Κεφ. 2.2. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 2 - Κωδικοί:

1287, 1317, 1324, 1373, 12673, 12922, 13266, 13323, 14475, 14492, 14704

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. Θέμα 1287

Δίνονται οι παραστάσεις: $Κ=2α^2+β^2$ και $Λ=2αβ$, όπου $α, β \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $Κ \geq Λ$, για κάθε τιμή των $α, β$. (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των $α, β$ ισχύει η ισότητα $Κ = Λ$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$Κ \geq Λ \Leftrightarrow$$

$$Κ - Λ \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2α^2 + β^2 - 2αβ \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(α^2 + α^2) + β^2 - 2αβ \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$α^2 + (α^2 + β^2 - 2αβ) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$α^2 + (α - β)^2 \geq 0$$ που ισχύει για κάθε $α, β \in \mathbb{R}$.

Άρα $Κ \geq Λ$, για κάθε τιμή των $α, β$.

β) Ισχύει $K = \Lambda \Leftrightarrow$

$$\alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = 0 \text{ και } (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 0 \text{ και } \alpha = \beta$$

Τελικά $K = \Lambda$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta = 0$.

2. Θέμα 1317 Αρχέτυπο

Δίνονται οι παραστάσεις: $K= 2\alpha^2+\beta^2+9$ και $\Lambda=2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)$ (Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β. (Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$K - \Lambda = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 2\alpha(3 - \beta) =$$

$$= 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - (6\alpha - 2\alpha\beta) =$$

$$= \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta =$$

$$= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά ισχύει ότι:

$$K \geq \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 \geq 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε τιμή των α, β.

γ) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν:

$$K = \Lambda \Leftrightarrow \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((\alpha + \beta)^2 = 0 \;\text{ και }\; (\alpha - 3)^2 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta = 0 \;\text{ και }\; \alpha - 3 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha = -\beta \;\text{ και }\; \alpha = 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha = 3 \;\text{ και }\; \beta = -3)$$

3. Θέμα 1324

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς *x* και *y* ισχύουν: $3 \le x \le 5$ και $-2 \le y \le -1$,

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ (Μονάδες 12)

β) $x^2 + y^2$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$3 \le x \le 5 \Leftrightarrow -3 \ge -x \ge -5 \Leftrightarrow -5 \le -x \le -3 \;(1)$$

και από υπόθεση ισχύει ότι $-2 \le y \le -1$ (2).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$-2 - 5 \le y - x \le -1 - 3 \Leftrightarrow -7 \le y - x \le -4$$

β) Ισχύει ότι:

$$3 \le x \le 5 \Leftrightarrow 3^2 \le x^2 \le 5^2 \Leftrightarrow 9 \le x^2 \le 25 \ (3)$$

και:

$$-2 \le y \le -1 \Leftrightarrow -2\cdot(-1) \ge y\cdot(-1) \ge -1\cdot(-1) \Leftrightarrow 2 \ge -y \ge 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 \le -y \le 2 \Leftrightarrow 1^2 \le (-y)^2 \le 2^2 \Leftrightarrow 1 \le y^2 \le 4 \ \ (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$9 + 1 \le x^2 + y^2 \le 25 + 4 \Leftrightarrow 10 \le x^2 + y^2 \le 29$$

4. Θέμα 1373 Αρχέτυπο

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί *α, β*, με *α > 0* και *β > 0*. Να αποδείξετε ότι:

α) $a + \frac{4}{a} \ge 4$ (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \ge 16$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha + \frac{4}{\alpha} \ge 4 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha^2 + 4 \ge 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 \ge 0,$$ το οποίο ισχύει

β) Είναι:

$$\alpha + \frac{4}{\alpha} \ge 4 \ \ (1)$$

και όμοια αποδεικνύουμε ότι:

$$\beta + \frac{4}{\beta} \ge 4 \ \ (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \ge 16$$

5. Θέμα 12673 Αρχέτυπο

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0<\alpha<\beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3+\frac{3}{\beta}<\beta^3+\frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Με $0<\alpha<\beta$ έχουμε $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$, οπότε, $\frac{3}{\alpha}>\frac{3}{\beta}$. Επομένως, $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$.

β) Με $0<\alpha<\beta$ έχουμε $\alpha^3<\beta^3$. Επιπλέον, από το ερώτημα (α) είναι $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$, οπότε με πρόσθεση των δυο ανισοτήτων παίρνουμε:

$$\alpha^3+\frac{3}{\beta}<\beta^3+\frac{3}{\alpha}$$

που είναι το ζητούμενο.

6. Θέμα 12922

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\alpha^2+\beta^2$ και $B=2\alpha\beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A=0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A-B\geq 0$ για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A-B=0$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Για να είναι η παράσταση $A = 0$, πρέπει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ που ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

β)Είναι: $A - B = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, ισχύει σαν τετράγωνο αριθμού.

