ΘΕΜΑΤΑ ΦΥΕ -40
Θέματα Ενδιάμεσης-Δοκιμαστικά 2023

Επιμέλεια : Β. Καράβολας

1 Θέμα Πρώτο

1.1 Εκφώνηση

Κβαντικό σύστημα βρίσκεται σε υπέρθεση καταστάσεων που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_2)$$

όπου ψ_1, ψ_2 ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας με ιδιοτιμές E_1, E_2 αντίστοιχα. Ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές για μια μέτρηση της τιμής της ενέργειας του συστήματος;

1. Υπάρχει περίπτωση να βρούμε είτε την τιμή E_1 είτε την τιμή E_2.
2. Θα βρούμε την τιμή $\frac{E_1 + E_2}{2}$
3. Θα βρούμε την τιμή $\frac{E_1 - E_2}{2}$
4. Θα βρούμε την τιμή $\frac{E_1^2 + E_2^2}{2}$
5. Θα βρούμε την τιμή $\frac{E_1^2 - E_2^2}{2}$

1.2 Λύση

Έχουμε ότι η κυματοσυνάρτηση του συστήματος είναι ένας γραμμικός συνδυασμός ιδιοσυναρτήσεων.

$$\begin{bmatrix} \psi = \sum_{i=1}^{2} c_i \psi_i \\ \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_2) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση ιδιοτιμών της ενέργειας είναι:

$$\hat{H}\psi_i = E_i \psi_i$$

Επομένως αν μετρήσουμε την ενέργεια θα βρούμε μια τιμή από τις δύο ιδιοτιμές των δύο ιδιοσυναρτήσεων που εμφανίζονται στον γραμμικό συνδυασμό που ακφράζει την κυματοσυνάρτηση.

Επομένως σωστή απάντηση είναι η (α)

Αν αντίθετα μας ζητούσε τη μέση ενέργεια τότε και με τη χρήση της ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων θα είχαμε ότι:

$$\left[\begin{array}{c} <E>=<\psi|\hat{H}|\psi> \\ \\ \hat{H}\psi_i = E_i\psi_i \\ \\ \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_2) \\ c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ <\psi_n|\psi_m>= \begin{cases} 1 & n=m \\ \\ 0 & n \neq m \end{cases} \end{array}\right] \Longleftrightarrow <E>=\sum_{i=1}^{2} c_i c_i^* E_i = \frac{E_1+E_2}{2}$$

Βλέπουμε ότι το αρνητικό πρόσημο που εμφανίζεται στον γραμμικό συνδυασμό των ιδιοσυναρτήσεων δεν εμφανίζεται στην τιμή της μέσης ενέργειας (και προφανώς και ούτε και στην μέση τιμή του τετραγώνου της ενέργειας).

2 Θέμα Δεύτερο

2.1 Εκφώνηση

Με ποιο από τα παρακάτω ισούται ο μεταθέτης $[\hat{x}^2, \hat{p}]$.

1. $2i\hbar\hat{x}$.

2. $-2i\hbar\hat{x}$

3. $2i\hbar\hat{p}$

4. $-2i\hbar\hat{p}$

5. $2i\hbar$

2.2 Λύση

Θα υπολογίσουμε τον μεταθέτη (προφανώς εννοούμε την x συνιστώσα της ορμής, γιατί ο μεταθέτης με τις υπόλοιπες συνιστώσες της ορμής είναι μηδενικός) :

$$\begin{bmatrix} M_1 = [\hat{x}^2, \hat{p}] \\ \\ [\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \\ \\ [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow M_1 = [\hat{x}\hat{x}, \hat{p}] \Longleftrightarrow$$

$$M_1 = \hat{x}[\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{x} = 2i\hbar\hat{x}$$

Επομένως σωστή απάντηση είναι η (α)

