Κεφ. 2.3. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 2 - Κωδικοί:

1239, 1258, 1303, 1320, 1322, 1323, 1366, 1371, 1384, 13177, 14412, 14491, 14572, 14617

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. Θέμα 1239 Αρχέτυπο

Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι

i) για κάθε $x \geq 2$, $A=3x-4$

ii) για κάθε $x<2$, $A=8-3x$. (Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) i) Ισχύει ότι:

$$x \geq 2 \Leftrightarrow 3x \geq 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 3x - 6 \geq 0$$

Άρα $|3x-6| = 3x-6$
Τότε:

$$A = |3x-6| + 2 = 3x - 6 + 2 = 3x - 4$$

ii) Ισχύει ότι:

$$x < 2 \Leftrightarrow 3x < 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 3x - 6 < 0$$

Άρα $|3x-6| = -(3x-6) = 6-3x$
Τότε:

$$A = |3x-6| + 2 = 6 - 3x + 2 = 8 - 3x$$

β) Για κάθε $x \geq 2$ είναι $|3x-6| = 3x-6$. Τότε:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = \frac{(3x)^2-4^2}{3x-6+2} = \frac{(3x-4)(3x+4)}{3x-4} = 3x+4$$

2. Θέμα 1258

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι:

$$5 < x < 10 \Leftrightarrow (5 < x \text{ και } x < 10) \Leftrightarrow (0 < x-5 \text{ και } x-10 < 0)$$

Τότε:

$$|x-5| = x-5 \text{ και } |x-10| = -(x-10)$$

β) Είναι:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10} = \frac{x-5}{x-5} + \frac{-(x-10)}{x-10} = 1 + (-1) = 0$$

3. Θέμα 1303

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = |2x-4| \quad \text{και} \quad B = |x-3|,$$ όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \le x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$. (Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$2 \le x < 3 \Leftrightarrow (2 \le x \text{ και } x < 3) \Leftrightarrow (4 \le 2x \text{ και } x-3<0) \Leftrightarrow (0 \le 2x-4 \text{ και } x-3<0)$$

Τότε:

$$A = |2x-4| = 2x-4 \text{ και } B = |x-3| = -(x-3) = 3-x$$

Άρα:

$$A + B = 2x - 4 + 3 - x = x - 1$$

β) Είναι:

$$A + B = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3,$$

αδύνατο διότι $x \in [2, 3)$. Επομένως δεν υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε $A + B = 2$.

4. Θέμα 1320 Αρχέτυπο

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \le \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x \le \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$d(2x, 3) = 3 - 2x \Leftrightarrow |2x - 3| = 3 - 2x \Leftrightarrow |2x - 3| = -(2x - 3) \quad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$|\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 0$$

Τότε από τη σχέση (1) ισοδύναμα βρίσκουμε:

$$|2x - 3| = -(2x - 3) \Leftrightarrow 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

β) Επειδή ισχύει $x \leq \frac{3}{2}$ είναι $2x - 3 \leq 0$ και $3 - x \geq 0$. Τότε:

$$|2x - 3| = -(2x - 3) \quad \text{και} \quad |3 - x| = 3 - x$$

Επομένως η παράσταση Κ γράφεται:

$$K = |2x - 3| - 2|3 - x| = -(2x - 3) - 2(3 - x) = 3 - 2x - 6 + 2x = -3$$

5. Θέμα 1322 Αρχέτυπο

Δίνεται πραγματικός αριθμός *x* για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \dfrac{|x+1|+|x-5|}{3}$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|x-2|<3 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3+2<x-2+2<3+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1<x<5$$

β) Ισχύει ότι:

$$-1<x<5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-1<x \text{ και } x<5) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (0<x+1 \text{ και } x-5<0)$$

Άρα:

$$|x+1|=x+1 \quad \text{και} \quad |x-5|=-(x-5)=5-x$$

Τότε:

$$K=\frac{|x+1|+|x-5|}{3}=\frac{x+1+5-x}{3}=\frac{6}{3}=2$$

6. Θέμα 1323

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί *y*, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\dfrac{|y-1|+|y-3|}{2}$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|y-2|<1 \Leftrightarrow -1<y-2<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1+2<y-2+2<1+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1<y<3 \Leftrightarrow y\in(1,3)$$

