii. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $x_1\cdot x_2=1$.

Σύμφωνα με τους τύπους Vieta $x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\lambda-2$.

Άρα $\lambda-2=1\Leftrightarrow\lambda=3$.

γ) Για $\lambda=3$ η εξίσωση γίνεται $x^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$ διπλή ρίζα.

Άρα η ρίζα της εξίσωσης είναι η x=1 διπλή.

54. Θέμα 14543 **Αρχέτυπο**

Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός α γράφεται στη μορφή $a=2k+1$, k ακέραιος.

α) Να γράψετε τους αριθμούς 3,5,7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

(Μονάδες 6)

β) i) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.

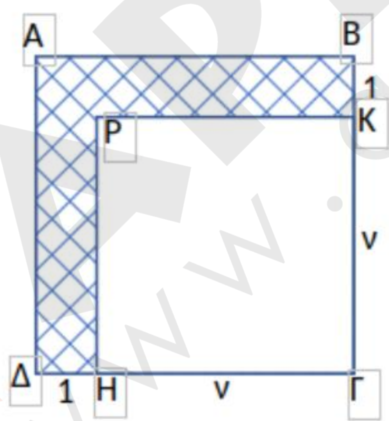
(Μονάδες 6)

ii) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

(Μονάδες 6)

γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ είναι τετράγωνα με (ΓΗ)=(ΓΚ)=ν και (ΒΚ)=(ΔΗ)=1. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου ν.

(Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Έχουμε διαδοχικά: $3=4-1=2^2-1^2$, $5=3^2-2^2$ και σκεπτόμενοι ότι

$7=M^2-N^2=(M-N)(M+N)$, ένα γινόμενο ακεραίων που δίνει 7 είναι οι 1, 7.

Αν M>N τότε M-N=1, M+N=7 και λύνοντας το σύστημα έχουμε με αντικατάσταση:

M=N+1 και N+1 +N = 7 , άρα 2N = 6, δηλαδή N = 3 και M= 4 .

Οπότε $7=(4)^2-(3)^2$.

β) i) Έστω οι διαδοχικοί ακέραιοι $k, k+1, k\in\mathbb{Z}$.

Η διαφορά των τετραγώνων τους είναι $(k+1)^2-k^2=k^2+2k+1-k^2=2k+1, k\in\mathbb{Z}$.

Ο οποίος είναι περιττός αριθμός.

ii) Έχουμε ότι $2021=2\cdot 1010+1$.

Από την απόδειξη στο προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$2021=(1010+1)^2-(1010)^2=1011^2-1010^2$.

γ) Η γραμμοσκιασμένη περιοχή έχει εμβαδόν όσο η διαφορά των εμβαδών των τετραγώνων ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ.

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ν+1, ενώ το ΓΗΡΚ έχει πλευρά ν.

Ισχύει $(\nu+1)^2-\nu^2=45$, οπότε $2\nu+1=45 \Leftrightarrow 2\nu=44 \Leftrightarrow \nu=22$.

55. Θέμα 14651 **Αρχέτυπο**

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4(\lambda + \frac{1}{\lambda})x + 16 = 0 \text{ όπου } \lambda > 0 .$$

α) Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Από τους τύπους για το άθροισμα και γινόμενο των ριζών εξίσωσης 2ου βαθμού έχουμε :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4(\lambda + \frac{1}{\lambda})}{1} = 4(\lambda + \frac{1}{\lambda}) \text{ και}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{16}{1} = 16$$

Αφού $P = x_1 \cdot x_2 = 16 > 0$ και $S = x_1 + x_2 = 4(\lambda + \frac{1}{\lambda}) > 0$ για κάθε $\lambda > 0$, οι ρίζες x_1, x_2 είναι θετικές και άρα μπορούν να αποτελούν πλευρές ορθογωνίου.

i. Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2\cdot 4(\lambda + \frac{1}{\lambda}) = 8(\lambda + \frac{1}{\lambda})$$

ii. Το εμβαδόν είναι: $\mathrm{E} = x_1 \cdot x_2 = 16$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\Pi \geq 16 \Leftrightarrow$$
$$8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \geq 16 \Leftrightarrow$$
$$\lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2 \Leftrightarrow$$
$$\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\lambda} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda} \geq 0$, που ισχύει για κάθε $\lambda > 0$.

γ) Ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$\Pi = 16 \Leftrightarrow$$
$$\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ η περίμετρος είναι 16 (δηλαδή $2(x_1 + x_2) = 16$ και τελικά $x_1 + x_2 = 8$) και το εμβαδόν είναι 16 (δηλαδή $x_1 \cdot x_2 = 16$), οπότε $x_1 = x_2 = 4$. Επομένως το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

56. Θέμα 14759 Αρχέτυπο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6\alpha x + 6\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$.

(Μονάδες 6)

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γi), να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}.$$

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq \alpha^2 - 36 \Leftrightarrow$$
$$3\alpha^2 + 6\alpha^2 + 6\beta + 3\beta^2 + 6\alpha\beta + 6\beta \geq \beta^2 - 36 \Leftrightarrow$$
$$9\alpha^2 + 2\beta^2 + 6\alpha\beta + 12\beta + 36 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(9\alpha^2 + \beta^2 + 6\alpha\beta) + (\beta^2 + 12\beta + 36) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(3\alpha + \beta)^2 + (\beta + 6)^2 \geq 0,$$

που ισχύει σαν άθροισμα τετραγώνων.

β) Βάσει του ερωτήματος α), έχουμε:

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36 \Leftrightarrow (3\alpha + \beta)^2 + (\beta + 6)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν : $3\alpha + \beta = 0$ και $\beta + 6 = 0$.

Άρα $\beta = -6$ και $\alpha = 2$.

γ) Για $\alpha = 2$ και $\beta = -6$

i. Λύνουμε την εξίσωση:

$$f(x) = 6x \Leftrightarrow 3x^2 + 12x - 36 = 6x \Leftrightarrow 3x^2 + 12x - 36 - 6x = 0 \Leftrightarrow$$
$$3x^2 + 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 12 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 + 2x - 12$ είναι: $\Delta = 4 + 48 = 52 = 4 \cdot 13$

και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow$$
$$x_1 = -1 + \sqrt{13} \text{ και } x_2 = -1 - \sqrt{13}.$$

ii. Ισχύει ότι:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6},$$

αφού $x_1 + x_2 = -2$ και $x_1 \cdot x_2 = -12$.

Εναλλακτικά:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{-1 + \sqrt{13}} + \frac{1}{-1 - \sqrt{13}} =$$
$$\frac{-1 - \sqrt{13} - 1 + \sqrt{13}}{(-1 - \sqrt{13}) \cdot (-1 + \sqrt{13})} =$$
$$\frac{-2}{1 - 13} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6}$$