



Σχολή Κοινωνικών Επιστημών
Πρόγραμμα Σπουδών Διοίκηση Επιχειρήσεων & Οργανισμών
Θεματική Ενότητα Ποσοτικές Μέθοδοι (ΔΕΟ13)

Τελικές Εξετάσεις

(28/06/2025, 10:30-13:00)

Να απαντηθούν 2 από τα 3 θέματα

Οδηγίες

- Όλα τα θέματα είναι ισότιμα. Η βαρύτητα κάθε υπο-ερώτησης, αναφέρεται με τον αριθμό μονάδων που αντιστοιχεί σε αυτήν.
- Η τελική βαθμολογία της εξέτασης δίδεται με άριστα το 10, με ένα δεκαδικό ψηφίο.
- Η συνεργασία ή/και αντιγραφή επισύρουν μηδενισμό των γραπτών όλων των εμπλεκομένων.
- ΑΠΑΓΟΡΕΥΟΝΤΑΙ ΤΑ ΚΙΝΗΤΑ ΤΗΛΕΦΩΝΑ ΚΑΙ ΟΛΕΣ ΟΙ ΕΞΥΠΝΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΖΟΜΕΝΕΣ ΣΥΣΚΕΥΕΣ

ΘΕΜΑ 1 (5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (2 μονάδες)

Δίνεται η ακόλουθη συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2}{(x^2-1)}$

- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f . **(0.5 μονάδες)**
- Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία της. **(1 μονάδα)**
- Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int (-x^2 + x + 2 - \frac{1}{x})dx$. **(0.5 μονάδες)**

Ερώτημα Β (1.5 μονάδες)

Σε δείγμα 200 εργαζομένων μιας επιχείρησης καταγράφονται: η οικογενειακή τους κατάσταση, έγγαμος (Ε) ή άγαμος (Α), και ο εβδομαδιαίος χρόνος άθλησης, σε ώρες, που αφιερώνει ο καθένας. Ο χρόνος αυτός χαρακτηρίζεται ως «Λίγος» (Λ), αν είναι μικρότερος από πέντε ώρες την εβδομάδα, και ως «Σημαντικός» (Σ) αν είναι μεγαλύτερος ή ίσος από 5 ώρες την εβδομάδα. Από τους εργαζόμενους της επιχείρησης, 120 είναι έγγαμοι και 80 είναι άγαμοι. 90 από τους έγγαμους αθλούνται λίγο (Λ), ενώ 20 είναι ο αντίστοιχος αριθμός για τους άγαμους. Ένας από τους εργαζόμενους επιλέγεται στην τύχη.

- Να βρεθούν οι πιθανότητες, ο εργαζόμενος: (α) να αθλείται περισσότερες από πέντε ώρες την εβδομάδα, (β) να είναι άγαμος. **(0.5 μονάδες)**
- Αν γνωρίζουμε ότι ο εργαζόμενος που επιλέχτηκε είναι έγγαμος, ποια η πιθανότητα να αθλείται τουλάχιστον πέντε ώρες την εβδομάδα; **(0.25 μονάδες)**
- Ποια η πιθανότητα να είναι άγαμος, αν είναι γνωστό ότι αθλείται λιγότερο από πέντε ώρες την εβδομάδα; **(0.25 μονάδες)**
- Είναι τα ενδεχόμενα «άγαμος» και «χρόνος άθλησης μεγαλύτερος ή ίσος από πέντε ώρες την εβδομάδα» ανεξάρτητα και γιατί; **(0.5 μονάδες)**

Ερώτημα Γ (1.5 μονάδες)

Στο κέντρο τηλεφωνικής υποστήριξης μιας ασφαλιστικής εταιρείας εργάζονται 2 υπάλληλοι που απαντούν στις κλήσεις των ασφαλισμένων για αντιμετώπιση ατυχημάτων και οδική βοήθεια. Σύμφωνα με προηγούμενα στατιστικά στοιχεία, οι αφίξεις νέων κλήσεων ακολουθούν διαδικασία Poisson με μέσο ρυθμό 15 κλήσεις την ώρα. Οι υπάλληλοι που απαντούν στις κλήσεις μεριμνούν να σταλεί η απαραίτητη βοήθεια. Η χρονική διάρκεια μιας κλήσης ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο χρόνο εξυπηρέτησης τα 6 λεπτά. Αν κατά τη στιγμή που καταφθάνει μια νέα κλήση και οι 2 υπάλληλοι είναι απασχολημένοι, η κλήση μπαίνει σε ουρά αναμονής. Η ουρά αναμονής είναι κοινή και για τους 2 υπαλλήλους, ενώ οι κλήσεις που περιμένουν στην ουρά εξυπηρετούνται σύμφωνα με τη σειρά άφιξής τους (πειθαρχία FIFO).

- Πόσες κλήσεις κατά μέσο όρο βρίσκονται σε αναμονή; **(0.5 μονάδες)**
- Ποιος είναι ο μέσος χρόνος αναμονής μιας κλήσης στην ουρά μέχρι να απαντηθεί από έναν υπάλληλο; Ποιος είναι ο μέσος χρόνος παραμονής μιας κλήσης στο σύστημα από τη στιγμή άφιξης μέχρι την ολοκλήρωσή της; **(0.5 μονάδες)**
- Αν η αμοιβή κάθε υπαλλήλου είναι 6 ευρώ την ώρα, ενώ το κόστος παραμονής μιας κλήσης στο σύστημα (είτε αυτή περιμένει στην ουρά είτε εξυπηρετείται) είναι ίσο με

5 ευρώ την ώρα, πόσο είναι το μέσο ωριαίο συνολικό κόστος του συστήματος; **(0.5 μονάδες)**

[Υπόδειξη: Ως μονάδα μέτρησης του χρόνου να χρησιμοποιηθεί η ώρα, ενώ στους υπολογισμούς σας να διατηρήσετε τέσσερα (4) δεκαδικά ψηφία.]