β) Ισχύει ότι:

$$1<y<3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1<y \text{ και } y<3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (0<y-1 \text{ και } y-3<0)$$

Άρα:

$$|y-1|=y-1 \quad \text{και} \quad |y-3|=-(y-3)=3-y$$

Τότε:

$$K=\frac{|y-1|+|y-3|}{2}=\frac{y-1+3-y}{2}=\frac{2}{2}=1$$

7. Θέμα 1366 Αρχέτυπο

α) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha+\frac{1}{\alpha}\le -2$. (Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\ge 2$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $\alpha<0$, ισχύει:

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}\le -2 \Leftrightarrow \alpha^2+1\ge -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha+1\ge 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2\ge 0, \text{ ισχύει}$$

β) Αφού $\alpha<0$ είναι $|\alpha|=-\alpha$, Τότε:

$$|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\ge 2 \Leftrightarrow -\alpha-\frac{1}{\alpha}\ge 2 \Leftrightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha}\le -2, \text{ ισχύει από σκέλος (α)}$$

8. Θέμα 1371

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$-{0}, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1) (Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|} + \frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{|\alpha|\cdot|\beta|} \geq 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 \geq 2|\alpha|\cdot|\beta| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha|\cdot|\beta| \geq 0 \Leftrightarrow (|\alpha| - |\beta|)^2 \geq 0, \text{ ισχύει}$$

β) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν:

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 = 0 \Leftrightarrow |\alpha| - |\beta| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow (\alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta),$$

δηλαδή όταν οι αριθμοί είναι ίσοι ή αντίθετοι.

9. Θέμα 1384

Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$. (Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$1 < x < 4 \Leftrightarrow (1 < x \text{ και } x < 4) \Leftrightarrow (0 < x - 1 \text{ και } x < 4)$$

Άρα $|x - 1| = x - 1$

Ισχύει ακόμη ότι:

$$2 < y < 3 \Leftrightarrow (2 < y \text{ και } y < 3) \Leftrightarrow (2 < y \text{ και } y - 3 < 0)$$

Άρα $|y - 3| = -(y - 3) = 3 - y$

Τότε:

$$A = |x - 1| + |y - 3| = x - 1 + 3 - y = x - y + 2$$

β) Είναι $1 < x < 4$ (1) και:

$$2 < y < 3 \Leftrightarrow -2 > -y > -3 \Leftrightarrow -3 < -y < -2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3 + 2 < -y + 2 < -2 + 2 \Leftrightarrow -1 < -y + 2 < 0 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$1 - 1 < x - y + 2 < 0 + 4 \Leftrightarrow 0 < x - y + 2 < 4$$

10. Θέμα 13177 Αρχέτυπο

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \le \alpha \le 3$ και $-2 \le \beta \le -1$.

α) Να δείξετε ότι : $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι : $0 \le \alpha + \beta \le 2$.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2 \le \alpha \le 3$ οπότε $\alpha - 3 \le 0$ και άρα $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$.

Επίσης είναι $-2 \le \beta \le -1$ οπότε $\beta + 2 \ge 0$ και άρα $|\beta + 2| = \beta + 2$.

β) Με πρόσθεση κατά μέλη των $2 \le \alpha \le 3$ και $-2 \le \beta \le -1$ έχουμε ότι $0 \le \alpha + \beta \le 2$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι $0 \le \alpha + \beta \le 2$ οπότε $|\alpha + \beta| = \alpha + \beta$.

Συνεπώς η παράσταση γίνεται :

$$|\alpha+\beta| + |\alpha-3| - |\beta+2| = \alpha+\beta+3-\alpha-(\beta+2) = \alpha+\beta+3-\alpha-\beta-2 = 1.$$

11. Θέμα 14412 Αρχέτυπο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \dfrac{|1-\alpha|}{1-\alpha} = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \dfrac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\alpha > \beta$ και ισοδύναμα $\alpha - \beta > 0$, οπότε $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$.

Επίσης $\alpha > 1$ ισοδύναμα $1 - \alpha < 0$, οπότε $|1-\alpha| = \alpha - 1$.

Άρα $\dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \dfrac{|1-\alpha|}{1-\alpha} = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta} - \dfrac{\alpha-1}{1-\alpha} = 1 + \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1 + 1 = 2$.

