

Σχολή Κοινωνικών Επιστημών
Πρόγραμμα Σπουδών Διοίκηση Επιχειρήσεων & Οργανισμών
Θεματική Ενότητα Ποσοτικές Μέθοδοι (ΔΕΟ13)

Επαναληπτικές Εξετάσεις

(20/07/2025, 10:30-13:00)

Να απαντηθούν 2 από τα 3 θέματα

Οδηγίες

- Όλα τα θέματα είναι ισότιμα. Η βαρύτητα κάθε υπο-ερώτησης, αναφέρεται με τον αριθμό μονάδων που αντιστοιχεί σε αυτήν.
- Η τελική βαθμολογία της εξέτασης δίδεται με άριστα το 10, με ένα δεκαδικό ψηφίο.
- Η συνεργασία ή/και αντιγραφή επισύρουν μηδενισμό των γραπτών όλων των εμπλεκομένων.
- ΑΠΑΓΟΡΕΥΟΝΤΑΙ ΤΑ ΚΙΝΗΤΑ ΤΗΛΕΦΩΝΑ ΚΑΙ ΟΛΕΣ ΟΙ ΕΞΥΠΝΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΖΟΜΕΝΕΣ ΣΥΣΚΕΥΕΣ

ΘΕΜΑ 1 (5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (2 μονάδες)

Μία επιχείρηση λιανικής πώλησης έχει συνάρτηση οριακών εσόδων που δίνεται από τη σχέση $MR(Q) = 60 - 0.5Q$, όπου $Q \geq 0$ η ποσότητα του προϊόντος, ενώ η συνάρτηση οριακού κόστους της δίνεται από τη σχέση $MC(Q) = 10$. Αν το σταθερό κόστος της επιχείρησης είναι $FC = 250$ χρηματικές μονάδες και τα μοναδικά έσοδα της επιχείρησης προέρχονται από τις πωλήσεις των προϊόντων:

- Να βρεθούν οι συναρτήσεις συνολικών εσόδων (TR) και συνολικού κόστους (TC) της επιχείρησης. **(1 μονάδα)**
- Να βρεθεί η ποσότητα Q που μεγιστοποιεί το κέρδος, καθώς και η τιμή του μέγιστου αυτού κέρδους. **(1 μονάδα)**

[Υπόδειξη: Το οριακό κόστος είναι η παράγωγος του συνολικού κόστους, όπου το συνολικό κόστος είναι το άθροισμα σταθερού και μεταβλητού κόστους. Επίσης, τα οριακά έσοδα είναι η παράγωγος των συνολικών εσόδων, ενώ το κέρδος προκύπτει αν από τα συνολικά έσοδα αφαιρεθεί το συνολικό κόστος.]

Ερώτημα Β (1.5 μονάδες)

Σε μία τράπεζα έχει διαπιστωθεί ότι το απόθεμα των συνταξιοδοτικών λογαριασμών μπορεί να θεωρηθεί ότι ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 2000$ χρηματικές μονάδες (χ.μ.) και τυπική απόκλιση $\sigma = 200$ χ.μ..

Για να δοθεί καταναλωτικό δάνειο, εφόσον ζητηθεί, σε έναν πελάτη με συνταξιοδοτικό λογαριασμό, θα πρέπει το απόθεμα του λογαριασμού του να είναι μεγαλύτερο από 2400 χ.μ..

- Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης με συνταξιοδοτικό λογαριασμό να μπορεί να πάρει καταναλωτικό δάνειο; **(0.7 μονάδες)**
- Μεταξύ πέντε τυχαία επιλεγμένων συνταξιοδοτικών λογαριασμών που είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους, ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ένας να μπορεί να πάρει καταναλωτικό δάνειο; **(0.8 μονάδες)**

Ερώτημα Γ (1.5 μονάδες)

Μια αγροτική επιχείρηση προγραμματίζει τις καλλιέργειες που θα πραγματοποιήσει την επόμενη χρονιά. Έχει τέσσερις επιλογές προϊόντων: σιτάρι, κριθάρι, σόγια και λαχανικά. Η επιχείρηση έχει στην ιδιοκτησία της συνολική έκταση 100 στρεμμάτων, αλλά δεν είναι απαραίτητο να καλλιεργηθεί όλη η έκταση. Στον πίνακα της επόμενης σελίδας δίνονται για κάθε προϊόν οι απαιτήσεις νερού (σε κυβικά μέτρα/στρέμμα) για όλη τη διάρκεια του έτους και το αναμενόμενο καθαρό κέρδος (σε ευρώ/στρέμμα).

Η επιχείρηση εκτιμά ότι η συνολική ποσότητα νερού για άρδευση που θα έχει στη διάθεσή της στη διάρκεια του έτους θα είναι 12.000 κυβικά μέτρα (κ.μ.). Επιπλέον, για να αποφύγει κινδύνους ολικής καταστροφής από απρόβλεπτα γεγονότα, θέλει να έχει κάποιο βαθμό διαφοροποίησης των καλλιεργειών. Για αυτόν τον λόγο έχει αποφασίσει ότι η καλλιεργήσιμη έκταση λαχανικών δεν μπορεί να υπερβαίνει το 50% της συνολικής έκτασης που θα

καλλιεργηθεί, ενώ τουλάχιστον 30% της συνολικής έκτασης που θα καλλιεργηθεί πρέπει να είναι σε σιτάρι.

Τύπος Καλλιέργειας	Απαιτούμενη Ποσότητα Νερού (κ.μ./στρέμμα)	Αναμενόμενο Κέρδος (ευρώ/στρέμμα)
Σιτάρι	90	120
Κριθάρι	80	85
Σόγια	120	150
Λαχανικά	250	300

Με βάση τα παραπάνω η επιχείρηση θέλει να προσδιορίσει πόση έκταση θα πρέπει να καλλιεργηθεί με κάθε τύπο προϊόντος, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό αναμενόμενο κέρδος.