ΘΕΜΑ 2 (5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (1.5 μονάδες)

Έστω η συνάρτηση ζήτησης $P = 100 - 0.5Q$ και προσφοράς $P = 10 + 0.5Q$ ενός αγαθού, όπου $P \geq 0$ η τιμή και $Q \geq 0$ η ποσότητα.

- Να υπολογιστούν η τιμή και η ποσότητα του αγαθού στο σημείο ισορροπίας. **(0.5 μονάδες)**
- Να υπολογιστεί η ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή στο σημείο ισορροπίας και να ερμηνευθεί το αποτέλεσμα. **(0.5 μονάδες)**
- Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2, 4)$ και από το σημείο τομής της ευθείας $y = \frac{1}{2}x - 4$ με τον άξονα των y . **(0.5 μονάδες)**

[Υπόδειξη: Σημείο ισορροπίας είναι το σημείο στο οποίο εξισώνεται η ζήτηση με την προσφορά ενός αγαθού.]

Ερώτημα Β (2 μονάδες)

Ένα μεσιτικό γραφείο επιθυμεί να μελετήσει την επίδραση που έχει το εισόδημα (X) (σε χιλιάδες ευρώ) στις τιμές ακινήτων (Y) (σε χιλιάδες ευρώ) μιας περιοχής. Για τον λόγο αυτόν, επέλεξε τυχαία 6 προάστια και για αυτά υπολόγισε τη μέση τιμή των ακινήτων της περιοχής που είχε στη διάθεσή του, καθώς και το μέσο ετήσιο εισόδημα των κατοίκων κάθε περιοχής, όπως αυτό ανακοινώνεται επίσημα.

Οι υπολογισμοί, βάσει των στοιχείων που συνέλεξε, είναι οι ακόλουθοι:

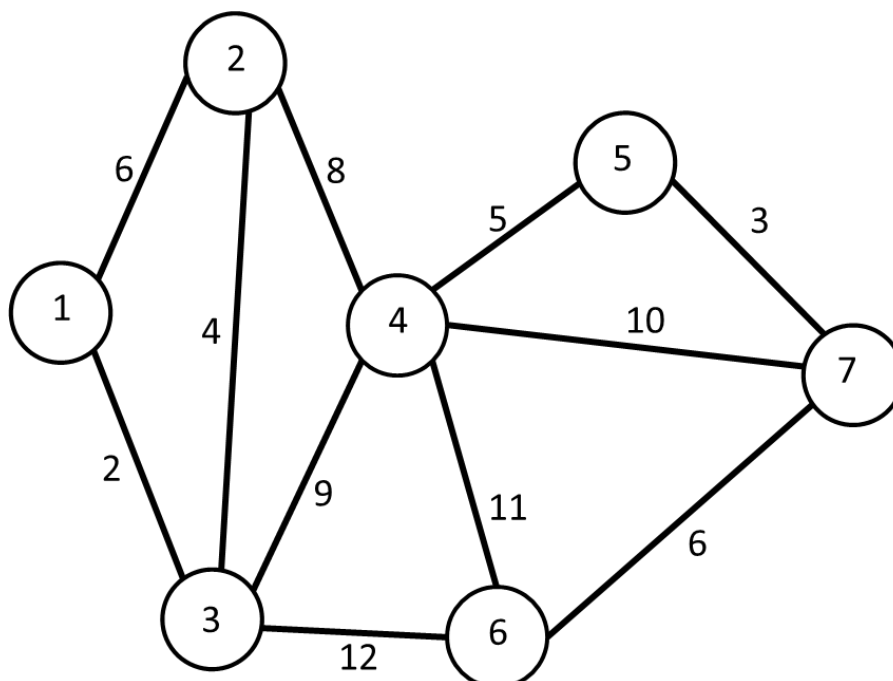
$$\sum_{i=1}^6 X_i = 21, \sum_{i=1}^6 Y_i = 60, \sum_{i=1}^6 X_i^2 = 91, \sum_{i=1}^6 Y_i^2 = 690, \sum_{i=1}^6 X_i Y_i = 249.$$

- Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για να εκτιμήσετε τους συντελεστές β_0 και β_1 του γραμμικού υποδείγματος $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$. **(0.5 μονάδες)**
- Υπολογίστε τον συντελεστή συσχέτισης και τον συντελεστή προσδιορισμού του υποδείγματος. **(0.5 μονάδες)**
- Ερμηνεύστε την εκτίμηση του συντελεστή β_1 , καθώς και τον συντελεστή προσδιορισμού. **(0.4 μονάδες)**
- Αν το μέσο εισόδημα αυξηθεί κατά 4 χιλιάδες ευρώ, πόσο αναμένεται να αυξηθεί η μέση τιμή των ακινήτων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(0.3 μονάδες)**
- Σε μια περιοχή με μέσο εισόδημα 10 χιλιάδες ευρώ πόση περιμένουμε να είναι η μέση τιμή των ακινήτων της περιοχής; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(0.3 μονάδες)**

[Υπόδειξη: Σε όλους τους υπολογισμούς σας να διατηρήσετε τέσσερα (4) δεκαδικά ψηφία.]

Ερώτημα Γ (1.5 μονάδες)

Ένα ασθενοφόρο έχει παραλάβει έναν ασθενή από το σημείο που παριστάνεται από τον κόμβο 1 του παρακάτω δικτύου, και πρέπει να τον μεταφέρει στο εφημερεύον νοσοκομείο που παριστάνεται από τον κόμβο 7 του δικτύου. Οι υπόλοιποι κόμβοι παριστάνουν διασταυρώσεις μεταξύ δρόμων, ενώ οι ακμές παριστάνουν τους δρόμους του τοπικού οδικού δικτύου (όλοι οι δρόμοι θεωρούνται διπλής κατεύθυνσης). Δίπλα σε κάθε ακμή σημειώνεται ο εκτιμώμενος χρόνος (σε λεπτά) που χρειάζεται το ασθενοφόρο για να διανύσει τον αντίστοιχο δρόμο. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο αλγόριθμο δικτυωτής ανάλυσης, να προσδιοριστεί η διαδρομή διαμέσου δρόμων του συγκεκριμένου οδικού δικτύου που ελαχιστοποιεί τον εκτιμώμενο συνολικό χρόνο για τη μετάβαση του ασθενοφόρου από το σημείο που βρίσκεται ο ασθενής (κόμβος 1) στο νοσοκομείο (κόμβος 7).