β) Είναι

$\alpha > 1$ και $\beta > 1$, οπότε

$\alpha + \beta > 1 + 1$, δηλαδή

$\alpha + \beta > 2$ και από το α) ερώτημα έχουμε ότι

$$\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}.$$

12. Θέμα 14491

α) Να λυθεί η ανίσωση $|y - 3| < 1$

(Μονάδες 12)

β) Αν x,y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$|y - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y - 3 < 1 \Leftrightarrow -1 + 3 < y - 3 + 3 < 1 + 3 \Leftrightarrow 2 < y < 4$

β) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο: $E = xy$.

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ βρίσκουμε:

$1 \cdot 2 < x \cdot y < 3 \cdot 4 \Leftrightarrow 2 < E < 12$

13. Θέμα 14572

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $|x+2|<1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$.

(Μονάδες 10)

β) $|2x+4|<2$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}&|x+2|<1 \Leftrightarrow\\&-1<x+2<1 \Leftrightarrow\\&-1-2<x+2-2<1-2 \Leftrightarrow\\&-3<x<-1.\end{aligned}$$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$-3<x<-1$, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης με το 2, οπότε

$-6<2x<-2$, προσθέτουμε στα μέλη της ανίσωσης το 4 και έχουμε

$-2<2x+4<2$, οπότε τελικά

$$|2x+4|<2.$$

Εναλλακτικά, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανίσωσης $|x+2|<1$ με το 2 και έχουμε

$2\cdot|x+2|<2\cdot 1$, οπότε

$|2\cdot(x+2)|<2$ και τελικά

$$|2x+4|<2.$$

14. Θέμα 14617

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1\ (I)$.

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6,8)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6{,}8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3,4)$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Η ανίσωση (I) γράφεται $|x - 7| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 7 < 1 \Leftrightarrow 7 - 1 < x < 7 + 1$.

Ώστε $6 < x < 8 \Leftrightarrow x \in (6,8)$.

β) Είναι $k \in (6,8) \Leftrightarrow 6 < k < 8 \Leftrightarrow \frac{1}{6} > \frac{1}{k} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{24}{6} > \frac{24}{k} > \frac{24}{8} \Leftrightarrow 4 > \frac{24}{k} > 3$.

Άρα $3 < \frac{24}{k} < 4 \Leftrightarrow \frac{24}{k} \in (3,4)$.

Θέμα 4 - Κωδικοί:

1428, 1429, 1515, 1525, 13179

15. Θέμα 1428

Δίνονται τα σημεία *Α* , *Β* και *Μ* που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς *-2*, *7* και *x* αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$ (Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$|x+2|+|x-7|$ (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $Α=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) i) $|x + 2| = |x - (-2)| = d(x, -2) = MA$

ii) $|x - 7| = d(x, 7) = MB$

β) $|x + 2| + |x - 7| = MA + MB = AB$

γ) Ισχύει ότι:

$$|x + 2| + |x - 7| = AB =$$
$$= d(7, -2) = |7 - (-2)| = |9| = 9$$

δ) Είναι:

$$x > -2 \Leftrightarrow x + 2 > 0, \text{ άρα } |x + 2| = x + 2.$$

Επίσης:

$$x < 7 \Leftrightarrow x - 7 < 0, \text{ άρα}$$
$$|x - 7| = -(x - 7) = 7 - x$$

Τότε:

$$A = |x + 2| + |x - 7| = x + 2 + 7 - x = 9$$

16. Θέμα 1429

Σε έναν άξονα τα σημεία *A* , *B* και *M* αντιστοιχούν στους αριθμούς *5*, *9* και *x* αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x\text{-}5|$ και $|x\text{-}9|$.

(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x\text{-}5| = |x\text{-}9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου *M* αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό *x* που παριστάνει το σημείο *M*. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

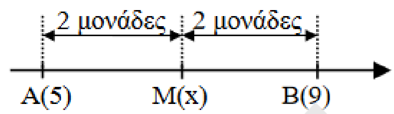
(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) $|x-5| = d(x, 5) = MA$

$|x-9| = d(x, 9) = MB$

β) i) Από την ισότητα $|x-5| = |x-9|$ συμπεραίνουμε ότι $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M είναι το μέσο του AB.



ii) Είναι:

$$AB = d(5, 9) = |5-9| = 4 \text{ μονάδες}$$

Επομένως το σημείο M απέχει 2 μονάδες από το σημείο A(5) και 2 μονάδες από το σημείο B(9), οπότε $x = 7$.

