Κεφ. 2.1. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 - Άλγεβρα Α' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 2 - Κωδικοί:

1251, 1353, 12685, 13053, 13088, 13472, 14458, 14473, 14489, 14555

Η Τράπεζα Θεμάτων για την Άλγεβρα Α' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course της Άλγεβρας, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

1. Θέμα 1251 Αρχέτυπο

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί *α, β, γ, δ* με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι *α=3β* και *δ=5γ* (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$ (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \Leftrightarrow \alpha+\beta=4\beta \Leftrightarrow \alpha=3\beta \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\gamma=\delta-\gamma \Leftrightarrow \delta=5\gamma$$

β) Για $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$ η παράσταση Π γράφεται:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}=\frac{3\beta\gamma+\beta\gamma}{\beta 5\gamma-\beta\gamma}=\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1$$

2. Θέμα 1353 Αρχέτυπο

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς *x, y* ισχύει:

$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς *x, y* ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$(x-1)^2+(y+3)^2 = x^2-2x+1^2+y^2+2\cdot 3\cdot y+3^2 = \\ = x^2-2x+1+y^2+6y+9 = x^2+y^2-2x+6y+10$$

β) Ισχύει ότι:

$$x^2+y^2-2x+6y+10=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} (x-1)^2+(y+3)^2=0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((x-1)^2=0 \text{ και } (y+3)^2=0) \Leftrightarrow (x-1=0 \text{ και } y+3=0) \Leftrightarrow (x=1 \text{ και } y=-3)$$

3. Θέμα 12685 Αρχέτυπο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2.$

(Μονάδες 12)

β) $\alpha=\beta$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Κάνοντας πράξεις στη δοθείσα σχέση έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}+\alpha\cdot\frac{1}{\beta}+\beta\cdot\frac{1}{\alpha}+\beta\cdot\frac{1}{\beta}=4,\ \text{τότε}$$
$$1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+1=4,\ \text{τότε}$$
$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2\Leftrightarrow$$
$$\alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta\Leftrightarrow$$
$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=0\Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)^2=0\Leftrightarrow$$
$$\alpha-\beta=0\Leftrightarrow\alpha=\beta.$$

4. Θέμα 13053

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta+\gamma=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$, $\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0.$$

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) i. Από την ισότητα $\alpha+\beta+\gamma=0$, προκύπτει ότι $\beta+\gamma=-\alpha$, που είναι το ζητούμενο.

ii. Με τη βοήθεια του προηγούμενου υποερωτήματος, έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha^2}{-\alpha}=-\alpha\,.$$

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha\,.$$

Ομοίως, από τη δοσμένη ισότητα παίρνουμε $\gamma+\alpha=-\beta$ και $\alpha+\beta=-\gamma$, οπότε

$$\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}=\frac{\beta^2}{-\beta}=-\beta \text{ και } \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma^2}{-\gamma}=-\gamma\,.$$

Επομένως,

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=-\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

που είναι το ζητούμενο.

5. Θέμα 13088 Αρχέτυπο

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A=2(x+y)^2-(x-y)^2-6xy-y^2$

α) Να αποδείξετε ότι : $A=x^2$

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B=2\cdot 2022^2-2020^2-6\cdot 2021-1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $A = 2(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) - 6xy - y^2 = x^2$

β) Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε στην α) όπου x = 2021 και y=1 προκύπτει ότι το αριστερό μέλος είναι της μορφής: $2(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) - 6xy - y^2$ άρα θα είναι ίσο με το Α, επομένως και ίσο με το $x^2 = 2021^2$ επομένως ο ζητούμενος φυσικός είναι ο 2021.

6. Θέμα 13472 *

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$.

(Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) i. Αν αντικαταστήσουμε τα α^2, β^2 από τις δοσμένες ισότητες, βρίσκουμε ότι

$$\alpha^2 - \beta^2 = 2\alpha + \beta - 2\beta - \alpha = \alpha - \beta .$$

ii. Η τελευταία ισότητα γράφεται $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) = \alpha - \beta$. Αλλά, $\alpha - \beta \neq 0$, αφού οι αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, οπότε παίρνουμε $\alpha + \beta = 1$, που είναι το ζητούμενο.

β) Όπως προηγουμένως, έχουμε:

$$A = \alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha + \beta + 2\beta + \alpha = 3\alpha + 3\beta = 3(\alpha+\beta) = 3 \cdot 1 = 3$$

αφού $\alpha + \beta = 1$.

