

Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Ορισμός: Τετραγωνική ρίζα

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού a συμβολίζεται με $\sqrt{a}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που το τετράγωνό του είναι ίσο με a .

Δηλαδή, για $a \geq 0$,

$$x = \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a \quad \text{και} \quad x \geq 0.$$

Με άλλα λόγια, η $\sqrt{a}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = a$.

Για παράδειγμα, $\sqrt{9} = 3$, διότι $3^2 = 9$.

☞ Η υπόρριξη ποσότητα, δηλαδή η ποσότητα που βρίσκεται μέσα στη ρίζα, πρέπει πάντα να είναι μη αρνητικός αριθμός.

Επίσης, η τετραγωνική ρίζα ενός (μη αρνητικού) αριθμού είναι και αυτή μη αρνητικός αριθμός. Δηλαδή,

$$\sqrt{a} \geq 0, \quad \text{για κάθε } a \geq 0.$$

Ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας

- $\sqrt{a^2} = |a|$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
- $\sqrt{a^2} = a$ για κάθε $a \geq 0$.
- $\sqrt{a \cdot \beta} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta}$ για κάθε $a, \beta \geq 0$.
- $\sqrt{\frac{a}{\beta}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}}$ για κάθε $a \geq 0$ και $\beta > 0$.

☞ Γενικότερα, για $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ και $a \geq 0$,

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt{a_n} \quad \text{και} \quad \sqrt{a^n} = \sqrt[n]{a}$$

Επιπλέον, για $a, \beta \geq 0$,

$$a < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} < \sqrt{\beta}.$$

Η ιδιότητα $\sqrt{a^2} = |a|$

Η ιδιότητα $\sqrt{a^2} = |a|$ είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό αριθμητικών ή αλγεβρικών παραστάσεων. Πρέπει όμως να προσέχουμε το εξής:

«Η τετραγωνική ρίζα απαλείφει το τετράγωνο, όμως εμφανίζεται η απόλυτη τιμή».

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Αν το a είναι μη αρνητικό, τότε δεν χρειάζεται να βάλουμε απόλυτη τιμή.

Από την άλλη, στην ιδιότητα $\sqrt{a^2} = |a|$, το a , εφόσον βρίσκεται μέσα στην ρίζα, είναι μη αρνητικός αριθμός και για αυτό δεν χρειάζεται να βάλουμε απόλυτη τιμή.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς ριζικά.

(α) $\sqrt{(-5)^2}$

(β) $\sqrt{(3-\pi)^2}$

(γ) $\sqrt{(x-2)^2}$

Λύση:

(α) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

(β) $\sqrt{(3-\pi)^2} = |3-\pi| = |\pi-3| = \pi-3$ διότι $\pi > 3$ και άρα $\pi-3 > 0$.

(γ) $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$

Η ιδιότητα $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

για να υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα μεγάλων αριθμών ή για να γράψουμε με απλούστερο τρόπο μία παράσταση που έχει ριζικά.

Για να την εφαρμόσουμε, αναλύουμε την υπόρριζη ποσότητα σε γινόμενο παραγόντων κατά τέτοιο τρόπο ώστε ένας τουλάχιστον από τους δύο παράγοντες να είναι τετράγωνος αριθμός ή να γνωρίζουμε την τετραγωνική του ρίζα.

Επίσης, για να υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα ενός δεκαδικού αριθμού, μπορούμε να τον γράψουμε σαν κλάσμα και να εφαρμόσουμε την ιδιότητα

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Τετράγωνοι αριθμοί

Ένας φυσικός αριθμός λέγεται *τετράγωνος* αν μπορεί να γραφεί ως τετράγωνο φυσικού αριθμού. Οι πρώτοι τετράγωνοι αριθμοί είναι

- | | | |
|--------------|----------------|----------------|
| • $1 = 1^2$ | • $64 = 8^2$ | • $225 = 15^2$ |
| • $4 = 2^2$ | • $81 = 9^2$ | • $256 = 16^2$ |
| • $9 = 3^2$ | • $100 = 10^2$ | • $289 = 17^2$ |
| • $16 = 4^2$ | • $121 = 11^2$ | • $324 = 18^2$ |
| • $25 = 5^2$ | • $144 = 12^2$ | • $361 = 19^2$ |
| • $36 = 6^2$ | • $169 = 13^2$ | • $400 = 20^2$ |
| • $49 = 7^2$ | • $196 = 14^2$ | • $441 = 21^2$ |

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Να γράψετε με απλούστερο τρόπο τις παρακάτω παραστάσεις.