[Υπόδειξη: Κατά την επίλυση δεν απαιτείται να κατασκευαστεί σχήμα. Αρκεί να περιγραφούν με σαφήνεια τα βήματα του αλγορίθμου που ακολουθήθηκαν.]

ΘΕΜΑ 3 (5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (1.5 μονάδες)

Ένα εργοστάσιο παράγει ένα προϊόν. Η συνάρτηση συνολικού κόστους από την παραγωγή αυτού του προϊόντος είναι $TC = 250 + 10Q$, ενώ τα συνολικά έσοδα δίνονται από τη συνάρτηση $TR = 60Q - 0.25Q^2$, όπου $Q \in [0, 240]$ είναι η ποσότητα του προϊόντος.

- Βρείτε τη συνάρτηση κέρδους $\Pi(Q)$. (0.5 μονάδες)
- Βρείτε για ποια ποσότητα Q το κέρδος μεγιστοποιείται, καθώς και το μέγιστο κέρδος που προκύπτει. (1 μονάδα)

[Υπόδειξη: Το κέρδος προκύπτει αν από τα συνολικά έσοδα αφαιρεθεί το συνολικό κόστος.]

Ερώτημα Β (1.5 μονάδες)

Ο αριθμός των ανεπιθύμητων μηνυμάτων (spam) που καταφθάνουν σε έναν συγκεκριμένο εξυπηρετητή (server) ενός υπολογιστικού κέντρου, μπορεί να θεωρηθεί ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson. Είναι γνωστό, από ιστορικά στοιχεία που τηρούνται, ότι κατά μέσο όρο, καταφθάνουν 4 spam κάθε 10 λεπτά της ώρας.

- i. Να υπολογισθεί η πιθανότητα στα επόμενα 20 λεπτά της ώρας να εμφανιστούν 2 spam στον συγκεκριμένο server. **(0.5 μονάδες)**
- ii. Να υπολογισθεί η πιθανότητα εμφάνισης τουλάχιστον 1 spam στα επόμενα 5 λεπτά. **(0.5 μονάδες)**
- iii. Πόσα spam αναμένονται να καταφθάσουν στον server την επόμενη ώρα; **(0.5 μονάδες)**

Ερώτημα Γ (2 μονάδες)

Η εταιρία «Χημικά Προϊόντα M&D» παράγει δύο προϊόντα Α και Β, τα οποία αποτελούν πρώτες ύλες για εταιρίες που παρασκευάζουν υγρά σαπούνια και απορρυπαντικά για πλυντήρια. Η διοίκηση της παραπάνω εταιρίας, βασιζόμενη σε ανάλυση των αποθεματικών της αλλά και της εκτιμώμενης ζήτησης για τον ερχόμενο μήνα, καθόρισε ότι η συνολική παραγωγή των προϊόντων Α και Β πρέπει να είναι τουλάχιστον 350 λίτρα. Λόγω μιας παραγγελίας ενός μεγάλου πελάτη πρέπει να παραχθούν τουλάχιστον 125 λίτρα από το προϊόν Α. Το κάθε λίτρο προϊόντος Α απαιτεί 2 ώρες επεξεργασίας, ενώ το κάθε λίτρο προϊόντος Β απαιτεί 1 ώρα επεξεργασίας. Για τον ερχόμενο μήνα, υπάρχουν διαθέσιμες συνολικά 600 ώρες για επεξεργασία. Τέλος, το κόστος παραγωγής για το προϊόν Α είναι 2 € ανά λίτρο, ενώ για το προϊόν Β είναι 3 € ανά λίτρο. Ο στόχος της εταιρίας είναι η ικανοποίηση των παραπάνω περιορισμών παραγωγής με το μικρότερο δυνατό κόστος.

- i. Διαμορφώστε ένα κατάλληλο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα, εξηγώντας με σαφήνεια τις μεταβλητές απόφασης, την αντικειμενική συνάρτηση και το φυσικό νόημα των περιορισμών του. **(0.8 μονάδες)**
- ii. Χρησιμοποιήστε τη γραφική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού και προσδιορίστε τη βέλτιστη λύση του προβλήματος (τιμές μεταβλητών και βέλτιστη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης). **(1.2 μονάδες)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΘΕΜΑ 1 (5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (2 μονάδες)

Α.i (0.5 Μονάδες)

i) Για την εύρεση του πεδίου ορισμού της συγκεκριμένης συνάρτησης, θα σκεφτούμε με βάση τη θεωρία ως προς τον τύπο αυτής. Παρατηρούμε ότι η συνάρτησή μας είναι ρητή, συνεπώς ο παρονομαστής $(x^2 - 1)$ θα πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός. Επομένως, λύνοντας την ακόλουθη εξίσωση, θα έχουμε τις τιμές της μεταβλητής x που εξαιρούνται από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, ως εξής:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Α.ii (1 Μονάδα)

ii) Για τη μελέτη της μονοτονίας της συνάρτησης, θα πρέπει να διερευνηθεί το πρόσημο της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης αποτελείται από ένα πηλίκο δύο συναρτήσεων. Ο αριθμητής αλλά και ο παρονομαστής της συνάρτησης είναι πολυώνυμα δευτέρου βαθμού. Αρχικά, υπολογίζουμε την παράγωγο πρώτης τάξεως της συνάρτησης ως εξής:

$$\begin{aligned} f'(x) &\equiv \frac{df}{dx} = \frac{(x^2)'(x^2 - 1) - x^2(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

Συνεχίζουμε με την εύρεση των σημείων, όπου η τιμή της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης ισούται με το μηδέν:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Τώρα, μπορούμε να προχωρήσουμε στη δημιουργία του πίνακα προσήμου για την πρώτη παράγωγο (Πίνακας 1).