γ)$A - B = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

7. Θέμα 13266 *

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

(Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος της ισότητας έχουμε:

$$(\alpha+2)^2+1=\alpha^2+4\alpha+2^2+1=\alpha^2+4\alpha+5=A$$

β)

i. Ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$A+B\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+2)^2+1+(2\beta+1)^2-1\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+2)^2+(2\beta+1)^2\geq 0\,,$$

που ισχύει ως άθροισμα τετραγώνων.

ii. Από το ερώτημα β)i) βλέπουμε ότι η ισότητα ισχύει για

$$(\alpha+2)^2+(2\beta+1)^2=0$$

η οποία ισχύει για:

$$\{(\alpha+2)^2=0 \text{ και } (2\beta+1)^2=0\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{\alpha=-2 \text{ και } \beta=-\frac{1}{2}\right\}.$$

8. Θέμα 13323

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+4)^2=x^2+y^2-2x+8y+17\,.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2+y^2-2x+8y+17=0$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για να αποδείξουμε την ζητούμενη ισότητα, θα χρησιμοποιήσουμε ευθεία απόδειξη. Έχουμε λοιπόν:

$(x-1)^2+(y+4)^2=(x^2-2x+1)+(y^2+8y+16)=x^2+y^2-2x+8y+17$.

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$x^2+y^2-2x+8y+17=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$
$$(x-1)^2+(y+4)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2=0 \text{ και } (y+4)^2=0, \text{ δηλαδή}$$
$$x-1=0 \text{ και } y+4=0, \text{ οπότε τελικά}$$
$$x=1 \text{ και } y=-4.$$

9. Θέμα 14475

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2\le\alpha\le4$ και $-4\le\beta\le-3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha+2\beta$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha-\beta$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2 \le \alpha \le 4$ (1)

και

$$-4 \le \beta \le -3 \text{, οπότε}$$

$$-4 \cdot 2 \le \beta \cdot 2 \le -3 \cdot 2 \text{, και τελικά}$$

$$-8 \le 2\beta \le -6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), και έχουμε:

$$2-8 \le \alpha + 2\beta \le 4-6 \text{, οπότε τελικά}$$

$$-6 \le \alpha + 2\beta \le -2 .$$

β) Επειδή δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη, η παράσταση $\alpha - \beta$ γράφεται $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Είναι $2 \le \alpha \le 4$ (1)

και

$-4 \le \beta \le -3$, οπότε πολ/ζουμε με (-1) τα μέλη της ανισότητας και αυτή αλλάζει φορά

$$-4 \cdot (-1) \ge \beta \cdot (-1) \ge -3 \cdot (-1),$$

$$4 \ge -\beta \ge 3 \text{ και τελικά}$$

$$3 \le -\beta \le 4 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (3), και έχουμε:

$$2+3 \le \alpha - \beta \le 4+4 \text{, οπότε τελικά}$$

$$5 \le \alpha - \beta \le 8 .$$

10. Θέμα 14492

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα.
Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι $Π = 2x + 2y$. Τότε:

$4 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow 2\cdot 4 \leq 2x \leq 2\cdot 7 \Leftrightarrow 8 \leq 2x \leq 14$ (1) και

$2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 2\cdot 2 \leq 2y \leq 2\cdot 3 \Leftrightarrow 4 \leq 2y \leq 6$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$8 + 4 \leq 2x + 2y \leq 14 + 6 \Leftrightarrow 12 \leq Π \leq 20$.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί η νέα περίμετρος θα είναι:

$P = 2(x - 1) + 2\cdot 3y = 2x + 6y - 2$. Τότε:

$$2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 6\cdot 2 \leq 6y \leq 6\cdot 3 \Leftrightarrow 12 \leq 6y \leq 18$$

$$\Leftrightarrow 12 - 2 \leq 6y - 2 \leq 18 - 2 \Leftrightarrow 10 \leq 6y - 2 \leq 16 \text{ (3)}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (3) και βρίσκουμε:

$8 + 10 \leq 2x + 6y - 2 \leq 14 + 16 \Leftrightarrow 18 \leq P \leq 30$.

11. Θέμα 14704 Αρχέτυπο

Αν $2 \le x \le 3$ και $1 \le y \le 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$

(Μονάδες 5)

β) $2x-3y$

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις $2 \le x \le 3$ και βρίσκουμε:

$$2 + 1 \le x + y \le 3 + 2 \Leftrightarrow 3 \le x + y \le 5.$$

β) Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $2 \le x \le 3$ με 2 και βρίσκουμε: $4 \le 2x \le 6$. (1)

Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $1 \le y \le 2$ με -3 και βρίσκουμε:

$$-3 \ge -3y \ge -6 \Leftrightarrow -6 \le -3y \le -3 \quad (2).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$-2 \le 2x-3y \le 3.$$

γ) Ισχύει ότι: $2 \le x \le 3$ (3) και $1 \le y \le 2 \Leftrightarrow 1 \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{y} \le 1$. (4)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$\frac{2}{2} \le \frac{x}{y} \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \frac{x}{y} \le 3.$$

Θέμα 3 - Κωδικός: 14602

12. Θέμα 14602

Αν $0<\alpha<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0<\alpha^3<\alpha$.

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}.$$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$0<\alpha<1 \overset{\cdot\alpha^2>0}{\Leftrightarrow}$$
$$0<\alpha^3<\alpha^2 \quad (1)$$

και

$$0<\alpha<1 \overset{\cdot\alpha>0}{\Leftrightarrow}$$
$$0<\alpha^2<\alpha \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $0<\alpha^3<\alpha$.

β) Από το δεδομένο και το α) ερώτημα έχουμε $0<\alpha^3<\alpha<1$. Επιπλέον επειδή ο α είναι θετικός αριθμός, ομόσημος του 1 δηλαδή, έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha<1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{\alpha}>1.$$

Τελικά $0<\alpha^3<\alpha<1<\frac{1}{\alpha}$.