# Κεφ. 3.4. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 –

# Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

| Κωδικοί Θεμάτων 1: |
|---|
| 21973 |

Η Τράπεζα Θεμάτων για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course Των Μαθηματικών, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

| Κωδικοί Θεμάτων 1: |
|---|
| 21973 |

**1. Θέμα 21973**

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = \lambda|\vec{\beta}|$ τότε υποχρεωτικά $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

ii. Η εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του Α $(x_1, y_1)$, έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

iii. Η διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 2px$, έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$.

iv. Η εκκεντρότητα μιας έλλειψης είναι μικρότερη της μονάδας.

v. Η εξίσωση: $x^2 + y^2 = \alpha^2$ είναι εξίσωση ισοσκελούς υπερβολής.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

(Μονάδες 15)

**ΛΥΣΗ**

α)

i. Λάθος
ii. Σωστό
iii. Σωστό
iv. Σωστό
v. Λάθος

β) Πρόταση σελίδα 60, 61.

**Κωδικοί Θεμάτων 2:**

**16128, 17942, 22169, 22196, 22269, 22559, 22561, 22566, 22567**

**2. Θέμα 16128**

Δίνεται η υπερβολή $(C)$: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών $E'$ και $E$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το $N$ είναι τυχαίο σημείο της $(C)$, να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE')-(NE)|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή $(C)$.

(Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

α) Καθώς η υπερβολή έχει εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, θα είναι $\alpha^2=16$ και $\beta^2=9$, οπότε $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=25$, άρα $\gamma=5$. Έτσι, οι εστίες είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

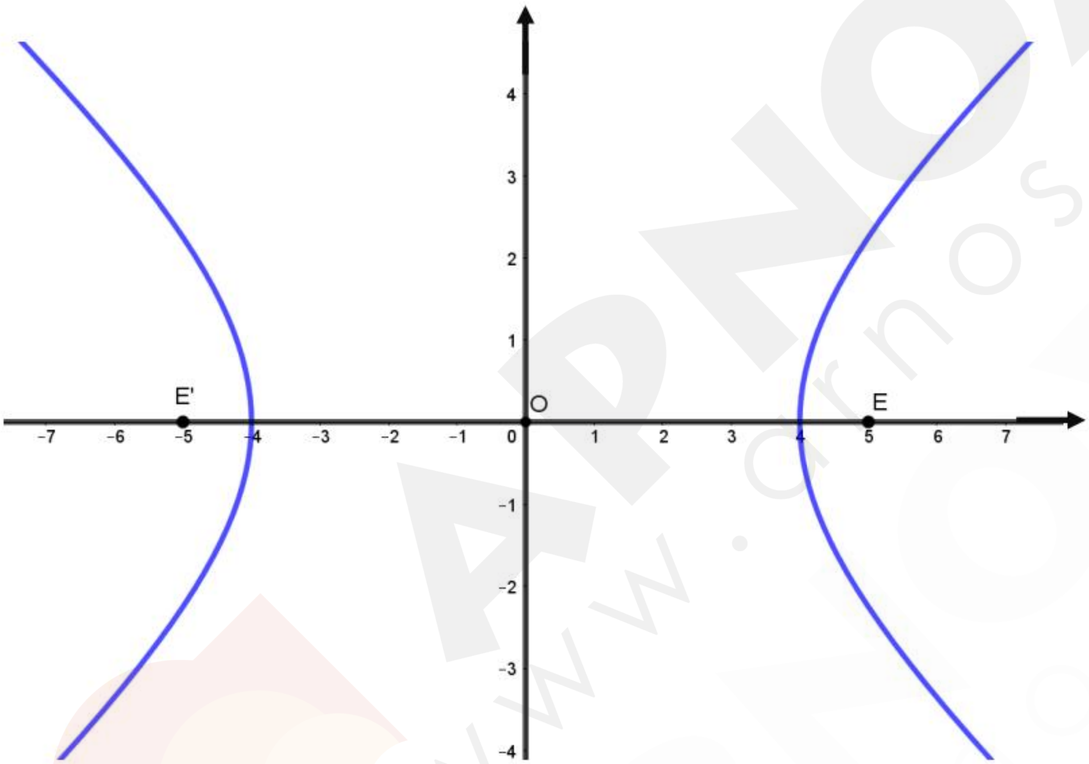
β) Από τον ορισμό της υπερβολής γνωρίζουμε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων ενός σημείου της υπερβολής από τις εστίες ισούται με $2\alpha$.

