

## Κεφ. 3.4. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 – Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας [www.arnos.gr](http://www.arnos.gr) για το Course Των Μαθηματικών, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύψος της Τράπεζας.

Κωδικοί Θεμάτων 1:

21973

#### 1. Θέμα 21973

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Αν ισχύει  $|\vec{\alpha}| = \lambda |\vec{\beta}|$  τότε υποχρεωτικά  $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ .
- ii. Η εφαπτομένη του κύκλου C:  $x^2 + y^2 = \rho^2$  σε ένα σημείο του A ( $x_1, y_1$ ), έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ .
- iii. Η διευθετούσα της παραβολής  $y^2 = 2px$ , έχει εξίσωση  $x = -\frac{p}{2}$ .
- iv. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.
- v. Η εξίσωση:  $x^2 + y^2 = a^2$  είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  είναι  $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ .

(Μονάδες 15)

Κωδικοί Θεμάτων 2:

16128, 17942, 22169, 22196, 22269, 22559, 22561, 22566, 22567

### 2. Θέμα 16128

Δίνεται η υπερβολή  $(C): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών  $E'$  και  $E$ .

(Μονάδες 10)

β) Αν το  $N$  είναι τυχαίο σημείο της  $(C)$ , να βρείτε την τιμή της διαφοράς  $|(NE') - (NE)|$ .

(Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή  $(C)$ .

(Μονάδες 10)

### 3. Θέμα 17942

Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση  $(C) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο  $M(1, 2022)$  μπορεί να ανήκει στην  $(C)$ .

(Μονάδες 13)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**4. Θέμα 22169**

Δίνεται η υπερβολή  $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  με ασύμπτωτη την  $y = \frac{3}{4}x$ . Η απόσταση των κορυφών της A και A' είναι 8.

α)

i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής. (Μονάδες 10)

ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής; (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  στο σημείο της  $(5, \frac{9}{4})$ . (Μονάδες 10)**5. Θέμα 22196**

Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση

$$x^2 - y^2 = 25 \quad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E'.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες  $(\epsilon_1)$ ,  $(\epsilon_2)$  της υπερβολής.

(Μονάδες 10)

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες  $(\epsilon_1)$ ,  $(\epsilon_2)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**6. Θέμα 22269**

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση :  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :

- i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.
- ii. Την εκκεντρότητά της.
- iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της,

$A(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$ .

(Μονάδες 10)

**Έξυπνα & Εύκολα!**

**7. Θέμα 22559**

Η υπερβολή στο παρακάτω σχήμα έχει εστίες τα σημεία  $E'(-10, 0)$  και  $E(10, 0)$  και κορυφές τα σημεία  $A'(-8, 0)$  και  $A(8, 0)$ .

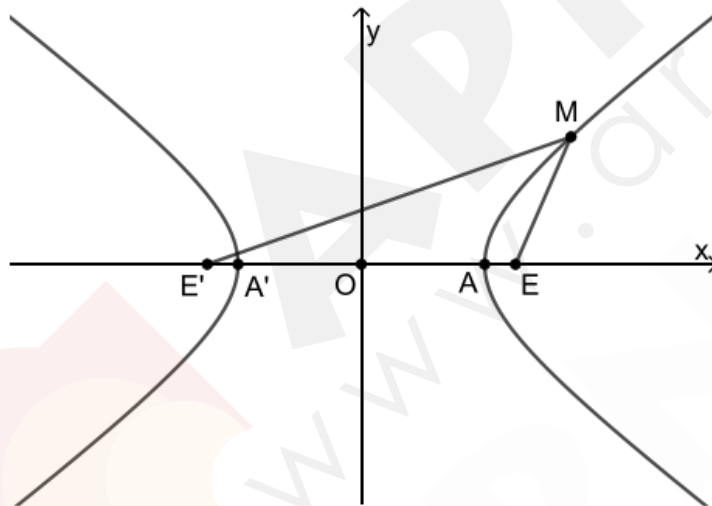
α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ . (Μονάδες 12)

β) Έστω  $M$  ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι  $|(ME') - (ME)| = 16$ . (Μονάδες 8)

ii. Αν  $(ME) = 9$ , να βρείτε την απόσταση του σημείου  $M$  από την εστία  $E'$ .