Πίνακας 1. Πίνακας προσήμου της $f'(x)$ και μονοτονίας της $f(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	-	-
$f(x)$	Γνησίως Αύξουσα	Γνησίως Αύξουσα	Γνησίως Φθίνουσα	Γνησίως Φθίνουσα	

Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0, 1)$, $(1, +\infty)$.

A.iii (0.5 Μονάδες)

$$\int \left(-x^2 + x + 2 - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \ln|x| + c, c \in \mathbb{R}$$

Ερώτημα Β (1.5 μονάδες)

Τα δεδομένα της άσκησης μπορούν να παρουσιασθούν στον ακόλουθο πίνακα:

Επίπεδο Άθλησης

		Λίγο (Λ)	Σημαντικό (Σ)	Σύνολο
Οικογενειακή ή Κατάσταση	Έγγαμος (Ε)	90	30	120
	Άγαμος (Α)	20	60	80
	Σύνολο	110	90	200

Αξιοποιώντας τον παραπάνω πίνακα, μπορούν να υπολογισθούν οι πιθανότητες των αντίστοιχων, ζητούμενων ενδεχομένων όπως ακολουθεί:

B.i (0.5 μονάδες)

$$P(\Sigma) = \frac{90}{200} = 0,45 \text{ και } P(A) = \frac{80}{200} = 0,4.$$

B.ii (0.25 μονάδες)

$$P(\Sigma|E) = \frac{30}{120} = 0,25.$$

B.iii (0.25 μονάδες)

$$P(A|\Lambda) = \frac{20}{110} = 0,182.$$

B.iv (0.5 μονάδες)

Για να είναι τα ενδεχόμενα «άγαμος», «χρόνος άθλησης μεγαλύτερος ή ίσος από πέντε ώρες την εβδομάδα» ανεξάρτητα, θα πρέπει να ικανοποιείται η ισότητα:

$$P(A \cap \Sigma) = P(A)P(\Sigma).$$

Οι επιμέρους πιθανότητες των αντίστοιχων ενδεχομένων είναι ίσες με:

$$P(A \cap \Sigma) = \frac{60}{200} = 0,3, \quad P(A) = \frac{80}{200} = 0,4, \quad P(\Sigma) = \frac{90}{200} = 0,45.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$P(A \cap \Sigma) = 0,3 \neq 0,18 = 0,4 \times 0,45 = P(A)P(\Sigma).$$

Επομένως, τα ενδεχόμενα «άγαμος» και «χρόνος άθλησης μεγαλύτερος ή ίσος από πέντε ώρες την εβδομάδα» δεν είναι ανεξάρτητα.

Ερώτημα Γ (1.5 μονάδες)

Πρόκειται για ένα σύστημα αναμονής τύπου M/M/2 (απεριόριστος χώρος αναμονής, πρακτικά άπειρου πλήθους πηγή πελατών, διαδικασία αφίξεων Poisson, εκθετική κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης, FIFO πειθαρχία, δύο θέσεις εξυπηρέτησης).

Χρησιμοποιώντας την ώρα ως μονάδα χρόνου, ο μέσος ρυθμός άφιξης είναι ίσος με $\lambda=15$ κλήσεις ανά ώρα. Ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης ανά κλήση είναι ίσος με 6 λεπτά, και επομένως, ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης κάθε σταθμού είναι ίσος με $\mu=10$ πελάτες ανά ώρα. Τέλος, ο αριθμός σταθμών εξυπηρέτησης είναι $s=2$. Επομένως, $\rho = \lambda/(s \mu) = 15/20 = 3/4 < 1$, συνεπώς το σύστημα είναι ευσταθές και συγκλίνει σε κατάσταση ισορροπίας.

Προχωρώντας στους υπολογισμούς, με βάση το σύστημα M/M/2, έχουμε:

Γ.i (0.5 μονάδες)

Για τον υπολογισμό του μέσου αριθμού κλήσεων στην ουρά αναμονής, θα πρέπει πρώτα να υπολογιστεί η πιθανότητα P_0 να μην υπάρχει καμιά κλήση στο σύστημα: Η πιθανότητα αυτή υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \right] + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \cdot \left(\frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\right)}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις τιμές των λ , μ , s προκύπτει:

$$P_0 = \frac{1}{\frac{(15/10)^0}{0!} + \frac{(15/10)^1}{1!} + \frac{(15/10)^2}{2!} \times \left(\frac{2 \times 10}{2 \times 10 - 15}\right)} = \frac{1}{7} = 0,1429$$

Έχοντας υπολογίσει την πιθανότητα P_0 , ο μέσος αριθμός κλήσεων στην ουρά αναμονής δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \lambda \mu}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} \cdot P_0 = \frac{(15/10)^2 \times 15 \times 10}{(2-1)!(2 \times 10 - 15)^2} \cdot 0,1429 = 1,9291 \text{ κλήσεις.}$$

Γ.ii (0.5 μονάδες)

Ο μέσος χρόνος αναμονής μιας κλήσης στην ουρά είναι ίσος με:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1,9291}{15} = 0,1286 \text{ ώρες.}$$

Επίσης, ο μέσος χρόνος παραμονής μιας κλήσης στο σύστημα συμπεριλαμβανομένου και του χρόνου εξυπηρέτησης, είναι ίσος με:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0,1286 + \frac{1}{10} = 0,2286 \text{ ώρες.}$$

Γ.iii (0.5 μονάδες)

Το μέσο ωριαίο κόστος του συστήματος δίνεται από τον τύπο: $TC = c_w L + c_s s$, όπου $c_w = 5$ είναι το κόστος αναμονής μιας κλήσης ανά ώρα παραμονής της στο σύστημα, $c_s = 6$ είναι το κόστος εξυπηρέτησης ανά σταθμό εξυπηρέτησης, $s = 2$ ο αριθμός των σταθμών εξυπηρέτησης, και L ο μέσος αριθμός κλήσεων στο σύστημα, που δίνεται από τη σχέση:

$$L = \lambda W = 15 \times 0,2286 = 3,4290$$

Ή εναλλακτικά από τον τύπο: $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1,9291 + \frac{15}{10} = 3,4291$

Επομένως, με αντικατάσταση, το μέσο ωριαίο κόστος του συστήματος είναι ίσο με: $TC = c_w L + c_s s = 5 \times 3,4290 + 6 \times 2 = 29,145$ ευρώ.