Να διατυπωθεί ένα κατάλληλο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα (**1 μονάδα**), εξηγώντας με σαφήνεια τις μεταβλητές απόφασης, την αντικειμενική συνάρτηση και το φυσικό νόημα των περιορισμών του (**0.5 μονάδες**).

[Σημείωση: Διατυπώστε το μοντέλο, αλλά μην προχωρήσετε σε επίλυση.]

ΘΕΜΑ 2 (5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (1.5 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$

- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x)$. (**0.5 μονάδες**)
- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \left(f^2(x) - \frac{1}{x} \right) dx$. (**1 μονάδα**)

Ερώτημα Β (2 μονάδες)

Ο χρόνος σε λεπτά που χρειάζεται ένα ασθενοφόρο για να φτάσει από ένα γηροκομείο σε ένα νοσοκομείο για τη διακομιδή ασθενούς, ακολουθώντας κάθε φορά την ίδια διαδρομή, ακολουθεί κανονική κατανομή με άγνωστη τυπική απόκλιση. Σε μια μελέτη που εκπόνησε το γηροκομείο προκειμένου να βελτιστοποιήσει τον χρόνο διακομιδής, καταγράφηκε ο χρόνος $X_i, i = 1, \dots, 41$, σε λεπτά, τον οποίο χρειάστηκε το ασθενοφόρο για τη μεταφορά ασθενών από το γηροκομείο, σε ισάριθμες διακομιδές. Με βάση τις 41 παρατηρήσεις $X_i, i = 1, \dots, 41$, υπολογίστηκε ότι $\sum_{i=1}^{41} X_i = 1426$, $\sum_{i=1}^{41} X_i^2 = 50124$.

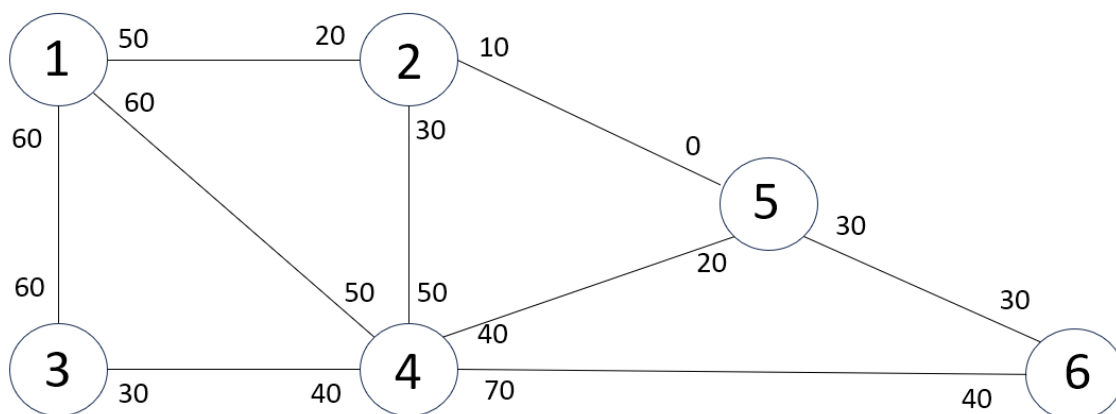
- Να υπολογιστεί η μέση τιμή, η διακύμανση, η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής μεταβλητότητας των δεδομένων αυτών που αφορούν τον χρόνο που χρειάστηκε το ασθενοφόρο για τις 41 διακομιδές ασθενών. (**0.8 μονάδες**)
- Να ερμηνευτούν οι τιμές που θα βρεθούν για τη μέση τιμή και τον συντελεστή μεταβλητότητας. (**0.4 μονάδες**)
- Να προσδιορισθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τον πραγματικό μέσο χρόνο που απαιτείται για τη διακομιδή ασθενούς από το γηροκομείο στο νοσοκομείο και να ερμηνευτεί το διάστημα που θα βρεθεί. (**0.8 μονάδες**)

[Υπόδειξη: Όπου χρειαστεί να κάνετε στρογγυλοποίηση κατά τους υπολογισμούς σας, διατηρήστε δύο (2) δεκαδικά ψηφία.]

Ερώτημα Γ (1.5 μονάδες)

Ένας ορεινός δήμος έχει κατασκευάσει ένα δίκτυο μεταφοράς νερού από μια φυσική πηγή σε μια τελική δεξαμενή στην πόλη. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η μορφή του δικτύου ύδρευσης, όπου η πηγή του νερού βρίσκεται στην κορυφή 1 και η τελική δεξαμενή συγκέντρωσης στην κορυφή 6, ενώ οι ενδιάμεσες κορυφές αντιστοιχούν σε κόμβους του δικτύου, όπου με κατάλληλες αντλίες και βαλβίδες διοχετεύεται το νερό προς κάθε κατεύθυνση. Οι ακμές αντιστοιχούν σε αγωγούς μεταφοράς νερού και σε κάθε ακμή δίνεται η δυναμικότητα ροής (μέγιστος ρυθμός μεταφοράς) σε κυβικά μέτρα (κ.μ.) ανά ώρα, προς κάθε κατεύθυνση. Για παράδειγμα, η μέγιστη ποσότητα νερού που μπορεί να μεταφερθεί από την κορυφή 2 στην κορυφή 4 είναι 30 κ.μ. ανά ώρα, ενώ στην αντίθετη κατεύθυνση από 4 προς 2 είναι 50 κ.μ. ανά ώρα.