Έτσι, θα έχουμε ότι $|(NE')-(NE)|=2\cdot 4=8$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(-\alpha,0)$ και $(\alpha,0)$, δηλαδή στα σημεία $(-4,0)$ και $(4,0)$.

Επίσης, δεν τέμνει τον άξονα y'y, αφού αν αυτό συνέβαινε θα είχαμε $0 - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, αδύνατο.

Έτσι, έχουμε το παρακάτω σχήμα.




**3. Θέμα 17942**

Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση $(C)\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(1,2022) μπορεί να ανήκει στην $(C)$ .

(Μονάδες 13)

**ΛΥΣΗ**

α) Η εξίσωση (C) ανήκει σε υπερβολή, διότι είναι της μορφής $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha=2,\beta=3$.

Οι εστίες της έχουν συντεταγμένες $E(\gamma,0),E'(-\gamma,0)$

όπου $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2 \Leftrightarrow \gamma^2=\alpha^2+\beta^2=4+9=13$. Οπότε $E(\sqrt{13},0),E'(-\sqrt{13},0)$.

β) Για $x=1, y=2022$ η εξίσωση $(C)$ γίνεται:

$\frac{1^2}{4}-\frac{2022^2}{9}=36 \Leftrightarrow 9-4\cdot 2022^2=36^2 \Leftrightarrow 4\cdot 2022^2=9-36^2<0$, η οποία δεν μπορεί να ισχύει.

Άρα το σημείο Μ δεν μπορεί να ανήκει στην υπερβολή.

Γενικότερα, είναι γνωστό ότι για μία υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ ισχύει ότι $x\leq -a$ ή $x\geq a$.

**4. Θέμα 22169**

Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με ασύμπτωτη την $y=\frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της Α και Α΄ είναι 8.

α)

i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής. (Μονάδες 10)

ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής; (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ στο σημείο της $(5,\frac{9}{4})$. (Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

α)

i. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι η y = $\frac{β}{α}$ x και y = - $\frac{β}{α}$ x. Εφόσον η y = $\frac{3}{4}$ x είναι ασύμπτωτη και α,β > 0, έχουμε ότι $\frac{β}{α} = \frac{3}{4}$ δηλαδή 4β = 3α ή β = $\frac{3}{4}$ α. (1)

Η απόσταση των κορυφών της ΑΑ' είναι ίση με 2α, οπότε 2α = 8, άρα α = 4. (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι β = $\frac{3}{4} \cdot 4 = 3$.

Επομένως η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{α^2} - \frac{y^2}{β^2} = 1$ γίνεται $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ ή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

ii. $α^2+β^2 = γ^2$ και από το αi) ερώτημα έχουμε ότι α = 4 και β = 3. Επομένως $4^2+ 3^2 = γ^2$ ή $γ^2 = 25$ ή γ = 5.

Οι εστίες είναι της μορφής Ε(γ,0) και Ε'(-γ,0), επομένως Ε(5,0) και Ε'(-5,0).

β) Η εφαπτόμενη της υπερβολής $\frac{x^2}{α^2} - \frac{y^2}{β^2} = 1$ στο σημείο της $(x_1, y_1)$ δίνεται από τον τύπο

$\frac{xx_1}{α^2} - \frac{yy_1}{β^2} = 1$ ή $\frac{xx_1}{16} - \frac{yy_1}{9} = 1$. Στο σημείο $(5,\frac{9}{4})$ θα έχουμε $\frac{5x}{16} - \frac{\frac{9}{4}y}{9} = 1$ ή $\frac{5x}{16} - \frac{y}{4} = 1$.

**5. Θέμα 22196**

Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση

$$x^2 - y^2 = 25 \quad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες $(ε_1)$, $(ε_2)$ της υπερβολής.

(Μονάδες 10)

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες $(ε_1)$, $(ε_2)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)

**ΛΥΣΗ**

α) Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=1$$

Επομένως, είναι $\alpha^2=25 \Leftrightarrow \alpha=5$, $\beta^2=25 \Leftrightarrow \beta=5$ και $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=25+25=50$.