(Μονάδες 5)


**8. Θέμα 22561**

Στο παρακάτω σχήμα η υπερβολή  $C$  έχει εξίσωση  $x^2 - y^2 = 9$ , οι ευθείες  $\delta_1$  και  $\delta_2$  είναι οι ασύμπτωτες της  $C$  και η  $\varepsilon$  είναι η εφαπτομένη της  $C$  στο σημείο της  $M(5, 4)$ .

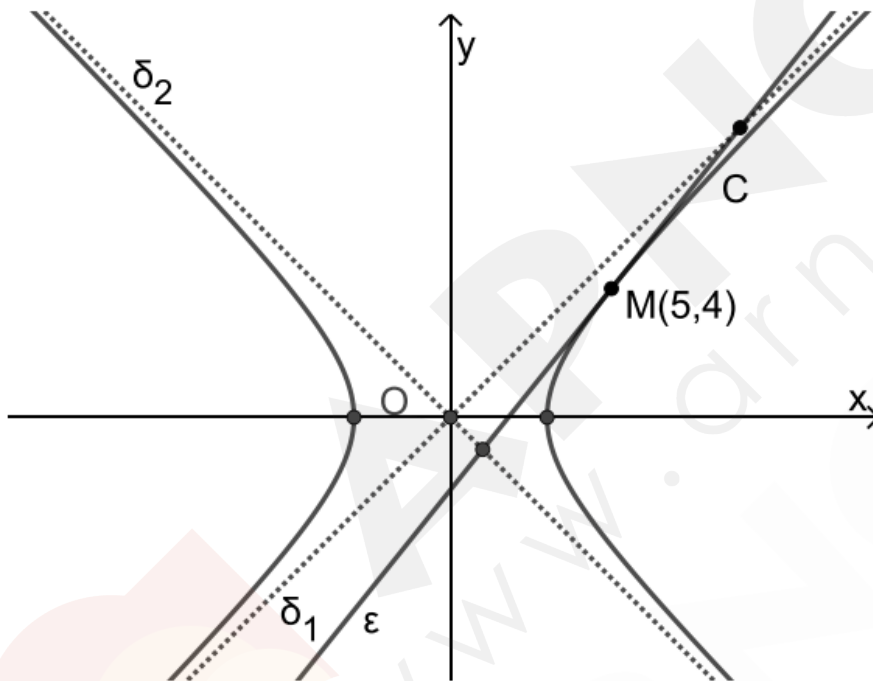
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι εξισώσεις των ασυμπτώτων είναι  $\delta_1: y = x$  και  $\delta_2: y = -x$ . (Μονάδες 8)

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $M$  είναι  $\varepsilon: 5x - 4y = 9$ . (Μονάδες 8)

*Έξυπνα & Εύκολα!*

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών  $\epsilon$  και  $\delta_1$  καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών  $\epsilon$  και  $\delta_2$ . (Μονάδες 9)



### 9. Θέμα 22566

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση  $4x^2 - y^2 = 4$ .

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι  $A(1,0)$  και  $A'(-1,0)$  (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι  $y = 2x$  και  $y = -2x$ . (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή  $A$  και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη  $y = -2x$  έχει εξίσωση  $y = -2x + 2$  (Μονάδες 8)

*Έξυπνα & Εύκολα!*

**10. Θέμα 22567**

Στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  η υπερβολή  $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στα σημεία