Να προσδιοριστεί η μέγιστη δυνατή ποσότητα νερού που μπορεί να μεταφερθεί ανά ώρα από την πηγή προς τη δεξαμενή, χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο αλγόριθμο δικτυωτής ανάλυσης.



[Υπόδειξη: Κατά την επίλυση δεν απαιτείται να κατασκευαστεί σχήμα. Αρκεί να περιγραφούν με σαφήνεια τα βήματα του αλγορίθμου που ακολουθήθηκαν.]

ΘΕΜΑ 3 (5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (1.5 μονάδες)

- Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας:
 - Η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$ και $B(-2,-3)$. **(0.4 μονάδες)**
 - Η οποία διέρχεται από το σημείο $\Gamma(3,4)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x + 2$. **(0.5 μονάδες)**
- Να βρεθεί η παράγωγος, ως προς το x , της συνάρτησης $f(x) = \frac{5x^3}{9-x}$ όπου $x \neq 9$. **(0.6 μονάδες)**

Ερώτημα Β (1.5 μονάδες)

Σε μια εκδρομή συμμετέχουν 20 άνδρες και 30 γυναίκες. Δέκα από τους άνδρες και 20 από τις γυναίκες είναι πτυχιούχοι/ες. Το τουριστικό γραφείο που οργανώνει την εκδρομή επιλέγει στην τύχη ένα από τα άτομα που συμμετέχουν στην εκδρομή για να του προσφέρει ένα δώρο.

- Ποια είναι η πιθανότητα το άτομο αυτό να είναι άνδρας; **(0.5 μονάδες)**
- Ποια είναι η πιθανότητα το άτομο αυτό να έχει πτυχίο; **(0.5 μονάδες)**
- Αν είναι γνωστό ότι το άτομο που επιλέχτηκε έχει πτυχίο, ποια είναι η πιθανότητα να είναι γυναίκα; **(0.5 μονάδες)**

Ερώτημα Γ (2 μονάδες)

Δυο εταιρείες απορρυπαντικών ετοιμάζονται να λανσάρουν μια προωθητική προσφορά με σκοπό την αύξηση των πωλήσεών τους. Η εταιρεία Α έχει να επιλέξει μεταξύ των προσφορών Α1, Α2 και Α3, ενώ η Β έχει να επιλέξει μεταξύ των προσφορών Β1, Β2 και Β3. Οι επιλογές των προσφορών που θα λανσάρουν οι δυο εταιρείες γίνονται ταυτόχρονα χωρίς να έχει γνώση η ανταγωνίστρια εταιρεία πριν αυτό πραγματοποιηθεί. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την επίδραση που θα έχει στο μερίδιο της αγοράς που κατέχει η εταιρεία Α, κάθε συνδυασμός προωθητικών προσφορών των δυο εταιρειών. Θεωρούμε ότι το μερίδιο της αγοράς που μειώνεται ή αυξάνεται για την Α συνεπάγεται ισόποση αύξηση ή μείωση για τη Β, αντίστοιχα.

		B		
		B1	B2	B3
A	A1	2%	4%	-4%
	A2	-5%	1%	-6%
	A3	4%	-7%	2%

Για παράδειγμα, εάν η εταιρεία Α επιλέξει τη στρατηγική Α1 και η εταιρεία Β επιλέξει τη Β1, τότε η Α θα αποσπάσει ένα 2% της συνολικής αγοράς απορρυπαντικών το οποίο θα χάσει η Β. Ενώ αν η Α επιλέξει την Α2 και η Β τη Β1, τότε η Α θα χάσει ένα 5% της συνολικής αγοράς απορρυπαντικών το οποίο θα κερδίσει η Β.

- Να εφαρμοστεί το κριτήριο maximin/minimax για να βρεθεί αν υπάρχει το σημείο ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές στο παραπάνω παίγνιο. **(0.5 μονάδες)**
- Να εντοπιστούν τυχόν υποδεέστερες στρατηγικές. Αν υπάρχουν, να διαγραφούν και να σχηματιστεί ο νέος πίνακας πληρωμών. **(0.5 μονάδες)**
- Να εφαρμοστεί η κατάλληλη μεθοδολογία, στον πίνακα πληρωμών που προέκυψε από το ερώτημα ii, ώστε να βρεθεί η μεικτή στρατηγική που πρέπει να ακολουθήσει η κάθε εταιρεία και να υπολογιστεί η αναμενόμενη τιμή του παιγνίου. **(1 μονάδα)**

[Υπόδειξη: Όπου χρειαστεί να κάνετε στρογγυλοποίηση κατά τους υπολογισμούς σας, διατηρήστε δύο (2) δεκαδικά ψηφία.]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΘΕΜΑ 1 (5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (2 μονάδες)

Α.ι (1 μονάδα)

Η συνάρτηση εσόδων δίνεται από τον τύπο:

$$TR(Q) = \int MR(Q)dQ$$

Άρα έχουμε

$$TR(Q) = \int (60 - 0.5Q)dQ = 60Q - 0.25Q^2 + c, c \in \mathbb{R}$$

Τα έσοδα της επιχείρησης προέρχονται μόνο από τις πωλήσεις άρα $TR(0) = 0$, οπότε $60 \cdot 0 - 0.25 \cdot 0 + c = 0$, άρα $c = 0$ και επομένως $TR(Q) = 60Q - 0.25Q^2$.

Η συνάρτηση κόστους δίνεται από τον τύπο:

$$TC(Q) = \int MC(Q)dQ$$

Άρα έχουμε

$$TC(Q) = \int 10dQ = 10Q + c, c \in \mathbb{R}$$

Το σταθερό κόστος της επιχείρησης είναι 250 χρηματικές μονάδες άρα $TC(0) = 250$, οπότε $10 \cdot 0 + c = 250$, άρα $c = 250$ και επομένως $TC(Q) = 250 + 10Q$.