Άρα, $\gamma=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία Ε(γ,0), Ε΄(-γ,0), δηλαδή:

$$E(5\sqrt{2},0),\ E'(-5\sqrt{2},0)$$

β) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

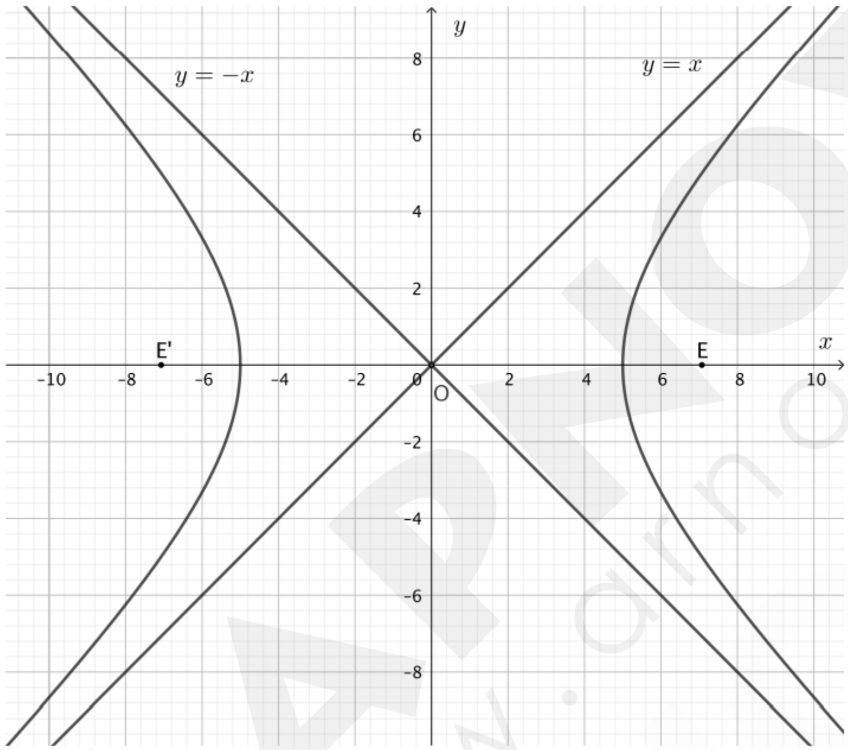
είναι οι ευθείες

$$(\varepsilon_1): y=\frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): y=-\frac{\beta}{\alpha}x$$

δηλαδή

$$(\varepsilon_1): y=x \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): y=-x$$

γ) Οι ευθείες $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=-1$ αντίστοιχα. Αφού $\lambda_1\lambda_2=-1$, συμπεραίνουμε ότι οι ασύμπτωτες $(\varepsilon_1)$, $(\varepsilon_2)$ είναι κάθετες. Η καμπύλη της υπερβολής, οι εστίες Ε, Ε΄ της και οι ασύμπτωτες απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα:




**6. Θέμα 22269**

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :

i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.

ii. Την εκκεντρότητά της.

iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της, $A(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$. (Μονάδες 10)

**ΛΥΣΗ**

α) Η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4}$ - $y^2$ = 1 (1) έχει $\alpha^2 = 4$ και $\beta^2 = 1$. Οι εστίες της βρίσκονται στον άξονα x'x και έχουν συντεταγμένες Ε(γ, 0) και Ε'(-γ, 0), όπου $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{5}$.

i. Οι εστίες της υπερβολής έχουν συντεταγμένες Ε($\sqrt{5}$, 0) και Ε'(- $\sqrt{5}$, 0).

ii. Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

iii. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = \frac{\beta}{\alpha}x = \frac{1}{2}x$ και $y = -\frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{1}{2}x$.

β) Η εξίσωση της εφαπτόμενης της υπερβολής στο σημείο της με συντεταγμένες ($x_1$, $y_1$) θα έχει τη μορφή ε : $\frac{x x_1}{4}$ - $y y_1 = 1 \Leftrightarrow x x_1 - 4 y y_1 = 4$. Οπότε για $x_1 = \sqrt{5}$ και $y_1 = \frac{1}{2}$ στην εξίσωση της ευθείας ε θα έχουμε $\varepsilon : \sqrt{5} \cdot x - 4 \cdot \frac{1}{2} y = 4$ ή $\varepsilon : \sqrt{5} \cdot x - 2y = 4$.

**7. Θέμα 22559**

Η υπερβολή στο παρακάτω σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10,0)$ και $E(10,0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8,0)$ και $A(8,0)$.