Αλγεβρικά

$$|x-5| = |x-9| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-5 = x-9 \text{ ή } x-5 = -(x-9)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (0x = -4 \text{ αδύνατη ή } x-5 = -x+9) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$$

17. Θέμα 1515

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(\alpha-1)(1-\beta) > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β. (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $(\alpha-1)(1-\beta)>0$, θα ισχύει:

$$(\alpha-1>0 \text{ και } 1-\beta>0) \text{ ή } (\alpha-1<0 \text{ και } 1-\beta<0)$$

1η περίπτωση

$$\alpha-1>0 \text{ και } 1-\beta>0 \Leftrightarrow \alpha>1 \text{ και } 1>\beta \Leftrightarrow \beta<1<\alpha$$

2η περίπτωση

$$\alpha-1<0 \text{ και } 1-\beta<0 \Leftrightarrow \alpha<1 \text{ και } 1<\beta \Leftrightarrow \alpha<1<\beta$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των α και β.

β) Αλγεβρικά

- Αν $\beta<1<\alpha$, τότε:

$$\begin{cases}\beta<1\\1<\alpha\\\beta<\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<1-\beta\\0<\alpha-1,\\\beta-\alpha<0\end{cases}$$

Επομένως:

$$|\alpha-1|=\alpha-1,\ |1-\beta|=1-\beta \text{ και}$$
$$|\beta-\alpha|=4 \Leftrightarrow -(\beta-\alpha)=4 \Leftrightarrow \alpha-\beta=4 \quad (1)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$K=|\alpha-1|+|1-\beta|=$$
$$=\alpha-1+1-\beta=\alpha-\beta \overset{(1)}{=} 4$$

- Αν $\alpha<1<\beta$, τότε:

$$\begin{cases}\alpha<1\\1<\beta\\\alpha<\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-1<0\\1-\beta<0,\\0<\beta-\alpha\end{cases}$$

Επομένως:

$$|\alpha-1|=-(\alpha-1)=1-\alpha,$$
$$|1-\beta|=-(1-\beta)=\beta-1 \quad \text{και}$$
$$|\beta-\alpha|=4 \Leftrightarrow \beta-\alpha=4 \quad (2)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$K=|\alpha-1|+|1-\beta|=1-\alpha+\beta-1=\beta-\alpha \overset{(2)}{=} 4$$

Γεωμετρικά

Έστω Α(α), Β(β) και Γ(1) όπου το Γ βρίσκεται μεταξύ των Α και Β. Τότε:

$$\begin{aligned} K &= |\alpha - 1| + |1 - \beta| = \\ &= d(\alpha, 1) + d(1, \beta) = \\ &= A\Gamma + \Gamma B = \\ &= AB = d(\alpha, \beta) = \\ &= |\beta - \alpha| = 4 \end{aligned}$$

18. Θέμα 1525

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $|\alpha - 2| < 1$
- $|\beta - 3| \le 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$. (Μονάδες 4)

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β . (Μονάδες 5)

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

(Μονάδες 9)

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|\alpha - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1 + 2 < \alpha - 2 + 2 < 1 + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 < \alpha < 3 \quad (1)$$

β) Ισχύει ότι:

$$|\beta - 3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \beta - 3 \leq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2 + 3 \leq \beta - 3 + 3 \leq 2 + 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 \leq \beta \leq 5 \quad (2)$$

γ) Από το σκέλος (α) βρίσκουμε:

$$1 < \alpha < 3 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 < 2\alpha < 2 \cdot 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 < 2\alpha < 6 \quad (3)$$

Από το σκέλος (β) βρίσκουμε:

$$1 \leq \beta \leq 5 \Leftrightarrow -3 \cdot 1 \geq -3\beta \geq -3 \cdot 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3 \geq -3\beta \geq -15 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -15 \leq -3\beta \leq -3 \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$2 - 15 < 2\alpha - 3\beta < 6 - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -13 < 2\alpha - 3\beta < 3$$

δ) Από την ανίσωση (2) βρίσκουμε:

$$1 \leq \beta \leq 5 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\beta} \leq 1 \quad (5)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (5) και βρίσκουμε:

$$1 \cdot \frac{1}{5} < \alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 3 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{\alpha}{\beta} < 3$$

19. Θέμα 13179 **Αρχέτυπο**

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \le \beta \le 2$ και $2 \le \alpha \le 4$.