Α.ii (1 μονάδα)

Η συνάρτηση κέρδους Π δίνεται από τη σχέση $\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$, άρα θα είναι:

$$\Pi(Q) = 60Q - 0.25Q^2 - (250 + 10Q) = -0.25Q^2 + 50Q - 250$$

Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση κέρδους $\Pi(Q) = -0.25Q^2 + 50Q - 250$ και έχουμε

$$\Pi'(Q) = (-0.25Q^2 + 50Q - 250)' = -0.5Q + 50$$

Μηδενίζοντας την παράγωγο της συνάρτησης κέρδους προκύπτει ότι

$$\Pi'(Q) = -0.5Q + 50 = 0 \Rightarrow Q = 100$$

κι επειδή $\Pi''(Q) = -0.5 < 0$ για κάθε τιμή Q , το σημείο $Q = 100$ αποτελεί σημείο ολικού μεγίστου της συνάρτησης Π .

Άρα για $Q = 100$, η συνάρτηση κέρδους έχει μέγιστο ίσο με

$$\Pi(100) = -0.25 \cdot 100^2 + 50 \cdot 100 - 250 = 2250$$

Ερώτημα Β (1.5 μονάδες)

Έστω X η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που εκφράζει το απόθεμα ενός συνταξιοδοτικού λογαριασμού. Αυτή η τ.μ. ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 2000$ χ.μ. και τυπική απόκλιση $\sigma = 200$ χ.μ.

B.i (0.7 μονάδες)

Για να πάρει ένας πελάτης καταναλωτικό δάνειο, θα πρέπει το απόθεμα του συνταξιοδοτικού λογαριασμού του να είναι μεγαλύτερο από 2400 χ.μ.. Άρα πρέπει να βρούμε την πιθανότητα:

$$P(X > 2400) = 1 - P(X \leq 2400) = 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{2400 - 2000}{200}\right) = 1 - P(Z \leq 2) \\ = 1 - 0,9772 = 0,0228.$$

B.ii (0.8 μονάδες)

Έστω Y η τ.μ. που παριστά το πλήθος των συνταξιοδοτικών λογαριασμών που έχουν την δυνατότητα να πάρουν δάνειο. Τότε, η Y θα ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή $Y \sim b(n = 5, p = 0,0228)$ και η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0,0228^0 0,9772^5 = 1 - 0,9772^5 = 1 - 0,8911 = 0,1089$$

Ερώτημα Γ (1.5 μονάδες)

Ορίζουμε τις εξής μεταβλητές που παριστάνουν την έκταση σε στρέμματα η οποία θα καλλιεργηθεί με κάθε ένα προϊόν: X_1 = έκταση καλλιέργειας σιταριού, X_2 = έκταση καλλιέργειας κριθαριού, X_3 = έκταση καλλιέργειας σόγιας και X_4 = έκταση καλλιέργειας λαχανικών. Με βάση τα στοιχεία του προβλήματος, η αντικειμενική συνάρτηση Z (που εκφράζει το συνολικό ετήσιο κέρδος της επιχείρησης) και οι περιορισμοί μπορούν να διατυπωθούν μαθηματικά ως εξής:

$\text{Max } Z = 120 X_1 + 85 X_2 + 150 X_3 + 300 X_4$
με περιορισμούς:

- | | |
|--|--|
| 1. $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 100$ | (C1) (Η συνολική έκταση που θα καλλιεργηθεί δεν μπορεί να υπερβαίνει τα 100 στρέμματα) |
| 2. $90 X_1 + 80 X_2 + 120 X_3 + 150 X_4 \leq 12.000$ | (C2) (ανάλογος περιορισμός για την απαιτούμενη ποσότητα νερού) |
| 3. $X_4 \leq 0,5 (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$ | (C3) (περιορισμός για το μέγιστο ποσοστό έκτασης λαχανικών) |
| 4. $X_1 \geq 0,3 (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$ | (C4) (αντίστοιχος περιορισμός για το ελάχιστο ποσοστό έκτασης σιταριού) |

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

ΘΕΜΑ 2 (5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (1.5 μονάδες)

A.i (0.5 μονάδες)

Για να ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$, θα πρέπει $-x^2 + x + 2 \geq 0$.

Το τριώνυμο $-x^2 + x + 2$ έχει ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

και επομένως είναι θετικό, δηλαδή ετερόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου του (δηλαδή του -1) εντός των ριζών αυτών, δηλαδή, στο διάστημα $[-1, 2]$.

Άρα, πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$ είναι το διάστημα $[-1, 2]$.

A.ii (1 μονάδα)

$$\begin{aligned} \int \left(f^2(x) - \frac{1}{x} \right) dx &= \int \left((\sqrt{-x^2 + x + 2})^2 - \frac{1}{x} \right) dx = \int \left(-x^2 + x + 2 - \frac{1}{x} \right) dx = \\ &= - \int x^2 dx + \int x dx + \int 2 dx - \int \frac{1}{x} dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \ln|x| + c. \end{aligned}$$

Ερώτημα Β (2 μονάδες)

B.i (0.8 μονάδες)

Τα ζητούμενα μεγέθη είναι:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{1426}{41} = 34,78. \\ S^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1} = \frac{50124 - 41 \times 34,78^2}{41-1} = \frac{50124 - 49595,58}{40} = \frac{528,42}{40} = 13,21. \end{aligned}$$

Ή εναλλακτικά

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n-1} - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n(n-1)} = 13,18$$

$$S = +\sqrt{S^2} = +\sqrt{13,21} = 3,63.$$

Ή εναλλακτικά

$$S = +\sqrt{S^2} = +\sqrt{13,18} = 3,63.$$

Άρα

$$CV = \frac{S}{\bar{X}} = \frac{3,63}{34,78} = 0,10.$$

B.ii (0.4 μονάδες)

Η Μέση Τιμή βρέθηκε $\bar{X} = 34,78$. Η τιμή αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως «εκπρόσωπος» κάθε μιας από τις 41 μεμονωμένες τιμές που αφορούν το χρόνο ισάριθμων διακομιδών. Επιπλέον, η τιμή

34,78 δίνει μία ένδειξη της τιμής γύρω από την οποία σωρεύονται τα δεδομένα που αφορούν το χρόνο μεταφοράς των ασθενών από το γηροκομείο στο νοσοκομείο και είναι η πλέον αντιπροσωπευτική τους τιμή.