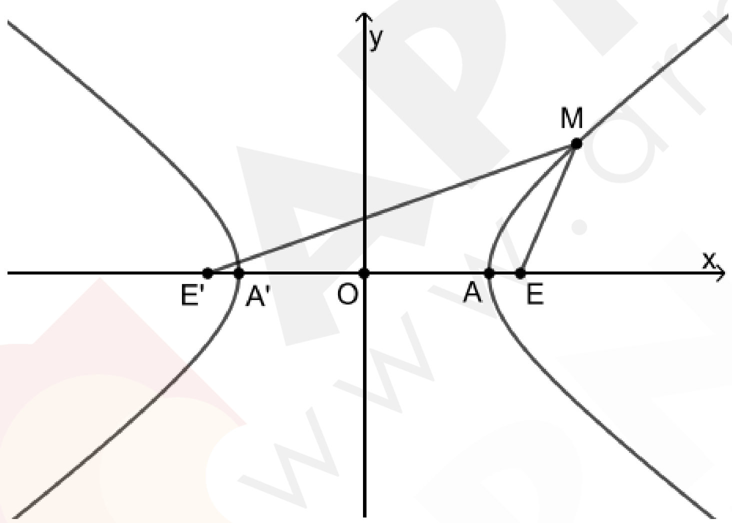
α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$. (Μονάδες 12)

β) Έστω $M$ ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι $|(ME')-(ME)|=16$. (Μονάδες 8)

ii. Αν $(ME)=9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου $M$ από την εστία $E'$.

(Μονάδες 5)



**ΛΥΣΗ**

α) Επειδή η υπερβολή έχει τις εστίες της $E'(-10\,,0)$ , $E(10\,,0)$ και τις κορυφές της $A'(-8\,,0)$ , $A(8\,,0)$ στον άξονα $x'x$, η εξίσωση της είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

Είναι $\gamma=10$ και $\alpha=8$, άρα

$\beta^2=\gamma^2-\alpha^2$

$\beta^2=10^2-8^2$

$\beta^2=36$

$\beta=6$.

Επομένως η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

β) i) Το M είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων του M από τις εστίες $E'$ και $E$ είναι $2\alpha$, δηλαδή $|(ME')-(ME)|=2\alpha$.

Επειδή $\alpha=8$, θα είναι $|(ME')-(ME)|=16$ .

ii) Δίνεται $(ME)=9$ οπότε έχουμε:

$|(ME')-9|=16$

$(ME')-9=-16$ ή $(ME')-9=16$

$(ME')=-7$ ή $(ME')=25$

και επειδή $(ME')>0$ θα είναι $(ME')=25$ .

**8. Θέμα 22561**

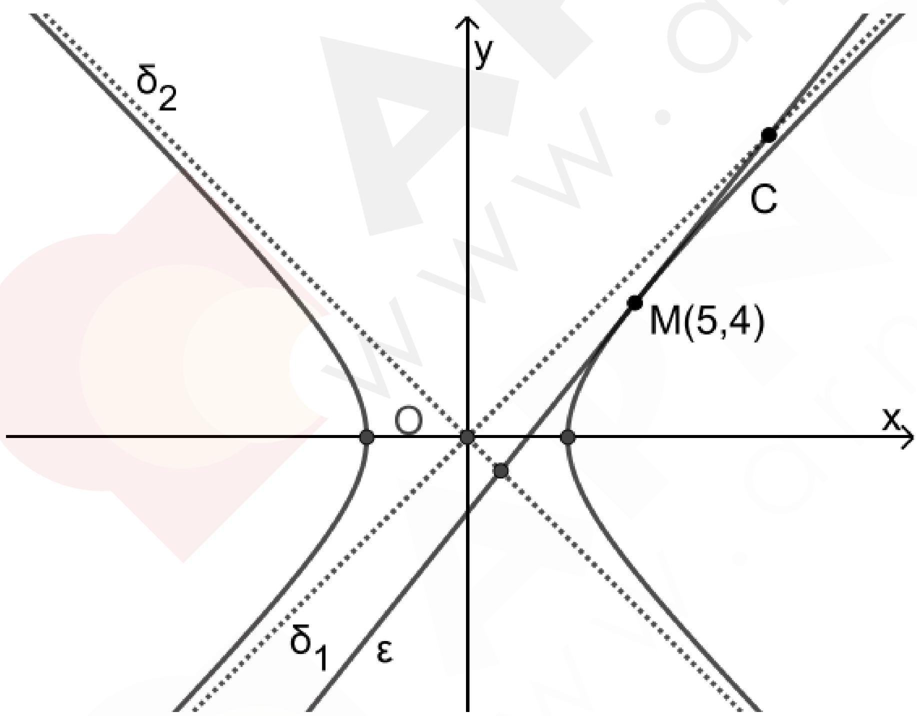
Στο παρακάτω σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 9$, οι ευθείες $\delta_1$ και $\delta_2$ είναι οι ασύμπτωτες της C και η ε είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(5, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι εξισώσεις των ασυμπτώτων είναι $\delta_1: y = x$ και $\delta_2: y = -x$. (Μονάδες 8)

