Κεφ. 3.2. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 3 - Κωδικός: 14052

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. Θέμα 14052 Αρχέτυπο

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 1 = 0$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x| + x = 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x| + |x^2 - 1| + x = 0$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

β) Ισχύει ότι $|x| \geq -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει για $x \leq 0$. Άρα,

$$|x| + x = 0 \Leftrightarrow |x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0.$$

γ) Δεδομένου ότι $|x^2 - 1| \geq 0$ και $|x| \geq -x \Leftrightarrow |x| + x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}
&|x| + |x^2 - 1| + x = 0 \Leftrightarrow \\
&|x^2 - 1| + (|x| + x) = 0 \Leftrightarrow \\
&\{|x^2 - 1| = 0 \text{ και } |x| + x = 0\} \overset{\alpha),\beta)}{\Leftrightarrow} \\
&\{x = \pm 1 \text{ και } x \leq 0\}.
\end{aligned}$$

Άρα $x = -1$.

Θέμα 4 - Κωδικός: 14820

2. Θέμα 14820 Αρχέτυπο

α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A.

(Μονάδες 5)

ii. Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Ισοδύναμα έχουμε

i. $x^2+x+1\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow x^2+x+1-\frac{3}{4}\geq 0\Leftrightarrow x^2+x+\frac{1}{4}\geq 0\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$, που ισχύει.

Ως ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

ii. $x^2-x+1\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow x^2-x+1-\frac{3}{4}\geq 0\Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}\geq 0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$, που ισχύει.

Ως ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

β) Για $x\neq\frac{1}{2}$ και $x\neq-\frac{1}{2}$, όπως δείξαμε στο α) ερώτημα, είναι $x^2+x+1>\frac{3}{4}$ και $x^2-x+1>\frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε $(x^2+x+1)(x^2-x+1)>\frac{9}{16}$.

Επίσης, για $x=\frac{1}{2}$ είναι $x^2+x+1>\frac{3}{4}$ και $x^2-x+1=\frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε $(x^2+x+1)(x^2-x+1)>\frac{9}{16}$.

Τέλος, για $x=-\frac{1}{2}$ είναι $x^2+x+1=\frac{3}{4}$ και $x^2-x+1>\frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε $(x^2+x+1)(x^2-x+1)>\frac{9}{16}$.

Επομένως $(x^2+x+1)(x^2-x+1)>\frac{9}{16}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ)

i. Η παράσταση A ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

ii. Είναι

$$\mathrm{A} = \frac{\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)} = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1,-1\}$.

Όπως δείξαμε στο β) είναι $(x^2+x+1)(x^2-x+1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $\mathrm{A} > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1,-1\}$ και επομένως η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

Εναλλακτικά, θα εξετάσουμε αν η εξίσωση $\frac{\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)}{x^2-1} = \frac{9}{16}$ έχει λύση στο $\mathbb{R} - \{1,-1\}$. Είναι ισοδύναμα

$$\frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^2-1}=\frac{9}{16}\Leftrightarrow$$
$$\frac{x^6-1}{x^2-1}=\frac{9}{16}\Leftrightarrow$$
$$\frac{(x^2)^3-1}{x^2-1}=\frac{9}{16}\Leftrightarrow$$
$$\frac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x^2-1}=\frac{9}{16}\Leftrightarrow$$
$$16(x^4+x^2+1)=9\Leftrightarrow$$
$$16x^4+16x^2+16-9=0\Leftrightarrow$$
$$16x^4+16x^2+7=0$$

και επειδή $16x^4+16x^2+7\geq 7>0$, η εξίσωση είναι αδύνατη και επομένως η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.