Κεφ. 3.1. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 2 - Κωδικοί:

1327, 1351, 1369, 12857, 12917, 13169, 14224, 14649

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. Θέμα 1327

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha = 1$ (Μονάδες 5)

ii) όταν $\alpha = -3$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) **i)** Για α = 1 η εξίσωση γράφεται:

$$(1+3)x = 1^2 - 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -2$$

ii) Για α = – 3 η εξίσωση γράφεται:

$$(-3+3)x = (-3)^2 - 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0x = 0, \text{ ταυτότητα}$$

β) Η εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\alpha + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -3$$

Η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η:

$$(\alpha+3)x = \alpha^2 - 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha+3)x = (\alpha+3)(\alpha-3) \overset{\alpha\neq-3}{\Longleftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(\alpha+3)x}{\alpha+3} = \frac{(\alpha+3)(\alpha-3)}{\alpha+3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \alpha - 3$$

2. Θέμα 1351

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda-1)x = (\lambda-1)(\lambda+1) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\lambda x = x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda x - x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

β) Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$$

Η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \overset{\lambda \neq 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\lambda-1)x}{\lambda-1} = \frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \lambda + 1$$

γ) Η εξίσωση είναι ταυτότητα αν και μόνο αν:

$$(\lambda - 1 = 0 \ \text{ και } \ (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 1 \ \text{ και } \ \lambda - 1 = 0 \ \text{ ή } \ \lambda + 1 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda = 1 \ \text{ και } \ \lambda = 1 \ \text{ ή } \ \lambda = -1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1$$

3. Θέμα 1369 Αρχέτυπο

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-9)x=\lambda^2-3\lambda$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρείς διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρείς εξισώσεις.

(Μονάδες 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) • Για $\lambda = -1$, η εξίσωση γράφεται:

$$((-1)^2-9)x=(-1)^2-3(-1)\Leftrightarrow -8x=4$$

• Για $\lambda = 0$, η εξίσωση γράφεται:

$$(0^2-9)x=0^2-3\cdot 0\Leftrightarrow -9x=0$$

• Για $\lambda = 1$, η εξίσωση γράφεται:

$$(1^2-9)x=1^2-3\cdot 1\Leftrightarrow -8x=-2$$

β) Η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν:

$$\lambda^2-9\neq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\lambda-3)(\lambda+3)\neq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\lambda-3\neq 0\ \text{ και }\ \lambda+3\neq 0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\lambda\neq 3\ \text{ και }\ \lambda\neq -3)$$

γ) Για $x = 4$ η εξίσωση (1) γράφεται:

$$(\lambda^2 - 9)\cdot 4 = \lambda^2 - 3\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(\lambda - 3)(\lambda + 3) = \lambda(\lambda - 3) \overset{\lambda \neq 3}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(\lambda-3)(\lambda+3)}{\lambda-3} = \frac{\lambda(\lambda-3)}{\lambda-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(\lambda + 3) = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda + 12 = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda = -12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -4$$

4. Θέμα 12857

Δίνεται η εξίσωση (λ-1)x -2λ +2=0.

α) i. Να λύσετε την εξίσωση για λ=-2.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το x=1 είναι ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) i) Για λ=-2 η εξίσωση γίνεται $-3x + 6 = 0 \Leftrightarrow -3x = -6 \Leftrightarrow x = 2$.

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι x=2.

ii) Για x=1 η εξίσωση γίνεται

$$(\lambda - 1)1 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow -\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

β) Για να έχουμε ταυτότητα η εξίσωση θα είναι της μορφής 0x=0 , δηλαδή λ-1=0 και 2λ-2=0, επομένως η δύο εξισώσεις συναληθεύουν για λ=1.

5. Θέμα 12917

Δίνεται η εξίσωση $(|\alpha-1|-3)x=\alpha+2$ (1), με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $\alpha=0$ και $\alpha=5$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει $|\alpha-1|=3$.

(Μονάδες 8)

ii. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα β)i.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Για $\alpha=0$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|0-1|-3)\cdot x=0+2 \Leftrightarrow (1-3)\cdot x=2 \Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1.$$

Για $\alpha=5$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|5-1|-3)\cdot x=5+2 \Leftrightarrow (4-3)\cdot x=7 \Leftrightarrow x=7.$$

β)

i. Είναι $|\alpha-1|=3 \Leftrightarrow \{\alpha-1=3 \text{ ή } \alpha-1=-3\} \Leftrightarrow \{\alpha=4 \text{ ή } \alpha=-2\}$.

ii. Για $\alpha=4$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|4-1|-3)\cdot x=4+2 \Leftrightarrow 0\cdot x=6,$$

που είναι αδύνατη.

Για $\alpha=-2$ η εξίσωση γίνεται:

$$(|-2-1|-3)\cdot x=-2+2 \Leftrightarrow 0\cdot x=0,$$

που είναι ταυτότητα.