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι $\varepsilon: 5x - 4y = 9$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και $\delta_1$ καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και $\delta_2$. (Μονάδες 9)



**ΛΥΣΗ**

α) i) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$.

Επειδή $C: x^2-y^2=9$ είναι $\alpha^2=\beta^2=9$, άρα $\alpha=\beta=3$ , οπότε οι ασύμπτωτες της $C$ είναι οι ευθείες $\delta_1: y=\frac{3}{3}x$ ή $\delta_1: y=x$ και $\delta_2: y=-\frac{3}{3}x$ ή $\delta_2: y=-x$.

ii) Η εφαπτομένη ε της υπερβολής $C: x^2-y^2=9$ στο σημείο της $M(5,4)$, έχει εξίσωση $\varepsilon: xx_1-yy_1=9$ ή $\varepsilon: 5x-4y=9$.

β) Τα σημεία τομής της $\varepsilon: 5x-4y=9$ με τις $\delta_1: y=x$ και $\delta_2: y=-x$, προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεών τους. Επομένως θα έχουμε

$$\begin{cases}5x-4y=9\\ y=x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}5x-4x=9\\ y=x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=9\\ y=9\end{cases}$$

και

$$\begin{cases}5x-4y=9\\ y=-x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}5x+4x=9\\ y=-x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}9x=9\\ y=-x\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}.$$

Επομένως το σημείο τομής των ε και $\delta_1$ έχει συντεταγμένες $(9,9)$ και το σημείο τομής των ε και $\delta_2$ έχει συντεταγμένες $(1,-1)$.

**9. Θέμα 22566**

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2-y^2=4$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι Α(1,0) και Α΄(-1,0)

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y=2x$ και $y=-2x$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Α και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y=-2x$ έχει εξίσωση $y=-2x+2$ (Μονάδες 8)

**ΛΥΣΗ**

α) Η υπερβολή γράφεται

$$4x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

άρα η υπερβολή είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με εστίες και κορυφές στον άξονα $x'x$, και

έχει $\alpha^2 = 1$ άρα $\alpha = \pm 1$

επομένως οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι τα σημεία Α(α,0) και Α΄(-α,0)

δηλαδή

$$A(1,0) \text{ και } A'(-1,0)$$

β) Σύμφωνα με τον μνημονικό κανόνα για τον υπολογισμό των ασύμπτωτων τις υπερβολής, παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσής της και εξισώνουμε κάθε παράγοντα με το μηδέν. Έχουμε $4x^2 - y^2 = (2x - y)(2x + y)$, άρα οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι:

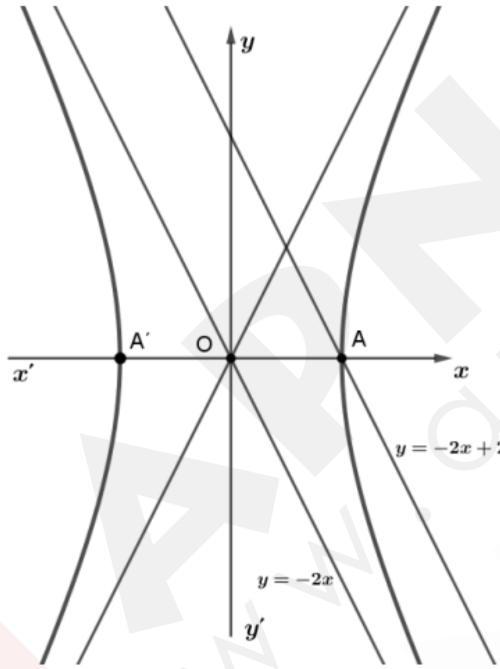
$$2x - y = 0 \quad \text{και} \quad 2x + y = 0$$