(α) $\sqrt{1600}$

(β) $\sqrt{72}$

(γ) $\sqrt{147}$

(δ) $\sqrt{1,44}$

Λύση:

(α) $\sqrt{1600} = \sqrt{16 \cdot 100} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{100} = 4 \cdot 10 = 40$

(β) $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

(γ) $\sqrt{147} = \sqrt{49 \cdot 3} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

(δ) $\sqrt{1,44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \frac{12}{10} = 1,2$

Παράδειγμα 2: Να γράψετε την ακόλουθη παράσταση χωρίς ριζικά: $\frac{16 \cdot \sqrt{72}}{\sqrt{128}}$.

Λύση:

$$\frac{16 \cdot \sqrt{72}}{\sqrt{128}} = \frac{16 \cdot \sqrt{36 \cdot 2}}{\sqrt{64 \cdot 2}} = \frac{16 \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{64} \cdot \sqrt{2}} = \frac{16 \cdot 6 \cdot \sqrt{2}}{8 \cdot \sqrt{2}} = \frac{16 \cdot 6}{8} = 2 \cdot 6 = 12$$

Συζυγής παράσταση και ρητοποίηση παρονομαστή

Η ταυτότητα

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

είναι πολύ χρήσιμη για παραστάσεις που περιέχουν τετραγωνικές ρίζες.

Για παράδειγμα, εφαρμόζοντας την ταυτότητα αυτή για $\alpha = \sqrt{3}$ και $\beta = \sqrt{5}$ έχουμε

$$(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5}) = \sqrt{3}^2 - \sqrt{5}^2 = 3 - 5 = -2.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα για $\alpha = 3$ και $\beta = \sqrt{7}$ έχουμε

$$(3 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7}) = 3^2 - \sqrt{7}^2 = 9 - 7 = 2.$$

Οι παραστάσεις

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \quad \text{και} \quad \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$$

λέγονται συζυγείς. Λέμε, επίσης, ότι η μία είναι συζυγής παράσταση της άλλης.

Επιπλέον, συζυγείς λέγονται και οι παραστάσεις

$$\alpha + \sqrt{\beta} \quad \text{και} \quad \alpha - \sqrt{\beta}.$$

Για παράδειγμα,

- η συζυγής παράσταση της $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ είναι η $\sqrt{3} - \sqrt{5}$,
- η συζυγής παράσταση της $3 - \sqrt{7}$ είναι η $3 + \sqrt{7}$.

Δηλαδή, αντί για το άθροισμα παίρνουμε τη διαφορά και αντιστρόφως.

Το γινόμενο δύο συζυγών παραστάσεων είναι ρητός αριθμός.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Να γράψετε τις ακόλουθες παραστάσεις χωρίς ριζικά.

$$(α) (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$$

$$(β) (\sqrt{10}+2\sqrt{3})(\sqrt{10}-2\sqrt{3})$$

Λύση:

$$(α) (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = \sqrt{5}^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

$$(β) (\sqrt{10}+2\sqrt{3})(\sqrt{10}-2\sqrt{3}) = \sqrt{10}^2 - (2\sqrt{3})^2 = 10 - 2^2 \cdot \sqrt{3}^2 = 10 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2$$

Παράδειγμα 2: Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}).$$

Λύση:

$$(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}) = \sqrt{x-1}^2 - \sqrt{x+2}^2 = (x-1) - (x+2) = x-1-x-2 = -3$$

Για να μετατρέψουμε ένα κλάσμα σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή.