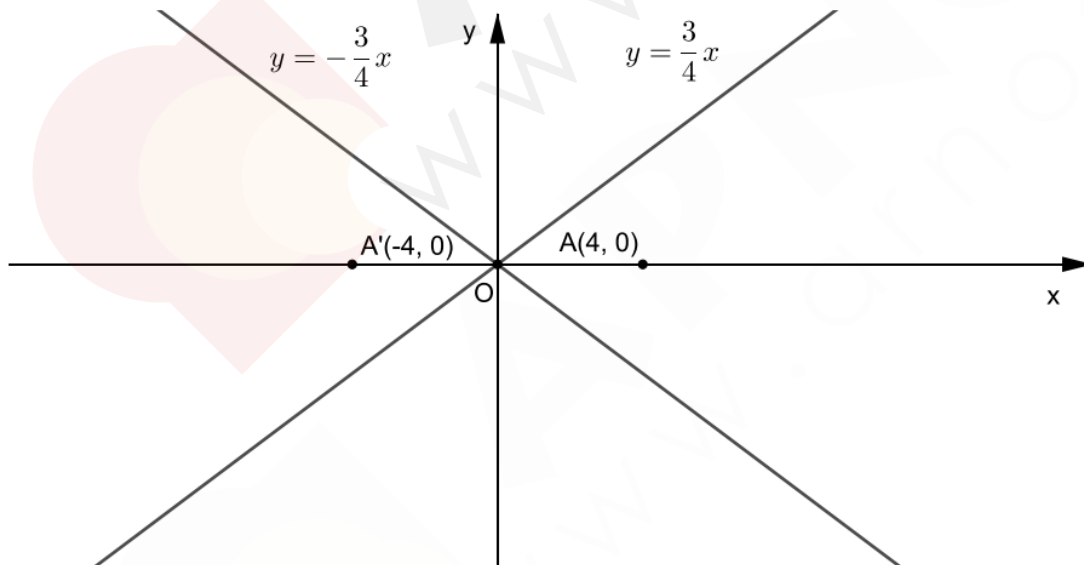
$A'(-4, 0)$  και  $A(4, 0)$  και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες  $y = \frac{3}{4}x$  και  $y = -\frac{3}{4}x$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i.  $\alpha = 4$  και  $\beta = 3$ , (Μονάδες 10)
- ii. οι εστίες της  $C$  είναι τα σημεία  $E'(-5, 0)$  και  $E(5, 0)$ . (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή  $C$ .

(Μονάδες 5)



**Έξυπνα & Εύκολα!**

Κωδικοί Θεμάτων 3:

17944

**11. Θέμα 17944**

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής (C):  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , εστιακή απόσταση  $EE' = 2\sqrt{7}$

και εκκεντρότητα  $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}$ .

(Μονάδες 8)

β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών  $A, A'$  της υπερβολής (C).

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C).

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της.

(Μονάδες 9)

**Έξυπνα & Εύκολα!**



**Κωδικοί Θεμάτων 4:**
**22174**
**12. Θέμα 22174**

Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης  $E(\gamma, 0)$ , ενώ η άλλη εστία είναι στο  $E'(-\gamma, 0)$ . Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (Μονάδες 09)

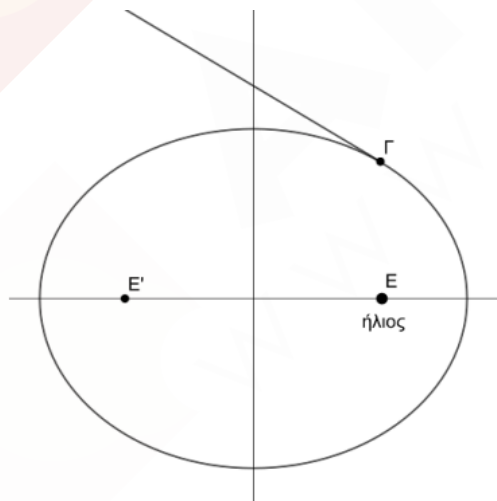
β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο  $\Gamma\left(3, \frac{16}{5}\right)$  εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα  $Oy$ . Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο  $\Delta(0,5)$ . (Μονάδες 09)

ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{ με } x > 0. \text{ Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;}$$

(Μονάδες 07)



**Έξυπνα & Εύκολα!**