ΘΕΜΑ 2 (5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (1.5 μονάδες)

A.i (0.5 μονάδες)

Η ισορροπία στην αγορά του αγαθού επέρχεται όταν οι ποσότητες και οι τιμές των συναρτήσεων προσφοράς ισούνται. Επομένως, θα πρέπει:

$$100 - 0.5Q = 10 + 0.5Q \Rightarrow 100 - 10 = 0.5Q + 0.5Q \Rightarrow Q = 90$$

Αντικαθιστώντας σε μία από τις συναρτήσεις ζήτησης ή προσφοράς, λαμβάνουμε:

$$P = 10 + 0.5 \times 90 \Rightarrow P = 55.$$

A.ii (0.5 μονάδες)

Η ελαστικότητα ζήτησης δίνεται από τον κάτωθι τύπο:

$$\varepsilon_D = \frac{dQ}{dP} \frac{P}{Q}$$

Λύνουμε τη συνάρτηση ζήτησης ως προς την ποσότητα: $Q = 200 - 2P$. Άρα:

$$\varepsilon_D = \frac{dQ}{dP} \frac{P}{Q} = -2 * \frac{55}{90} = -1.22$$

Αφού $\varepsilon_D = -1.22$, συμπεραίνουμε ότι μια αύξηση της τιμής P κατά 1% θα επιφέρει μείωση της ζητούμενης ποσότητας Q κατά 1,22%. Επιπροσθέτως, αφού $|\varepsilon_D| = |-1.22| = 1.22 > 1$, η ζήτηση χαρακτηρίζεται ως ελαστική.

A.iii (0.5 μονάδες)

Για $x = 0$ έχουμε:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 0 - 4 \Rightarrow y = -4$$

Άρα, η ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 4$ τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, -4)$. Συνεπώς, η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από τα σημεία $(0, -4)$ και $(-2, 4)$, οπότε χρησιμοποιώντας τον γενικό τύπο εξίσωσης ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία λαμβάνουμε:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \Rightarrow y = -4 + \frac{4 - (-4)}{-2 - 0} (x - 0) \Rightarrow y = -4 - 4x$$

Ερώτημα Β (2 μονάδες)

B.i (0.5 μονάδες)

Από το τυπολόγιο, μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές με τη χρήση των τύπων. Παρατηρούμε ότι στον παρονομαστή για τον εκτιμητή του β_1 έχουμε τον αριθμητή της διακύμανσης του X που μας δίνεται από την εκφώνηση,. Επίσης, για τον αριθμητή τα αθροίσματα μπορούν να βρεθούν εύκολα από τις αντίστοιχες μέσες τιμές. Άρα, κάνοντας τις κατάλληλες αντικαταστάσεις, βρίσκουμε ότι:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum[(Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})]}{\sum[(X_i - \bar{X})^2]} = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}}{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}} = \frac{249 - \frac{21 \times 60}{6}}{91 - \frac{(21)^2}{6}} = \frac{39}{17.5} = 2.2286$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum Y_i}{n} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum X_i}{n} = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 10 - 2,2286 \times 3.5 = 2,1999$$

Επομένως, η ευθεία παλινδρόμησης είναι η: $Y = 2,1999 + 2,2286X$.

B.ii (0.5 μονάδες)

Χρησιμοποιώντας τον τύπο για τον συντελεστή συσχέτισης:

$$r = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}}{\sqrt{\left[\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n} \right] \left[\sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n} \right]}}$$

με αντικατάσταση βρίσκουμε ότι:

$$r = \frac{249 - \frac{21 \times 60}{6}}{\sqrt{\left(91 - \frac{(21)^2}{6} \right) \times \left(690 - \frac{(60)^2}{6} \right)}} = \frac{39}{39,6862} = 0,9827.$$

Ο συντελεστής προσδιορισμού μπορεί τώρα εύκολα να υπολογιστεί ως το τετράγωνο του συντελεστή συσχέτισης, άρα θα έχουμε: $R^2 = 0,9827^2 = 0,9657$.

B.iii (0.4 μονάδες)

Από την τιμή του $\hat{\beta}_1$ παρατηρούμε ότι αν το εισόδημα αυξηθεί κατά μια μονάδα (χίλια ευρώ), η μέση τιμή των ακινήτων αναμένεται να αυξηθεί κατά 2,2286, σε χιλιάδες ευρώ. Αυτό σημαίνει ότι άτομα με αυξημένο εισόδημα κατά χίλια ευρώ, τείνουν να αγοράζουν ακίνητα αυξημένα κατά 2228,6 ευρώ.

Η τιμή του συντελεστή προσδιορισμού που υπολογίσαμε μας δείχνει ότι το εισόδημα είναι ικανό να ερμηνεύσει περίπου το 96,57% της μεταβλητότητας της τιμής των ακινήτων.

B.iv (0.3 μονάδες)

Από την τιμή του $\hat{\beta}_1$ παρατηρούμε ότι αν το εισόδημα αυξηθεί κατά μια μονάδα (χίλια ευρώ) η τιμή αναμένεται να αυξηθεί κατά 2,2286, συνεπώς αύξηση του εισοδήματος κατά 4 χιλιάδες ευρώ (4 μονάδες αύξηση) αναμένεται να οδηγήσουν σε αύξηση κατά $4 \times 2,2286 = 8,9114$ στην τιμή των ακινήτων (σε χιλιάδες ευρώ).