Ο Συντελεστής Μεταβλητότητας βρέθηκε $CV = 0,10$ ή $CV = 10\%$. Εκτιμά τη διασπορά των δειγματικών τιμών σε σχετικούς όρους. Με βάση την τιμή αυτή μπορούμε να πούμε ότι η σχετική ανομοιογένεια των χρόνων διακομιδής των ασθενών είναι της τάξης του 10%.

B.iii (0.8 μονάδες)

Αν μ είναι ο μέσος χρόνος που απαιτείται για τη διακομιδή οποιουδήποτε ασθενή από το γηροκομείο στο νοσοκομείο, τότε ένας εκτιμητής του άγνωστου μ είναι η αντίστοιχη δειγματική μέση τιμή που βρέθηκε να είναι $\bar{X} = 34,78$.

Επειδή η διακύμανση σ^2 του πληθυσμού είναι άγνωστη, ένα $(1 - \alpha)100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ του πληθυσμού είναι

$$\bar{X} \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} S_{\bar{X}}, \quad \text{με } S_{\bar{X}} = S/\sqrt{n}.$$

Από προηγούμενους υπολογισμούς έχουμε,

$$\bar{X} = 34,78, \quad S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{41}} = \frac{3,63}{6,40} = 0,57,$$

ενώ από τους πίνακες της t -κατανομής, για $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05$,

$$t_{n-1, 1-\alpha/2} = t_{40, 0,975} = 2,021.$$

Άρα το 95% διάστημα εμπιστοσύνης υπολογίζεται,

$$34,78 \pm 2,021 \times 0,57, \quad \text{ή } (33,63, 35,93).$$

Ερμηνεία: Ο πραγματικός μέσος χρόνος διακομιδής οποιουδήποτε ασθενή από το γηροκομείο στο νοσοκομείο κυμαίνεται μεταξύ 33,63 και 35,93 λεπτών, με 95% επίπεδο εμπιστοσύνης.

Ερώτημα Γ (1.5 μονάδες)

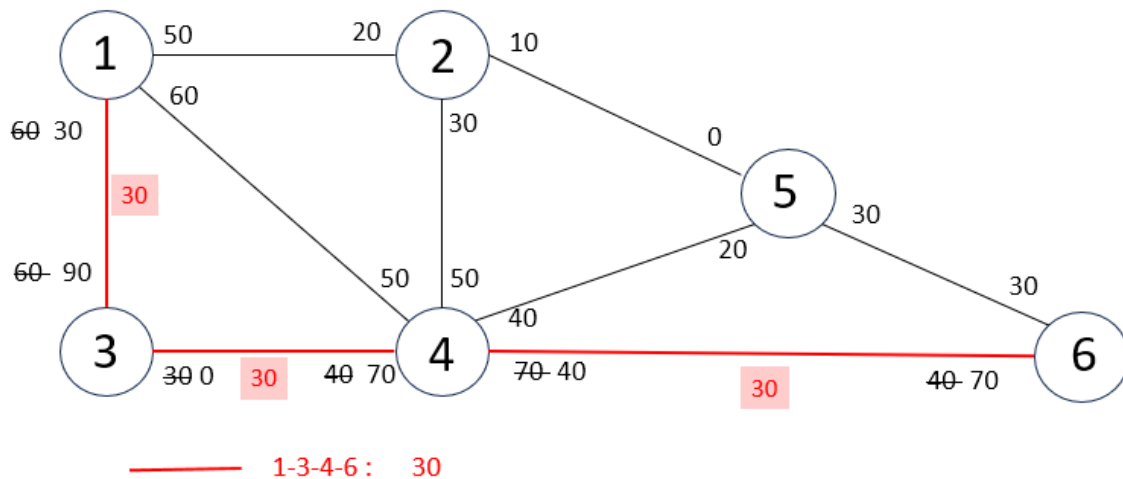
Πρόκειται για ένα πρόβλημα μέγιστης ροής. Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο και έχουμε τις παρακάτω επαναλήψεις:

1^η επανάληψη:

Επιλέγουμε το μονοπάτι 1-3-4-6. Η μέγιστη ροή που μπορεί να περάσει από αυτό είναι

$$\min(1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 6) = \min(60, 30, 70) = 30.$$