δηλαδή

$$y = 2x \quad \text{και} \quad y = -2x$$

γ) Η ευθεία που είναι παράλληλη της ασύμπτωτης $y=-2x$, και διέρχεται από το $A(1,0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-2$, άρα έχει εξίσωση

$$y-0=-2(x-1)\Leftrightarrow y=-2x+2$$




**10. Θέμα 22567**

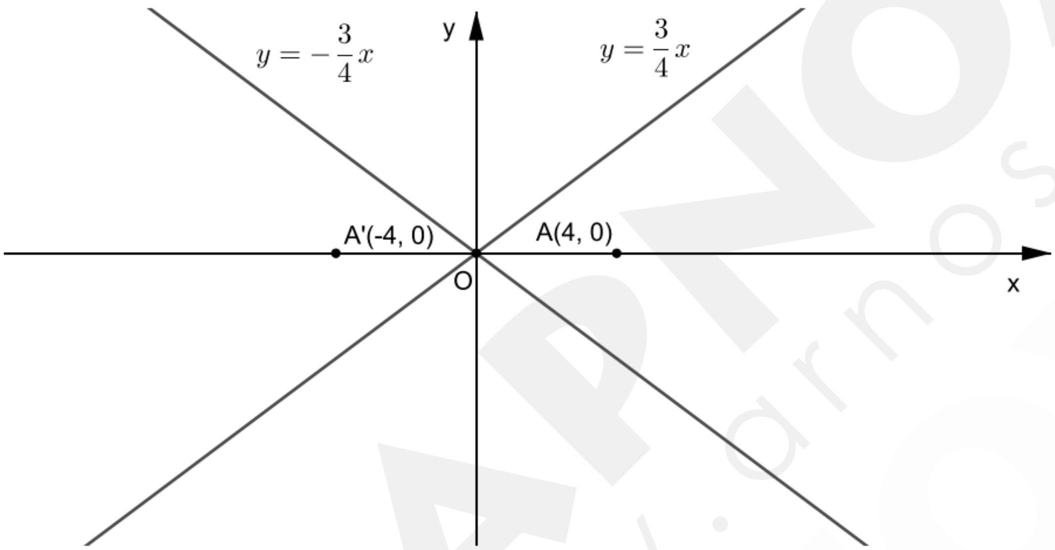
Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ τέμνει τον άξονα x′x στα σημεία $A'(-4,0)$ και $A(4,0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=\frac{3}{4}x$ και $y=-\frac{3}{4}x$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha=4$ και $\beta=3$, (Μονάδες 10)

ii. οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$. (Μονάδες 10) β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C .

(Μονάδες 5)




**ΛΥΣΗ**

α) i) Η υπερβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ , τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha\,,0)$ και $A(\alpha\,,0)$. Δίνεται $A'(-4\,,0)$ και $A(4\,,0)$, άρα θα έχουμε $\alpha=4$.

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι οι ευθείες $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$ .

Δίνεται ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y=\frac{3}{4}x$ και $y=-\frac{3}{4}x$ ,

άρα θα έχουμε $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{3}{4}$ και επειδή $\alpha=4$, προκύπτει $\beta=3$.

ii) Οι εστίες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ είναι τα σημεία $E'(-\gamma\,,0)$ και $E(\gamma\,,0)$.

Είναι

$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$

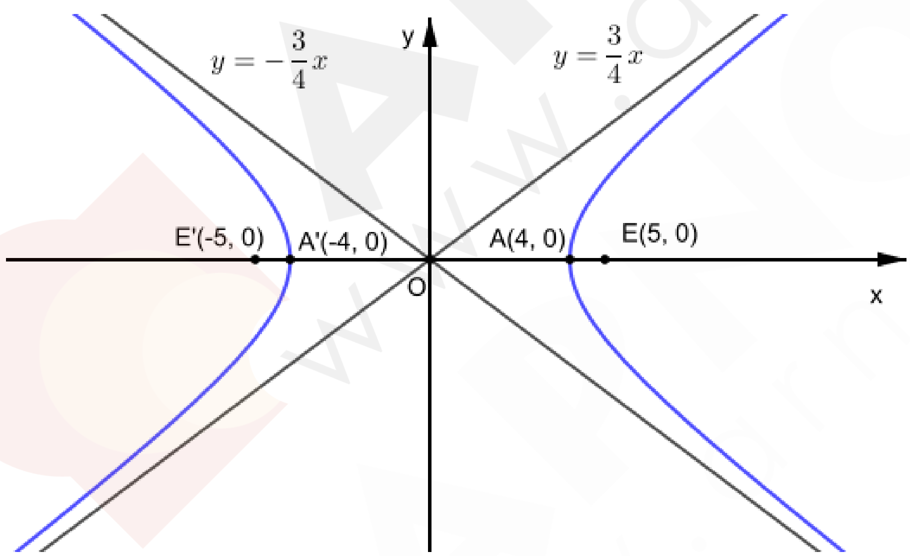
$\gamma^2=4^2+3^2$

$\gamma^2=25$

$\gamma=5$ .