☞ Αν το κλάσμα είναι της μορφής $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$, τότε πολλαπλασιάζουμε με $\sqrt{\beta}$.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

$$(α) \frac{4}{3-\sqrt{2}}$$

$$(β) \frac{\sqrt{12}+1}{\sqrt{3}}$$

Λύση:

(α) Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή, δηλαδή με $3+\sqrt{2}$.

$$\frac{4}{3-\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot (3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2}) \cdot (3+\sqrt{2})} = \frac{12+4\sqrt{2}}{3^2-\sqrt{2}^2} = \frac{12+4\sqrt{2}}{9-2} = \frac{12+4\sqrt{2}}{7}$$

(β) Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{3}$.

$$\frac{\sqrt{12}+1}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{12}+1) \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{36}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{6+\sqrt{3}}{3}$$

ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Ορισμός: ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α, όπου ν θετικός ακέραιος, συμβολίζεται με $\sqrt[n]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που όταν υψωθεί στη δύναμη ν, δίνει το α.

Δηλαδή, για $\alpha \geq 0$, $x = \sqrt[n]{\alpha} \Leftrightarrow x^n = \alpha \text{ και } x \geq 0$.

Το ν ονομάζεται τάξη της ρίζας.

Με άλλα λόγια, η $\sqrt[n]{\alpha}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = \alpha$.

- Για $\nu = 1$ γράφουμε $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$, δηλαδή η ρίζα πρώτης τάξης ενός αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.
- Για $\nu = 2$ γράφουμε $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$, δηλαδή στην τετραγωνική ρίζα ($\nu = 2$) δεν χρειάζεται να γράψουμε την τάξη.
- Η τρίτη ρίζα ενός αριθμού καλείται και κυβική ρίζα.

Για παράδειγμα, $\sqrt[3]{8} = 2$, διότι $2^3 = 8$. Δηλαδή η κυβική ρίζα του 8 είναι το 2.

Επίσης, $\sqrt[4]{81} = 3$, διότι $3^4 = 81$. Δηλαδή η τέταρτη ρίζα του 81 είναι το 3.

☞ Η υπόρριξη ποσότητα, δηλαδή η ποσότητα που βρίσκεται μέσα στη ρίζα, πρέπει πάντα να είναι μη αρνητικός αριθμός.

Επίσης, η ν-οστή ρίζα ενός (μη αρνητικού) αριθμού είναι και αυτή μη αρνητικός αριθμός.

Δηλαδή,

$$\sqrt[n]{\alpha} \geq 0, \quad \text{για κάθε } \alpha \geq 0.$$

Ιδιότητες της ν-οστής ρίζας

Για ν και μ θετικούς ακέραιους ισχύουν:

- $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ (εφόσον $\alpha^n \geq 0$).
- $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$ για κάθε $\alpha \geq 0$.
- $\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta}$ για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$.
- $\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}}$ για κάθε $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$.
- $\sqrt[\mu]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[n]{\alpha}$ για κάθε $\alpha \geq 0$.
- $\sqrt[n]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[n]{\alpha^{\mu}}^{\rho}$ για κάθε $\alpha \geq 0$. (Απλοποίηση τάξης και εκθέτη)

☞ Γενικότερα, για $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$ και $\alpha \geq 0$,

$$\sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k} = \sqrt[n]{\alpha_1} \cdot \sqrt[n]{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{\alpha_k} \quad \text{και} \quad \sqrt[n]{\alpha^k} = \sqrt[n]{\alpha}^k$$

☞ Για αρνητική δύναμη ισχύει

$$\sqrt[n]{a^{-n}} = a^{-1}.$$

Επιπλέον, για $a, \beta \geq 0$ και n θετικό ακέραιο,

$$a < \beta \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{\beta}.$$

Υπολογισμός ριζών

Για να υπολογίσουμε την n -οστή ρίζα ενός (μη αρνητικού) αριθμού, πρέπει να τον γράψουμε σαν δύναμη με εκθέτη n . Έπειτα εκμεταλλευόμαστε την ιδιότητα

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{για κάθε } a \geq 0.$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστούν οι παρακάτω ρίζες.