B.v (0.3 μονάδες)

Αν το μέσο εισόδημα είναι 10 χιλιάδες ευρώ, δηλαδή $X = 10$, τότε η μέση τιμή των ακινήτων περιμένουμε αναμένουμε να είναι ίση με: $\hat{Y} = 2,1999 + 2,2286 \times 10 = 24,4859$. Δηλαδή: 24485,9 ευρώ.

Ερώτημα Γ (1.5 μονάδες)

Πρόκειται για πρόβλημα εύρεσης της συντομότερης διαδρομής από τον κόμβο 1, που είναι η αφετηρία, προς τον κόμβο 7, που είναι ο προορισμός.

Πρώτος μόνιμος κόμβος καθίσταται η αφετηρία (κόμβος 1) με απόσταση (δηλ. εκτιμώμενο χρόνο μετάβασης) 0 (από τον εαυτό της). Το σύνολο των μόνιμων κόμβων είναι το {1}.

1^η επανάληψη:

Κόμβοι με προσωρινές διαδρομές:

- κόμβος 2, με απόσταση 6 από την αφετηρία απευθείας, και
- κόμβος 3, με απόσταση 2 από την αφετηρία απευθείας.

Στο σύνολο των μονίμων κόμβων, εισέρχεται ο **κόμβος 3** με ελάχιστη απόσταση 2 λεπτά **από τον κόμβο 1** (αφετηρία), οπότε το σύνολο των μονίμων κόμβων γίνεται {1, 3}.

2^η επανάληψη:

Αναπροσαρμόζουμε τις μεταβάσεις, λόγω της εισαγωγής του κόμβου 3 στους μόνιμους. Οι κόμβοι με προσωρινές διαδρομές είναι:

- κόμβος 2, με απόσταση 6 λεπτά από την αφετηρία απευθείας είτε $2+4=6$ λεπτά από την αφετηρία, μέσω του κόμβου 3,
- κόμβος 4, με απόσταση $2+9=11$ λεπτά, μέσω του κόμβου 3, και
- κόμβος 6, με απόσταση $2+12=14$ λεπτά, μέσω του κόμβου 3.

Μόνιμος καθίσταται ο **κόμβος 2** που έχει την ελάχιστη προσωρινή απόσταση από την αφετηρία, δηλαδή 6 λεπτά, **μέσω του κόμβου 1 ή του κόμβου 3**. Το σύνολο των μονίμων είναι τώρα το: {1,3,2}.

3^η επανάληψη:

Αναπροσαρμόζουμε τις μεταβάσεις, λόγω της εισαγωγής του κόμβου 2 στο σύνολο των μονίμων.

- κόμβος 4, με απόσταση $2+9=11$ λεπτά, μέσω του κόμβου 3 (είναι προσβάσιμος και μέσω του κόμβου 2 με απόσταση $6+8=14$ λεπτά που είναι μεγαλύτερη), και
- κόμβος 6, με απόσταση $2+12=14$ λεπτά, μέσω του κόμβου 3.

Από τους κόμβους με προσωρινό μήκος διαδρομής μόνιμος γίνεται ο **κόμβος 4** με ελάχιστη απόσταση 11 λεπτά, **μέσω του κόμβου 3**, οπότε το σύνολο μονίμων είναι τώρα: {1, 3, 2, 4}.

4^η επανάληψη:

Αναπροσαρμόζουμε τις μεταβάσεις, λόγω της εισαγωγής του κόμβου 4 στο σύνολο των μονίμων:

- κόμβος 5, με απόσταση $11+5=16$ λεπτά, μέσω του κόμβου 4,
- κόμβος 6, με απόσταση $2+12=14$ λεπτά, μέσω του κόμβου 3 (είναι προσβάσιμος και από τον κόμβο 4 με απόσταση $11+11=22$ λεπτά που είναι μεγαλύτερη), και
- κόμβος 7 με απόσταση $11+10=21$, μέσω του κόμβου 4.

Μόνιμος καθίσταται ο **κόμβος 6** με απόσταση από την αφετηρία 14 λεπτά, **μέσω του κόμβου 3**, οπότε το σύνολο μονίμων γίνεται τώρα: {1, 3, 2, 4, 6}.

5^η επανάληψη:

Αναπροσαρμόζουμε τις μεταβάσεις, λόγω της εισαγωγής του κόμβου 6 στο σύνολο των μονίμων.

- κόμβος 5, με απόσταση $11+5=16$ λεπτά μέσω του κόμβου 4, και
- κόμβος 7, με απόσταση $14+6=20$ λεπτά μέσω του κόμβου 6 (είναι προσβάσιμος και από τον κόμβο 4 με απόσταση $11+10=21$ λεπτά που είναι μεγαλύτερη).

Μόνιμος γίνεται ο **κόμβος 5** με απόσταση από την αφετηρία 16 λεπτά, **μέσω του κόμβου 4** και το σύνολο μονίμων κόμβων γίνεται τώρα: {1,3,2,4,6,5}.

6^η επανάληψη:

Αναπροσαρμόζουμε τις μεταβάσεις, λόγω της εισαγωγής του κόμβου 5 στο σύνολο των μονίμων κόμβων.

- κόμβος 7, με απόσταση $16+3=19$ λεπτά μέσω του κόμβου 5 (είναι προσβάσιμος και από τον κόμβο 6 με απόσταση $14+6=20$ λεπτά που είναι μεγαλύτερη και από τον κόμβο 4 που είναι ομοίως μεγαλύτερη).

Μόνιμος καθίσταται ο **κόμβος 7** με απόσταση από την αφετηρία 19 λεπτά, **μέσω του κόμβου 5** και το σύνολο μονίμων γίνεται $\{1, 3, 2, 4, 6, 5, 7\}$.