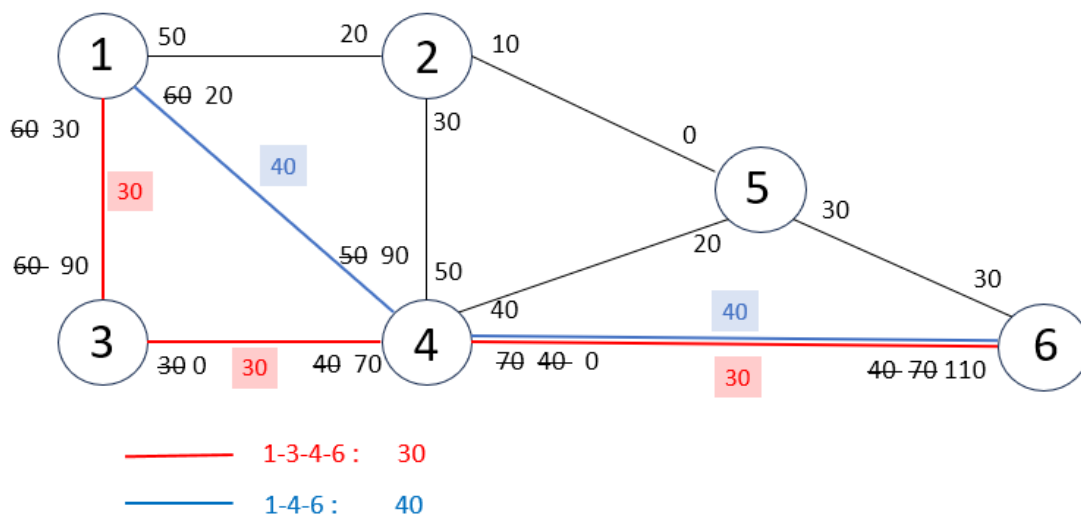
Αναπροσαρμόζουμε τις δυναμικότητες των ακμών που περιέχονται στο παραπάνω μονοπάτι. Αφαιρούμε τη ροή 30 από την κατεύθυνση κάθε ακμής που αντιστοιχεί στην κατεύθυνση του μονοπατιού και την προσθέτουμε στην αντίθετη κατεύθυνση. Μετά από αυτή τη μεταβολή το δίκτυο αναπροσαρμόζεται ως εξής:



2^η επανάληψη:

Επιλέγουμε το μονοπάτι 1-4-6. Η μέγιστη ροή που μπορεί να περάσει από αυτό είναι $\min(1 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 6) = \min(60, 40) = 40$.

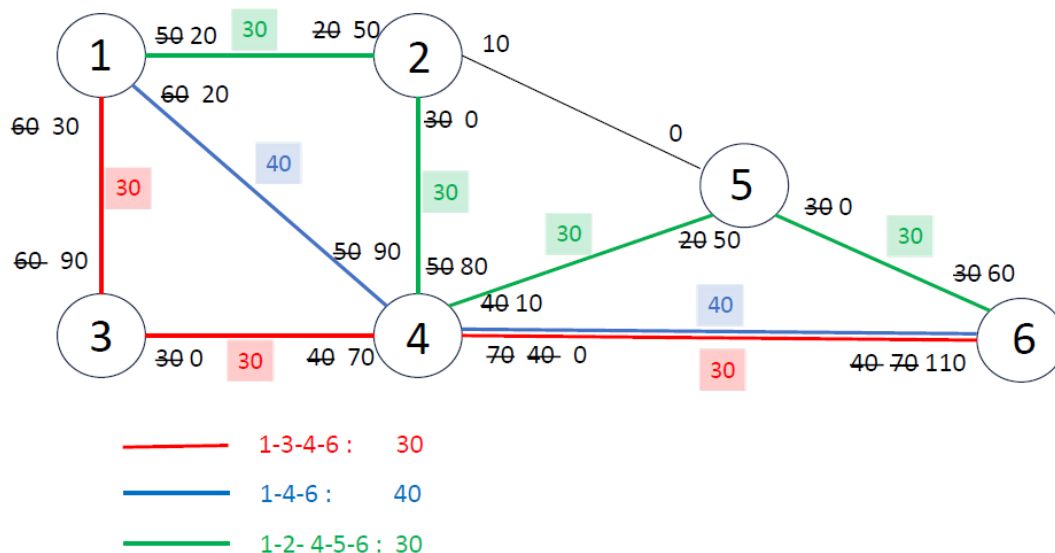
Αναπροσαρμόζουμε τις δυναμικότητες των ακμών που περιέχονται στο παραπάνω μονοπάτι. Αφαιρούμε τη ροή 40 από την κατεύθυνση κάθε ακμής που αντιστοιχεί στην κατεύθυνση του μονοπατιού και την προσθέτουμε στην αντίθετη κατεύθυνση. Μετά από αυτή τη μεταβολή το δίκτυο αναπροσαρμόζεται ως εξής:



3^η επανάληψη:

Επιλέγουμε το μονοπάτι 1-2-4-5-6. Η μέγιστη ροή που μπορεί να περάσει από αυτό είναι $\min(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 6) = \min(50, 30, 40, 30) = 30$.

Αναπροσαρμόζουμε τις δυναμικότητες των ακμών που περιέχονται στο παραπάνω μονοπάτι. Αφαιρούμε τη ροή 30 από την κατεύθυνση κάθε ακμής που αντιστοιχεί στην κατεύθυνση του μονοπατιού και την προσθέτουμε στην αντίθετη κατεύθυνση. Μετά από αυτή τη μεταβολή το δίκτυο αναπροσαρμόζεται ως εξής:



Μετά και την 3^η επανάληψη βλέπουμε ότι δεν υπάρχει άλλο μονοπάτι από την κορυφή 1 στην κορυφή 6 από το οποίο μπορεί να περάσει θετική ροή. Παρ' όλο που μπορούμε να ελέγξουμε όλα τα δυνατά μονοπάτια, ένας εύκολος τρόπος να το δούμε αυτό είναι από το γεγονός ότι και οι δύο ακμές που οδηγούν στην κορυφή 6, οι 4-6 και 5-6 έχουν μηδενική υπόλοιπη δυναμικότητα στην κατεύθυνση προς 6. Επομένως δεν υπάρχει κανένας τρόπος να εισέλθει επιπλέον ροή στην κορυφή 6.