Επομένως οι εστίες της υπερβολής είναι τα σημεία $E'(-5\,,0)$ και $E(5\,,0)$.

β)



**Κωδικοί Θεμάτων 3:**

**17944**

**11. Θέμα 17944**

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής $(C): \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, εστιακή απόσταση $EE' = 2\sqrt{7}$

και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}$.

(Μονάδες 8)

β) i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών $A, A'$ της υπερβολής (C).

ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C).

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της.

(Μονάδες 9)

**ΛΥΣΗ**

α) Ισχύει ότι η εστιακή απόσταση είναι $2\gamma=2\sqrt{7}\Leftrightarrow\gamma=\sqrt{7}$.

Για την εκκεντρότητα της υπερβολής ισχύει ότι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{7}}{a}\Leftrightarrow a=2$.

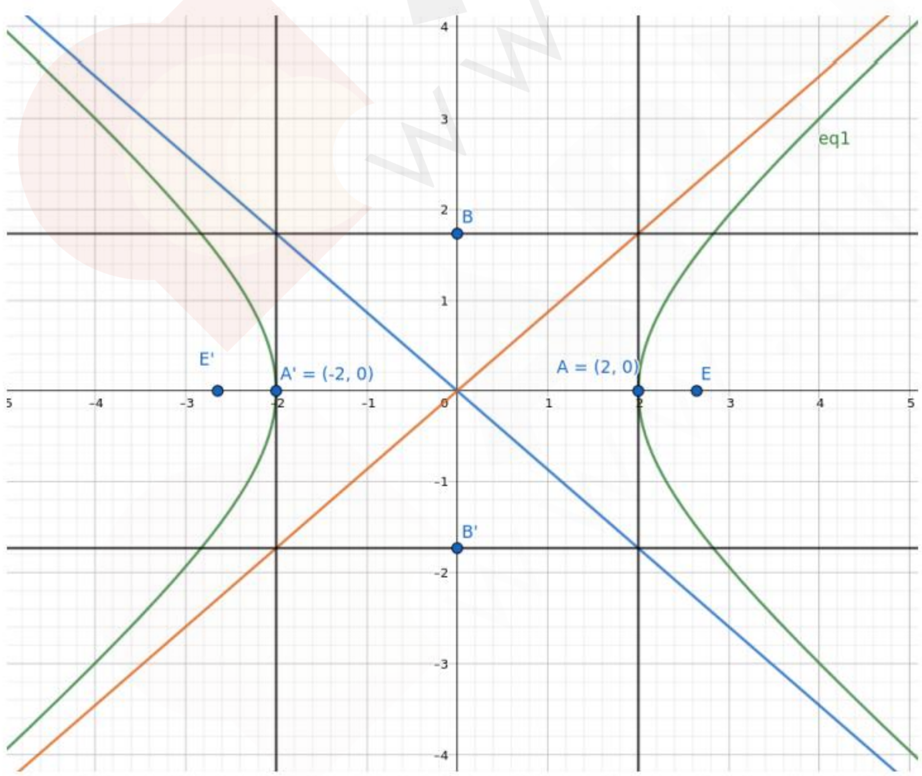
Για τους συντελεστές α,β ισχύει ότι $\beta^2=\gamma^2-\alpha^2=\sqrt{7}^2-2^2=3\Leftrightarrow\beta=\sqrt{3}$.

β) i) Οι κορυφές της υπερβολής έχουν συντεταγμένες $A(\alpha,0),A'(-\alpha,0)$, άρα θα είναι οι $A(2,0),A'(-2,0)$.

ii) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι $\varepsilon_1:y=-\frac{\beta}{a}x,\varepsilon_2:y=\frac{\beta}{a}x$ οπότε θα έχουμε:

$\varepsilon_1:y=\frac{-\sqrt{3}}{2}x,\varepsilon_2:y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

γ) Η γραφική παράσταση και τα υπόλοιπα στοιχεία φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



**Κωδικοί Θεμάτων 4:**

**22174**

**12. Θέμα 22174**

Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης Ε(γ,0), ενώ η άλλη εστία είναι στο Ε΄(-γ,0). Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.