Δεδομένου ότι ο προορισμός (κόμβος 7) έγινε μόνιμος, η διαδικασία έχει ολοκληρωθεί. Για να βρούμε τη συντομότερη διαδρομή από τον κόμβο 1 (αφετηρία) προς τον κόμβο 7 (προορισμό), εργαζόμαστε αναδρομικά (οπισθοδρομικά). Συγκεκριμένα, ο κόμβος 7 κατέστη μόνιμος, μέσω του κόμβου 5. Με τη σειρά του, ο κόμβος 5 κατέστη μόνιμος, μέσω του κόμβου 4, και ο κόμβος 4 μέσω του κόμβου 3. Συνεχίζοντας, ο κόμβος 3 έγινε μόνιμος, μέσω του κόμβου 1 (αφετηρίας). Επομένως, η συντομότερη διαδρομή είναι η διαδρομή: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$, με απόσταση- «συνολικό χρόνο» 19 λεπτά.

Οι υπολογισμοί αποτυπώνονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα:

Μόνιμοι κόμβοι	Ακμή άμεσα συνδεδεμένη	Προσωρινό μήκος διαδρομής	Λυμένος κόμβος	Συνολικό μήκος
{1}	1-2	$0+6=6$	3	2
	1-3	$0+2=2$		
{1,3}	1-2	$0+6=6$	2	6
	3-2	$2+4=6$	2	6
	3-4	$2+9=11$	4	11
	3-6	$2+12=14$		
{1,3,2}	2-4	$6+8=14$	6	14
	3-4	$2+9=11$		
	3-6	$2+12=14$		
{1,3,2,4}	3-6	$2+12=14$	5	16
	4-5	$11+5=16$		
	4-6	$11+11=22$		
	4-7	$11+10=21$		
{1,3,2,4,6}	4-5	$11+5=16$	7	19
	4-7	$11+10=21$		
	6-7	$14+6=20$		
{1,3,2,4,6,5}	4-7	$11+10=21$	7	19
	5-7	$16+3=19$		
	6-7	$14+6=20$		

ΘΕΜΑ 3 (5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

A.i (0.5 μονάδες)

Το κέρδος προκύπτει αν από τα συνολικά έσοδα αφαιρεθεί το συνολικό κόστος. Επομένως, η συνάρτηση κέρδους θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = 60Q - 0.25Q^2 - (250 + 10Q) = -0.25Q^2 + 50Q - 250$$

A.ii (1 μονάδα)

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης κέρδους $\Pi(Q) = -0.25Q^2 + 50Q - 250$ είναι το διάστημα $[0, 240]$. Επομένως, αν η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο, αυτό θα εντοπίζεται στα άκρα του πεδίου ορισμού της, δηλαδή είτε στο $Q = 0$, είτε στο $Q = 240$, είτε σε σημείο του πεδίου ορισμού της που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγός της.

Επομένως, αρχικά υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης κέρδους, και στη συνέχεια τη θέτουμε ίση με το μηδέν:

$$\Pi'(Q) = 0 \Rightarrow -0.5Q + 50 = 0 \Rightarrow Q = 100$$

Επειδή όμως ισχύει ότι: $\Pi''(Q) = -0.5 < 0$ για κάθε τιμή Q , το σημείο $Q = 100$ αποτελεί σημείο ολικού μεγίστου της συνάρτησης Π . Άρα, για $Q = 100$, η συνάρτηση κέρδους έχει ολικό μέγιστο στο πεδίο ορισμού της, ίσο προς:

$$\Pi(100) = -0.25(100)^2 + 50(100) - 250 = 2250$$

Ερώτημα Β (1.5 μονάδες)

B.i (0.5 μονάδες)

Αν X η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που αναπαριστά το πλήθος των spam που καταφτάνουν στον server σε 20 λεπτά της ώρας, τότε ισχύει ότι: $X \sim P(\lambda = 2 \times 4 = 8)$ και με αντικατάσταση στον τύπο η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$\Pr(X = 2) = \frac{e^{-8} 8^2}{2!} = 0,010735.$$

B.ii (0.5 μονάδες)

Αν Y η τ.μ. που αναπαριστά το πλήθος των spam που καταφτάνουν στον server σε 5 λεπτά της ώρας, τότε ισχύει ότι: $Y \sim P(\lambda = 0,5 \times 4 = 2)$ και με αντικατάσταση στον τύπο η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με:

$$\Pr(Y \geq 1) = 1 - \Pr(Y < 1) = 1 - \Pr(Y = 0) = 1 - \frac{e^{-2} 2^0}{0!} = 1 - 0,135 = 0,865.$$

B.iii (0.5 μονάδες)

Αν K η τ.μ. που παριστά το πλήθος των spam που καταφτάνουν στον server σε 1 ώρα, τότε ισχύει ότι: $K \sim P(\lambda = \frac{60 \times 4}{10} = 24)$.

Επομένως, αναμένονται να καταφθάσουν $E(K) = \lambda = 24$ spam.

Ερώτημα Γ (2 μονάδες)

Γ.i (0.8 μονάδες)

Ορίζουμε τις εξής μεταβλητές που παριστάνουν τα λίτρα των προϊόντων που θα παραχθούν:

- X_1 = λίτρα προϊόντος τύπου A
- X_2 = λίτρα προϊόντος τύπου B

Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, η αντικειμενική συνάρτηση Z που εκφράζει το συνολικό κόστος σε ευρώ που προκύπτει από την παραγωγή των προϊόντων και των δύο τύπων είναι ίση με:

$$Z = 2 X_1 + 3 X_2$$

Για τους περιορισμούς έχουμε :

- Η συνολική παραγωγή (Π) των προϊόντων τύπου A και B πρέπει να είναι ίση τουλάχιστον με 350 λίτρα, επομένως ισχύει ότι:
$$X_1 + X_2 \geq 350$$
- Υπάρχει μια έκτακτη ζήτηση (Ζ) ενός μεγάλου πελάτη της εταιρίας για άλλα 125 λίτρα του προϊόντος A, επομένως ισχύει ότι:
$$X_1 \geq 125$$
- Οι διαθέσιμες ώρες επεξεργασίας (Ε) για τον ερχόμενο μήνα είναι συνολικά 600, επομένως ισχύει ότι:

$$2 X_1 + X_2 \leq 600$$

Τέλος, υπάρχουν οι ακόλουθοι περιορισμοί μη αρνητικότητας: $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$.