3 Θέμα Τρίτο

3.1 Εκφώνηση

Σωματίδιο μάζας m το οποίο βρίσκεται σε μονοδιάστατο πηγάδι το οποίο εκτείνεται στην περιοχή $-L < x < L$ περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi = C(\psi_1 + i\psi_2 + (1-i)\psi_3)$ όπου $\psi_n, n = 1, 2, ...$ η ιδιοσυνάρτηση με ιδιοτιμή E_n. Ποια η μέση τιμή της πάριτη;

1. $\frac{1}{2}$.
2. $+1$.
3. -1.
4. 0
5. $-\frac{1}{2}$

3.2 Λύση

Έχουμε ότι η κυματοσυνάρτηση του συστήματος είναι ένας γραμμικός συνδυασμός ιδιοσυναρτήσεων).

$$\begin{bmatrix} \psi = \sum_{i=1}^{3} c_i \psi_i \\ \\ \psi = C(\psi_1 + i\psi_2 + (1-i)\psi_3) \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} c_1 = C \\ \\ c_2 = Ci \\ \\ c_3 = C(1-i) \end{bmatrix}$$

Επομένως και με τη χρήση της ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων έχουμε για το C από την κανονικοποίηση:

$$\begin{bmatrix} <\psi|\psi>=1 \\ C(\psi_1+i\psi_2+(1-i)\psi_3) \\ c_1=C \\ c_2=Ci \\ c_3=C(1-i) \\ <\psi_n|\psi_m>=\begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow 1=\sum c_i c_i^* \Longleftrightarrow C^2(1+i(-i)+(1-i)(1+i))=1 \Longleftrightarrow$$

$$1=4C^2 \Longleftrightarrow C=\frac{1}{2}$$

Η εξίσωση ιδιοτιμών της πάριτυ είναι:

$$\hat{P}\psi_i=\pm\psi_i$$

Όπου η θετική ιδιοτιμή είναι για τις άρτιες ιδιοσυναρτήσεις (αυτές δηλαδή που έχουν περιττό $i=1,3,5,...$ ενώ η αρνητική ιδιοτιμή είναι για τις περιττές ιδιοσυναρτήσεις (αυτές δηλαδή που έχουν άρτιο $i=2,4,6,...$)

Επομένως και με τη χρήση της ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} <P>=<\psi|\hat{P}|\psi> \\ \hat{P}\psi_1 = \psi_1 \\ \hat{P}\psi_2 = -\psi_2 \\ \hat{P}\psi_3 = \psi_3 \\ \hat{H}\psi_i = E_i\psi_i \\ C(\psi_1 + i\psi_2 + (1-i)\psi_3) \\ c_1 = C \\ c_2 = Ci \\ c_3 = C(1-i) \\ C = \frac{1}{2} \\ <\psi_n|\psi_m>=\begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow <P>=\sum c_i c_i^* \lambda_i = \frac{1-1+2}{4} = \frac{1}{2}$$

Επομένως σωστή απάντηση είναι η (α)

4 Θέμα Τέταρτο

4.1 Εκφώνηση

Ηλεκτρόνιο σε άτομο του υδρογόνου βρίσκεται στην κατάσταση:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}[\psi_{3,2,1} + i\sqrt{2}\psi_{2,1,-1}]$$

Η μέση τιμή μετρήσεων της z συνιστώσας της στροφορμής είναι:

1. $\frac{-\hbar}{2}$.

2. $\frac{-\hbar}{3}$.

3. $\frac{\hbar}{2}$.