Επομένως το κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου μέγιστης ροής ικανοποιείται και η βέλτιστη λύση έχει προσδιοριστεί. Με βάση το τελευταίο σχήμα η μέγιστη δυνατή ροή νερού από την κορυφή 1 στην κορυφή 6 είναι 100 κ.μ./ώρα. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα μονοπάτια και οι αντίστοιχες ροές που αποτελούν τη βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Μονοπάτι	Ροή
1-3-4-6	30
1-4-6	40
1-2-4-5-6	30
Σύνολο	100

Σημειώνεται ότι η λύση που βρέθηκε παραπάνω με τα 3 μονοπάτια δεν είναι μοναδική. Υπάρχουν και άλλες λύσεις με διαφορετικά μονοπάτια και επιμέρους ροές, τα οποία δίνουν συνολική ροή ίση με 100. Η ύπαρξη πολλαπλών βέλτιστων λύσεων είναι συνηθισμένο φαινόμενο σε προβλήματα μέγιστης ροής.

Κατά την επίλυση δεν απαιτείται να κατασκευαστεί σχήμα σε κάθε επανάληψη. Αρκεί να δοθούν τα μονοπάτια, οι ροές, και να αναλυθούν με σαφήνεια τα βήματα που ακολουθήθηκαν στο αρχικό σχήμα.

ΘΕΜΑ 3 (5 ΜΟΝΑΔΕΣ)

Ερώτημα Α (1.5 μονάδες)

Α.ι.α (0.4 μονάδες)

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από δυο δεδομένα σημεία δίνεται από τη σχέση $y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Εφαρμόζουμε τη σχέση αυτή για την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$ και $B(-2,-3)$ και έχουμε:

$$y = 1 + \frac{-3 - 1}{-2 - 0}(x - 0) \Rightarrow y = 1 + \frac{-4}{-2}x \Rightarrow y = 2x + 1$$

Α.ι.β (0.5 μονάδες)

Δύο ευθείες είναι παράλληλες όταν έχουν την ίδια κλίση α . Η ευθεία $y = -3x + 2$ έχει κλίση $\alpha = -3$ οπότε την ίδια κλίση θα έχει και η ζητούμενη ευθεία. Επίσης, γνωρίζουμε ότι η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από το σημείο $\Gamma(3,4)$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση $y = y_1 + \alpha(x - x_1)$, για να βρούμε την εξίσωσή της:

$$y = 4 + (-3)(x - 3) \Rightarrow y = 4 - 3x + 9 \Rightarrow y = -3x + 13$$

Α.ii (0.6 μονάδες)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{5x^3}{9-x} \right)' = \frac{(5x^3)'(9-x) - 5x^3(9-x)'}{(9-x)^2} = \frac{15x^2(9-x) - 5x^3(-1)}{(9-x)^2} \\ &= \frac{5x^2(27-2x)}{(9-x)^2} \end{aligned}$$

Ερώτημα Β (1.5 μονάδες)

Έστω τα ενδεχόμενα, $A = \{\text{άνδρας}\}$, $\Gamma = \{\text{γυναίκα}\}$ και $\Pi = \{\text{πτυχιούχος}\}$.

Β.ι (0.5 μονάδες)

Ζητείται η πιθανότητα: $P(A) = \frac{20}{20+30} = \frac{20}{50} = 0,40$.

Β.ii (0.5 μονάδες)

Ζητείται η πιθανότητα: $P(\Pi) = \frac{10+20}{20+30} = \frac{30}{50} = 0,60$.

Β.iii (0.5 μονάδες)

Ζητείται η πιθανότητα: $P(\Gamma|\Pi) = \frac{P(\Gamma \cap \Pi)}{P(\Pi)} = \frac{\frac{20}{20+30}}{0,60} = \frac{0,40}{0,60} = 0,67$

Ερώτημα Γ (2 μονάδες)

Γ.ι (0.5 μονάδες)

Πρόκειται για παίγνιο μηδενικού αθροίσματος αφού το μερίδιο της συνολικής αγοράς που κερδίζει η μια εταιρεία το χάνει η άλλη και αντίστροφα. Δηλαδή, μία θετική μεταβολή στο μερίδιο αγοράς της μιας εταιρείας οδηγεί σε μία ισόποση αρνητική μεταβολή στο μερίδιο της άλλης. Για να δούμε αν το παίγνιο αυτό έχει σημείο ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές, εφαρμόζουμε πρώτα το κριτήριο maximin/minimax.

Αρχικά, βρίσκουμε τα ελάχιστα των γραμμών και τα μέγιστα των στηλών του πίνακα πληρωμών του παιγνίου. Αυτό σημειώνεται κατευθείαν στον παρακάτω πίνακα, όπου έχουμε σημειώσει και τις στρατηγικές maximin και minimax, για τους παίκτες A και B, αντίστοιχα.

		B			Ελάχιστο γραμμής
		B1	B2	B3	
A	A1	2%	4%	-4%	-4% ← max
	A2	-5%	1%	-6%	-6%
	A3	4%	-7%	2%	-7%
Μέγιστο στήλης		4%	4%	2% ← min	-4% ≠ 2%

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα, το maximin (-4%) είναι διαφορετικό από το minimax (2%). Επομένως, το παίγνιο δεν έχει σημείο ισορροπίας που να προσδιορίζεται από την εφαρμογή αμιγών στρατηγικών.