Συνοπτικά, το πρόβλημα διατυπώνεται ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού ως εξής:

$$\begin{array}{llllll} \min & Z = & 2 X_1 & + & 3 X_2 & \\ \text{μ. π.} & & X_1 & + & X_2 & \geq 350 \quad (\Pi) \\ & & X_1 & & & \geq 125 \quad (Z) \\ & & 2 X_1 & + & X_2 & \leq 600 \quad (E) \\ & & X_1 & , & X_2 & \geq 0 \end{array}$$

Γ.ii (1.2 μονάδες)

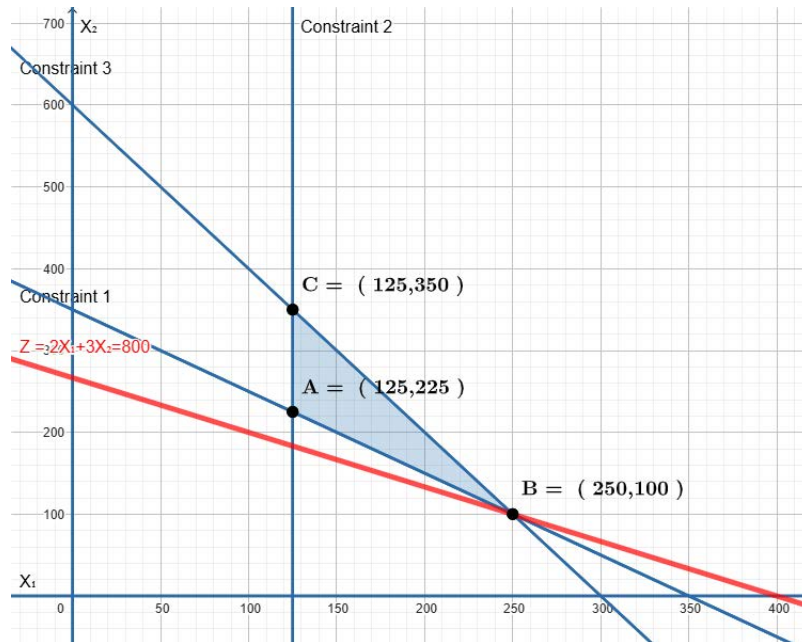
Η γραφική μέθοδος επίλυσης απαιτεί να βρεθεί η εφικτή περιοχή, η οποία οριοθετείται από τις περιοριστικές ευθείες. Για τον προσδιορισμό τους, βρίσκουμε δυο σημεία από τα οποία διέρχονται και, βάσει αυτών, τις χαράσσουμε:

- Για την ευθεία που αντιστοιχεί στον περιορισμό $X_1 + X_2 \geq 350$, θέτοντας $X_1 = 0$, βρίσκουμε $X_2 = 350$ και έχουμε το σημείο $(0, 350)$., ενώ θέτοντας $X_2 = 0$ βρίσκουμε $X_1 = 350$, οπότε έχουμε το σημείο $(350, 0)$.
- Η ευθεία που αντιστοιχεί στον περιορισμό $X_1 \geq 125$ διέρχεται από το σημείο $(125, 0)$ και είναι παράλληλη στον κατακόρυφο άξονα.
- Για την ευθεία που αντιστοιχεί στον περιορισμό $2X_1 + X_2 \leq 600$, θέτοντας $X_1 = 0$,

βρίσκουμε $X_2 = 600$, και έχουμε το σημείο $(0,600)$. Αντίστοιχα, θέτοντας $X_2 = 0$, βρίσκουμε $X_1 = \frac{600}{2} = 300$, οπότε έχουμε το σημείο $(300, 0)$.

Με βάση τα παραπάνω, οι περιορισμοί του προβλήματος μπορούν να παρασταθούν γραφικά, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί περιλαμβάνοντας την εφικτή περιοχή της λύσης στο τρίγωνο ABC.

Στη συνέχεια, βρίσκουμε τις συντεταγμένες των σημείων που αντιστοιχούν στις κορυφές της περιοχής των εφικτών λύσεων, επιλύοντας τα συστήματα εξισώσεων με τους περιορισμούς που αντιστοιχούν σε κάθε σημείο:



- Η κορυφή A αντιστοιχεί στην τομή των ευθειών $X_1 + X_2 = 350$ και $X_1 = 125$. Η λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων δίνει:

$$X_1 = 125 \text{ και } X_2 = 350 - 125 = 225$$

- Η κορυφή B αντιστοιχεί στην τομή των ευθειών $X_1 + X_2 = 350$ και $2X_1 + X_2 = 600$. Η λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων δίνει:

$$\left. \begin{array}{l} X_1 + X_2 = 350 \\ 2X_1 + X_2 = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} X_1 = 350 - X_2 \\ 2(350 - X_2) + X_2 = 600 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} X_1 = 350 - X_2 \\ X_2 = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} X_1 = 250 \\ X_2 = 100 \end{array} \right\}$$

- Η κορυφή C αντιστοιχεί στην τομή των ευθειών $X_1 \geq 125$ και $2X_1 + X_2 \leq 600$. Η λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων δίνει:

$$X_1 = 125 \text{ και } X_2 = 600 - 2X_1 = 600 - 2 * 125 = 350$$

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $Z = 2X_1 + 3X_2$ σε κάθε κορυφή της εφικτής περιοχής παρουσιάζεται στον πίνακα που ακολουθεί:

Κορυφή	Τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης
A (125, 225)	925
B (250, 100)	800
C(125, 350)	1.300

Από τις παραπάνω τιμές, προκύπτει ότι η βέλτιστη λύση που ελαχιστοποιεί την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης βρίσκεται στην κορυφή B, με συντεταγμένες $X_1 = 250$ και $X_2 = 100$. Επομένως, η εταιρεία πρέπει να παράγει 250 λίτρα προϊόντος τύπου A, και 100 λίτρα προϊόντος τύπου B.