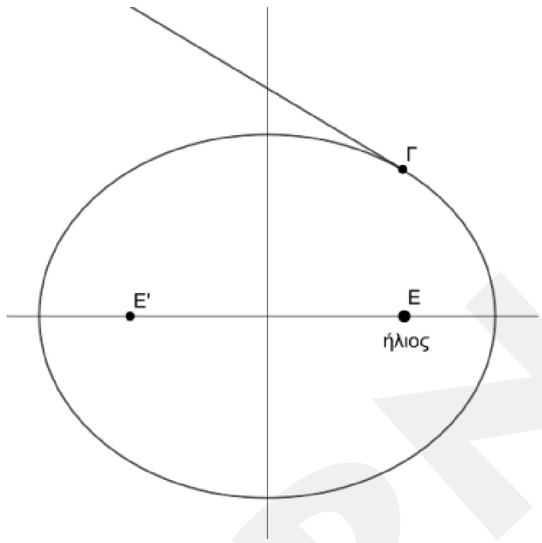
α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς. (Μονάδες 09)

β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

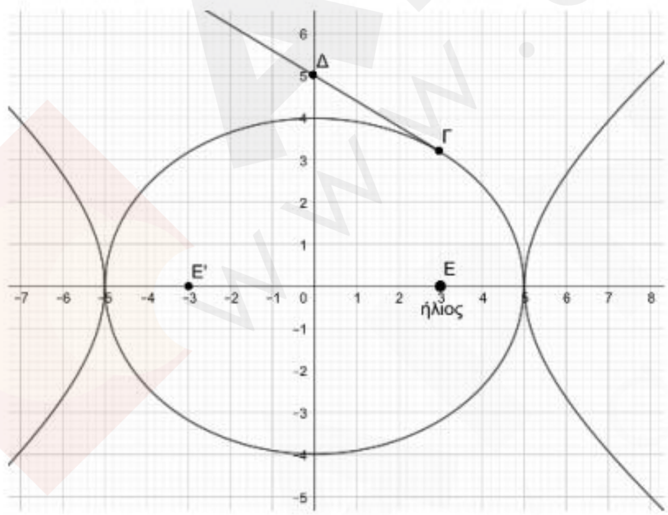
i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $Γ\left(3,\frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα Oy. Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο Δ(0,5). (Μονάδες 09)

ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ με $x > 0$. Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;

(Μονάδες 07)




**ΛΥΣΗ**




α) Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης είναι 2α, οπότε 2α =10, άρα α = 5.

Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$, οπότε $\frac{\gamma}{\alpha} = 0,6$ ή $\frac{\gamma}{5} = 0,6$ ή γ = 3.

Όμως $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$.

Η εξίσωση της έλλειψης δίνεται από τον τύπο $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, άρα $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

β)

i. Η εφαπτομένη της έλλειψης σε σημείο $(x_1, y_1)$ δίνεται από τον τύπο $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$.

Εφόσον το σημείο επαφής είναι το $\Gamma\left(3,\frac{16}{5}\right)$ η εξίσωση της εφαπτομένης θα γίνει

$\frac{x3}{25}+\frac{y\frac{16}{5}}{16}=1$ ή $\frac{3x}{25}+\frac{y}{5}=1$. Για να διέρχεται από το σημείο Δ(0,5) θα πρέπει οι συντεταγμένες του σημείου να την επαληθεύουν. Πράγματι $\frac{3\cdot 0}{25}+\frac{5}{5}=1$ ή 1 = 1 που σημαίνει ότι η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο Δ.

ii. Σημεία συνάντησης των τροχιών είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους εφόσον υπάρχουν. Οι εξισώσεις είναι $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ και $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$. Προσθέτοντας κατά μέλη $2\frac{x^2}{25}=2$ ή $x^2=25$ ή x = 5 επειδή x > 0. Η $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ για x = 5 μας δίνει

$\frac{5^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ή $1+\frac{y^2}{16}=1$ ή $\frac{y^2}{16}=0$

ή y = 0. Σημείο συνάντησης είναι το (5,0).