Γ.ii (0.5μονάδες)

Για την εταιρεία A, που εφαρμόζει το κριτήριο maximin, οι πληρωμές της στρατηγικής A2 είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες πληρωμές της στρατηγικής A1. Επομένως, η εταιρεία A ποτέ δεν θα την επιλέξει, δηλαδή η στρατηγική A2 είναι υποδεέστερη της A1 και διαγράφεται από τον πίνακα πληρωμών. Διαγράφοντας τη στρατηγική A2 προκύπτει ο ακόλουθος 2x3 πίνακας πληρωμών:

		B		
		B1	B2	B3
A	A1	2%	4%	-4%
	A3	4%	-7%	2%

Στον νέο πίνακα πληρωμών, βλέπουμε ότι η εταιρεία B, που εφαρμόζει το κριτήριο minimax, έχει μεγαλύτερες πληρωμές χρησιμοποιώντας τη στρατηγική B3 σε σχέση με τη στρατηγική B1. (Στον πίνακα πληρωμών τα στοιχεία της στήλης B1 είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα στοιχεία της στήλης B3, δηλαδή οι πληρωμές της A είναι μεγαλύτερες κάτω από τη B1 και επομένως οι πληρωμές της B είναι μικρότερες κάτω από τη B1 από ότι κάτω από τη B3.) Επομένως η B1 είναι υποδεέστερη της B3 και μπορεί να διαγραφεί, οπότε προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας πληρωμών:

		B	
		B2	B3
A	A1	4%	-4%
	A3	-7%	2%

Δεν υπάρχουν άλλες υποδεέστερες στρατηγικές για τις εταιρείες.

Γ.iii (1 μονάδα)

Από το ερώτημα 2, έχει προκύψει ένας πίνακας πληρωμών 2×2 , ενώ γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές. Θα προσδιορίσουμε τώρα το σημείο ισορροπίας σε μεικτές στρατηγικές. Για το σκοπό αυτό εισάγουμε στον πίνακα την πιθανότητα x , η εταιρεία A να χρησιμοποιήσει τη στρατηγική A1, την συμπληρωματική πιθανότητα $1-x$, η εταιρεία A να χρησιμοποιήσει τη στρατηγική A3, και ανάλογα για την B, τις πιθανότητες y και $1-y$ να χρησιμοποιήσει τις B2 και B3 αντίστοιχα. Έτσι έχουμε τον πίνακα:

		B	
		B2 (y)	B3 (1-y)
A	A1 (x)	4%	-4%
	A3 (1-x)	-7%	2%

Έστω, λοιπόν, ότι η εταιρεία A ακολουθεί τη στρατηγική A1 με πιθανότητα x , και τη στρατηγική A3 με πιθανότητα $1-x$. Τότε οι αναμενόμενες αυξήσεις μεριδίου αγοράς για την εταιρεία A, ως συνάρτηση της πιθανότητας x και των επιλογών στρατηγικής της εταιρείας B, θα έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned}V(A,B2) &= 4x - 7(1-x) = 11x - 7 \\V(A,B3) &= -4x + 2(1-x) = -6x + 2\end{aligned}$$

Επομένως, το σημείο maximin για την εταιρεία A βρίσκεται εξισώνοντας τις ποσότητες $V(A,B2)$ και $V(A,B3)$:

$$V(A,B2) = V(A,B3) \Rightarrow 11x - 7 = -6x + 2 \Rightarrow 17x = 9 \Rightarrow x = 9/17 \approx 0,53.$$

Άρα η εταιρεία A πρέπει να επιλέξει τη στρατηγική A1 με πιθανότητα $9/17$, τη στρατηγική A3 με πιθανότητα $8/17$ (ενώ η στρατηγική A2 δεν πρέπει να ακολουθηθεί ποτέ).

Για την εταιρεία B, έστω η μεικτή στρατηγική που επιλέγει τις B2 και B3 με πιθανότητες y και $1-y$, αντίστοιχα. Τότε, οι αναμενόμενες μειώσεις μεριδίων της αγοράς που θα υποστεί ως συνάρτηση της πιθανότητας y και των επιλογών στρατηγικής της εταιρείας A, θα έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned}V(B,A1) &= 4y - 4(1-y) = 8y - 4 \\V(B,A3) &= -7y + 2(1-y) = -9y + 2\end{aligned}$$

Επομένως, για να βρεθεί το σημείο minimax για την εταιρεία B, αρκεί να εξισωθούν οι παραπάνω αναμενόμενες μειώσεις:

$$V(B,A1) = V(B,A3) \Rightarrow 8y - 4 = -9y + 2 \Rightarrow 17y = 6 \Rightarrow y = 6/17 \approx 0,35.$$

Άρα, η εταιρεία B, για να ελαχιστοποιήσει την αναμενόμενη μείωση του μεριδίου της αγοράς που θα υποστεί θα πρέπει να υιοθετήσει τη στρατηγική B2 με πιθανότητα $6/17$ και τη στρατηγική B3 με πιθανότητα $11/17$ (ενώ η στρατηγική B1 δεν θα πρέπει να ακολουθηθεί ποτέ).

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

- Άριστη μεικτή στρατηγική για την εταιρεία A: $(9/17, 0, 8/17)$
- Άριστη μεικτή στρατηγική για την εταιρεία B: $(0, 6/17, 11/17)$

Τέλος, για να βρούμε την τιμή του παιγνίου, αντικαθιστούμε την πιθανότητα x , που υπολογίστηκε παραπάνω στο ερώτημα 3, σε οποιοδήποτε από τα προσδοκώμενα κέρδη $V(A,B2)$ ή $V(A,B3)$ της εταιρείας A , είτε την πιθανότητα y , που επίσης υπολογίστηκε παραπάνω, σε οποιαδήποτε από τις προσδοκώμενες ζημίες $V(B,A1)$, $V(B,A3)$ της εταιρείας B . Επιλέγοντας το $V(A,B2)$, έχουμε:

$$V = V(A,B2) = 11 \cdot 9/17 - 7 = -20/17 = -1,18.$$