7. Θέμα 14458

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x+4y)(x+y) = 9xy .$$

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y - x)^2 = 0$

(Μονάδες 8)

ii. $y = \frac{x}{2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) i. Από τη δοσμένη ισότητα με πράξεις έχουμε:

$x^2+4xy+xy+4y^2-9xy=0$, οπότε $x^2+4y^2-4xy=0$, δηλαδή $(2y-x)^2=0$ που είναι το ζητούμενο.

ii. Είναι: $(2y-x)^2=0$, οπότε $2y-x=0$, άρα $y=\frac{x}{2}$ που είναι το ζητούμενο.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε: $\frac{x}{2}=y$, (1).

Με τη βοήθεια της (1) έχουμε:

$$\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=(2y-y)^2+(2y+y)^2=y^2+(3y)^2=y^2+9y^2=10y^2$$

8. Θέμα 14473

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α) Να δείξετε ότι $y=2x$.

(Μονάδες 12)

β) Για $y=2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\frac{4x+5y}{x-4y}=-2 \text{, δηλαδή}$$

$$4x+5y=-2(x-4y) \text{, οπότε}$$

$$4x+5y=-2x+8y \text{, δηλαδή}$$

$$3y=6x \text{ και τελικά}$$

$$y=2x$$

β) Για $y=2x$ η παράσταση A γράφεται:

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}=\frac{2x^2+3(2x)^2+x(2x)}{x(2x)}=\frac{2x^2+3(4x^2)+2x^2}{2x^2}=$$

$$=\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8.$$

9. Θέμα 14489

Αν οι αριθμοί $2\alpha-1$ και $\beta-1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha+\beta=2\alpha\beta$.

(Μονάδες 10)

β) Οι αριθμοί $x=\alpha-\beta$ και $y=\alpha(1-2\beta)+2\beta$ είναι αντίθετοι.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον οι αριθμοί $2\alpha-1$ και $\beta-1$ είναι αντίστροφοι με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ έχουμε:

$(2\alpha-1)(\beta-1)=1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta-\beta-2\alpha+1=1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta=2\alpha+\beta$.

β) Για να είναι οι αριθμοί x και y αντίθετοι αρκεί να δείξουμε ότι:

$x+y=0$.

Συνεπώς,

$x+y=(\alpha-\beta)+\alpha(1-2\beta)+2\beta=\alpha-\beta+\alpha-2\alpha\beta+2\beta=2\alpha+\beta-2\alpha\beta=0$ ισχύει.

10. Θέμα 14555 Αρχέτυπο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x+y)^3(x - y)^3$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Ανοίγοντας τις παρενθέσεις στη δοθείσα ισότητα, έχουμε:

$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6 + 4xy = 5y^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 5y^2 = 6 - 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 5.$

β) Παρατηρούμε ότι $P = [(x+y)(x - y)]^3 = (x^2 - y^2)^3 = 5^3 = 125.$

Θέμα 3 - Κωδικός: 14329

11. Θέμα 14329

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A = \frac{-\alpha}{\beta}, B = \alpha^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός $A=\frac{-\alpha}{\beta}$ ορίζεται όταν ο παρονομαστής είναι διαφορετικός του 0. Δηλαδή, αρκεί να ισχύει $\beta\neq 0$.

Ο αριθμός $B=\alpha^2$ ορίζεται για οποιαδήποτε τιμή του $\beta\in R$.

Για να μην είναι μηδέν οι Α,Β, αρκεί και $\alpha\neq 0$.

β) Δύο αριθμοί Α,Β λέγονται αντίθετοι, αν και μόνο, αν ισχύει $A+B=0$.

Ισχύουν ισοδύναμα:

$A+B=0\Leftrightarrow$

$\frac{-a}{\beta}+a^2=0\Leftrightarrow$

$\alpha^2\beta-\alpha=0\Leftrightarrow$

$\alpha(\alpha\beta-1)=0\Leftrightarrow$

$a=0$ ή $\alpha\beta-1=0$

Όμως από τον ορισμό των δύο αριθμών είναι $\alpha\neq 0$, οπότε ισχύει ισοδύναμα ότι $\alpha\beta=1$, το οποίο σημαίνει ότι οι αριθμοί α,β είναι αντίστροφοι.