4. $\frac{-2}{3}$

5. 0

4.2 Λύση

Έχουμε ότι η κυματοσυνάρτηση του συστήματος είναι ένας γραμμικός συνδυασμός ιδιοσυναρτήσεων).

$$\begin{bmatrix} \psi(r,\theta,\phi) = \sum_{i=1}^{2} c_i \Psi_i \\ \psi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{3}}[\psi_{3,2,1} + i\sqrt{2}\psi_{2,1,-1}] \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \psi(r,\theta,\phi) = \sum_{i=1}^{2} c_i \Psi_i \\ \psi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{3}}[\psi_{3,2,1} + i\sqrt{2}\psi_{2,1,-1}] \\ \Psi_1 = \psi_{3,2,1} \\ \Psi_2 = \psi_{2,1,-1} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ c_2 = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση ιδιοτιμών της z συνιστώσας της στροφορμής είναι:

$$\hat{L}_z \psi_{n,l,m_l} = m_l \hbar \psi_{n,l,m_l}$$

Επομένως και με τη χρήση της ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} <L_z>=<\psi|\hat{L}_z|\psi> \\ \\ \hat{L}_z\psi_i = m_l\psi_i \\ \\ \psi(r,\theta,\phi) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}[\psi_{3,2,1} + i\sqrt{2}\psi_{2,1,-1}] \\ \\ <\psi_{nlm}|\psi_{n'l'm'}>=\delta_{mm'}\delta_{nn'}\delta_{ll'} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$<L_z>=<\psi|\frac{1}{\sqrt{3}}[\hat{L}_z\psi_{3,2,1} + i\sqrt{2}\hat{L}_z\psi_{2,1,-1}] =<\psi|\frac{1}{\sqrt{3}}[\hbar\psi_{3,2,1} + i\sqrt{2}(-\hbar)\psi_{2,1,-1}] \Longleftrightarrow$$

$$<L_z>=\frac{\hbar}{3}<\psi_{3,2,1} - i\sqrt{2}\psi_{2,1,-1}|\psi_{3,2,1} - i\sqrt{2}\psi_{2,1,-1}>\Longleftrightarrow$$

$$<L_z>=\frac{\hbar}{3}[<\psi_{3,2,1}|\psi_{3,2,1}> - i\sqrt{2}<\psi_{3,2,1}|\psi_{2,1,-1}> -$$

$$i\sqrt{2}<\psi_{2,1,-1}|\psi_{3,2,1}> + (-i\sqrt{2})(-i\sqrt{2})<\psi_{2,1,-1}|\psi_{2,1,-1}>] \Longleftrightarrow$$

$$<L_z>=\frac{\hbar}{3}[1-2] = -\frac{\hbar}{3}$$

Επομένως σωστή απάντηση είναι η (β)

5 Θέμα Πέμπτο

5.1 Εκφώνηση

Ένα σύστημα αποτελούμενο από δύο φερμιόνια με σπιν 1/2 βρίσκεται σε κατάσταση με καθορισμένο σπιν $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ μέτρου $S = \hbar\sqrt{2}$. Έστω ω η γωνία των δύο διανυσμάτων σπιν των δύο φερμιονίων. Το $\cos\omega$ ισούται με:

1. 0.
2. $\frac{1}{6}$.
3. $\frac{1}{3}$.
4. $\frac{2}{3}$
5. -1

5.2 Λύση

Θα έχουμε για το ολικό σπιν:

$$\begin{bmatrix} \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \\ \\ S = \hbar\sqrt{2} \\ \\ S_1^2 = S_2^2 = \hbar^2 s(s+1) \\ \\ s = \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \\ \\ S^2 = 2\hbar^2 \\ \\ S_1^2 = S_2^2 = \dfrac{3}{4}\hbar^2 \end{bmatrix}$$

Θα έχουμε όμως:

$$\begin{bmatrix} S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \\ \\ S^2 = 2\hbar^2 \\ \\ S_1^2 = S_2^2 = \dfrac{3}{4}\hbar^2 \\ \\ \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = |S_1| \cdot |S_2| \cos\omega \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \cos\omega = \frac{S^2 - 2S_1^2}{2S_1^2} \Longleftrightarrow$$

$$\cos\omega = \frac{2\hbar^2 - \dfrac{6}{4}\hbar^2}{2\dfrac{3}{4}\hbar^2} = \frac{0.5}{1.5} = \frac{1}{3}$$

Επομένως σωστή απάντηση είναι η (γ).