6. Θέμα 13169

Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| - |x - 5| = 2$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Αφού $3 \leq x \leq 5$, θα έχουμε $x - 5 \leq 5 - 5$, άρα $x - 5 \leq 0$. Ακόμα $3 \leq x$, οπότε $3 - 2 \leq x - 2$, άρα $1 \leq x - 2$. Ώστε $x - 2 > 0$.

β) Γνωρίζουμε ότι αν $y \geq 0$, τότε $|y| = y$ ενώ αν $y \leq 0$, τότε $|y| = -y$. Έτσι η δοθείσα εξίσωση γράφεται $x - 2 - (5 - x) = 2$, άρα $x - 2 - 5 + x = 2$, οπότε $2x = 9$. Τελικά $x = \frac{9}{2}$, λύση η οποία είναι δεκτή, αφού $\frac{9}{2} = 4{,}5 \in [3{,}5]$.

7. Θέμα 14224 Αρχέτυπο

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $\mathrm{A} = \dfrac{x+1}{x}$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

(Μονάδες 8)

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $A = \dfrac{x^2-1}{x^2-x} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \dfrac{x+1}{x}$.

β)

i. Πρέπει να βρούμε την τιμή του x για την οποία

$A = 0$, δηλαδή

$\dfrac{x+1}{x} = 0$, που συμβαίνει όταν

$x+1=0$, δηλαδή όταν

$x=-1$.

ii. Για να πάρει η παράσταση A την τιμή 2, πρέπει να ισχύουν ισοδύναμα:

$$\frac{x+1}{x} = 2 \Leftrightarrow$$

$$x+1 = 2x \Leftrightarrow$$

$x = 1$, που δεν είναι αποδεκτή τιμή για το x.

Άρα η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή 2.

8. Θέμα 14649

Δίνεται η παράσταση $K = |x+1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x+3, & αν\ x \geq -1 \\ 1-x, & αν\ x < -1 \end{cases}$.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να λυθεί η εξίσωση $|x-2| = 4$.

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Για $x \geq -1$ είναι $x+1 \geq 0$, οπότε $|x+1|+2 = x+1+2 = x+3$.

Για $x < -1$ είναι $x+1 < 0$, οπότε $|x+1|+2 = -(x+1)+2 = -x-1+2 = 1-x$.

Άρα, τελικά $K = \begin{cases} x+3, & \alpha\nu\ x \geq -1 \\ 1-x, & \alpha\nu\ x < -1 \end{cases}$.

β)

i. Είναι $|x-2| = 4 \Leftrightarrow \{x-2=4 \text{ ή } x-2=-4\} \Leftrightarrow \{x=6 \text{ ή } x=-2\}$.

ii. Για $x = 6 > -1$ είναι $K = 6+3 = 9$.

Για $x = -2 < -1$ είναι $K = 1-(-2) = 1+2 = 3$.

Θέμα 4 - Κωδικός: 13170

9. Θέμα 13170 Αρχέτυπο

Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά $\varepsilon\ \%$ (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι $\varepsilon\ \%$).

α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο x € με επιτόκιο $\varepsilon\ \%$, ύστερα από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2$ €.

(Μονάδες 7)

β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.

i) Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης

$$(1{,}03^2 - 1{,}02^2) \cdot y = 15811 - 15000 \cdot 1{,}02^2$$

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Αν καταθέσουμε στην τράπεζα κεφάλαιο x € με επιτόκιο ε %, τότε στο τέλος του 1ου έτους, το κεφάλαιο στην τράπεζα θα είναι $x+\frac{\varepsilon}{100}\cdot x = x\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)$.

Στο τέλος του 2ου έτους, το κεφάλαιο στην τράπεζα θα είναι

$x\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)+\frac{\varepsilon}{100}\cdot x\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)=x\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)=x\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^2$.

β)

i. Αφού ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β, άρα $15000-y$ θα είναι το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Α. Σύμφωνα με το α) ερώτημα το ποσό που θα υπάρχει στην τράπεζα Β μετά από δύο έτη θα είναι $y\left(1+\frac{3}{100}\right)^2=y\cdot 1{,}03^2$, ενώ το αντίστοιχο ποσό στην τράπεζα Α θα είναι

$(15000-y)\left(1+\frac{2}{100}\right)^2=(15000-y)\cdot 1{,}02^2$.

Οπότε, θα πρέπει να ισχύει $y\cdot 1{,}03^2+(15000-y)\cdot 1{,}02^2=15811$. Έτσι, θα έχουμε: $y\cdot 1{,}03^2-\ y\cdot 1{,}02^2+15000\cdot 1{,}02^2=15811 \Leftrightarrow$

$y\cdot(1{,}03^2-\ 1{,}02^2)=15811-15000\cdot 1{,}02^2$

ii. Η προηγούμενη εξίσωση γράφεται

$y(1{,}03-1{,}02)(1{,}03+1{,}02)=15811-15000\cdot 1{,}0404 \Leftrightarrow$

$y\cdot 0{,}01\cdot 2{,}05=15811-15606 \Leftrightarrow y=\frac{205}{0{,}01\cdot 2{,}05}=\frac{2050000}{205}=10000$.

Άρα το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β ήταν 10000 €, ενώ στην τράπεζα Α είναι 5000 €.