$$(α) \sqrt[3]{27}$$

$$(β) \sqrt[4]{100.000.000}$$

$$(γ) \sqrt[5]{32}$$

$$(δ) \sqrt[3]{0,001}$$

Λύση:

$$(α) \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$(γ) \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$(β) \sqrt[4]{100.000.000} = \sqrt[4]{100^4} = 100$$

$$(δ) \sqrt[3]{0,001} = \sqrt[3]{10^{-3}} = 10^{-1} = 0,1$$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Ορισμός: Δύναμη με ρητό εκθέτη

Για $a > 0$, μ ακέραιο και n θετικό ακέραιο ορίζουμε

$$a^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{a^\mu}.$$

Επίσης, για μ, n θετικούς ακέραιους ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{n}} = 0$.

☞ Οι δυνάμεις με ρητό εκθέτη ορίζονται μόνο για $a \geq 0$.

Για παράδειγμα $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$ και $7^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^{-3}}$.

Επίσης, $\sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{6}}$ και $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$.

Για τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη ισχύουν οι ιδιότητες που ισχύουν και για τις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο (με τη προϋπόθεση ότι η βάση είναι μη αρνητικός αριθμός).

Υπενθύμιση: Ιδιότητες δυνάμεων

Για $a, b > 0$ και κ, λ ρητούς αριθμούς ισχύουν

$$\begin{aligned} & \bullet a^{\kappa} \cdot a^{\lambda} = a^{\kappa+\lambda} & \bullet a^{\kappa} \cdot b^{\kappa} = (ab)^{\kappa} \\ & \bullet \frac{a^{\kappa}}{a^{\lambda}} = a^{\kappa-\lambda} & \bullet \frac{a^{\kappa}}{b^{\kappa}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\kappa} \\ & \bullet (a^{\kappa})^{\lambda} = a^{\kappa\lambda} \end{aligned}$$

Αριθμητικές παραστάσεις με ριζικά

Μπορούμε να απλοποιήσουμε αριθμητικές παραστάσεις με ριζικά χρησιμοποιώντας είτε τις ιδιότητες των ριζών είτε τις ιδιότητες των δυνάμεων και την έκφραση της n -οστής ρίζας ως δύναμη με εκθέτη ρητό.

☞ Για να πολλαπλασιάσουμε ρίζες διαφορετικής τάξης, πρέπει πρώτα να τις γράψουμε ως ρίζες με ίδια τάξη. Για να το πετύχουμε εργαζόμαστε ως εξής.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^m} \cdot \sqrt[nm]{a^n} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$$

(Αρκεί να βρούμε το ΕΚΠ των τάξεων.)

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Να απλοποιήσετε τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις.

(α) $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[4]{2^5}$

(β) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{3^2}$

Λύση:

(α) α' τρόπος (ιδιότητες ριζών): Έχουμε

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[4]{2^5} &= \sqrt[6 \cdot 2]{2^2} \cdot \sqrt[4 \cdot 3]{2^{5 \cdot 3}} = \sqrt[12]{2^2} \cdot \sqrt[12]{2^{15}} = \sqrt[12]{2^2 \cdot 2^{15}} \\ &= \sqrt[12]{2^{17}} = \sqrt[12]{2^{12} \cdot 2^5} = \sqrt[12]{2^{12}} \cdot \sqrt[12]{2^5} = 2 \cdot \sqrt[12]{2^5} \end{aligned}$$

β' τρόπος (ιδιότητες δυνάμεων): Έχουμε

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[4]{2^5} &= 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{1}{6} + \frac{5}{4}} = 2^{\frac{17}{12}} \\ &= 2^{1 + \frac{5}{12}} = 2 \cdot 2^{\frac{5}{12}} = 2 \cdot \sqrt[12]{2^5} \end{aligned}$$

(β) α' τρόπος (ιδιότητες ριζών): Έχουμε

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[2 \cdot 5]{3^5} \cdot \sqrt[5 \cdot 2]{3^{2 \cdot 2}} = \sqrt[10]{3^5} \cdot \sqrt[10]{3^4} = \sqrt[10]{3^9}$$

β' τρόπος (ιδιότητες δυνάμεων): Έχουμε

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{2}{5}} = 3^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{3^9}$$