α)

i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

(Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

(Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \le 1 \le \frac{\alpha}{\beta}$.

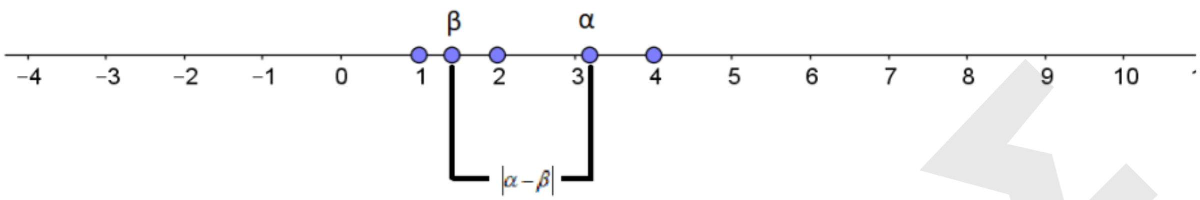
(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right|$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η απόσταση $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$ των αριθμών α και β πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



i. Από τον άξονα και αφού ο β δεν μπορεί να πάρει τιμή μικρότερη (πιο αριστερά) του 1 και ο α δεν μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη (πιο δεξιά) του 4, συμπεραίνουμε ότι η μεγαλύτερη τιμή της $d(\alpha,\beta)$ είναι 3 (μάλιστα $d(\alpha,\beta)=3$ όταν $\beta=1$ και $\alpha=4$), δηλαδή $d(\alpha,\beta)\le 3$.

ii. Είναι $1\le\beta\le 2 \Leftrightarrow -1\ge-\beta\ge-2 \Leftrightarrow -2\le-\beta\le-1$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των $2\le\alpha\le 4$, $-2\le-\beta\le-1$ έχουμε ότι $2-2\le\alpha-\beta\le 4-1 \Leftrightarrow 0\le\alpha-\beta\le 3$.

Αφού $0\le\alpha-\beta$ είναι $|\alpha-\beta|=\alpha-\beta\le 3$ οπότε $d(\alpha,\beta)\le 3$.

β)

i. Δεδομένου ότι $1\le\beta\le 2$ και $2\le\alpha\le 4$ έχουμε ότι οι αριθμοί α,β είναι θετικοί και αφού $\beta\le 2\le\alpha$ είναι και $\beta\le\alpha$.

Έτσι αφού $\beta\le\alpha$ και $\beta>0$ έχουμε ότι $\frac{\beta}{\beta}\le\frac{\alpha}{\beta}$ δηλαδή $1\le\frac{\alpha}{\beta}$.

Επίσης αφού $\beta\le\alpha$ και $\alpha>0$ έχουμε ότι $\frac{\beta}{\alpha}\le\frac{\alpha}{\alpha}$ δηλαδή $\frac{\beta}{\alpha}\le 1$.

Τελικά $\frac{\beta}{\alpha}\le 1\le\frac{\alpha}{\beta}$.

ii. Αφού δείξαμε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \le 1 \le \frac{\alpha}{\beta}$ έχουμε ότι $1-\frac{\beta}{\alpha} \ge 0$ οπότε $\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right| = 1-\frac{\beta}{\alpha}$ και $\frac{\alpha}{\beta}-1 \ge 0$ οπότε $\left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right| = \frac{\alpha}{\beta}-1$.

Συνεπώς

$$\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right| \Leftrightarrow$$
$$1-\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}-1 \Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta - \alpha\beta\cdot\frac{\beta}{\alpha} = \alpha\beta\cdot\frac{\alpha}{\beta} - \alpha\beta \Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \alpha\beta \Leftrightarrow$$
$$0 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow$$
$$0 = (\alpha-\beta)^2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha = \beta.$$

Όμως $1 \le \beta \le 2 \le \alpha \le 4$, οπότε για να είναι $\alpha = \beta$ θα πρέπει $\alpha = \beta = 2$.