Κεφ. 3.3. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 –

Μαθηματικά Προσανατολισμού Β’ Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course Των Μαθηματικών, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 2 – Κωδικοί:

20718, 20883, 21308, 22168, 22192, 22268, 22556, 22558, 22564

1. Θέμα 20718

Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της.

(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της C και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

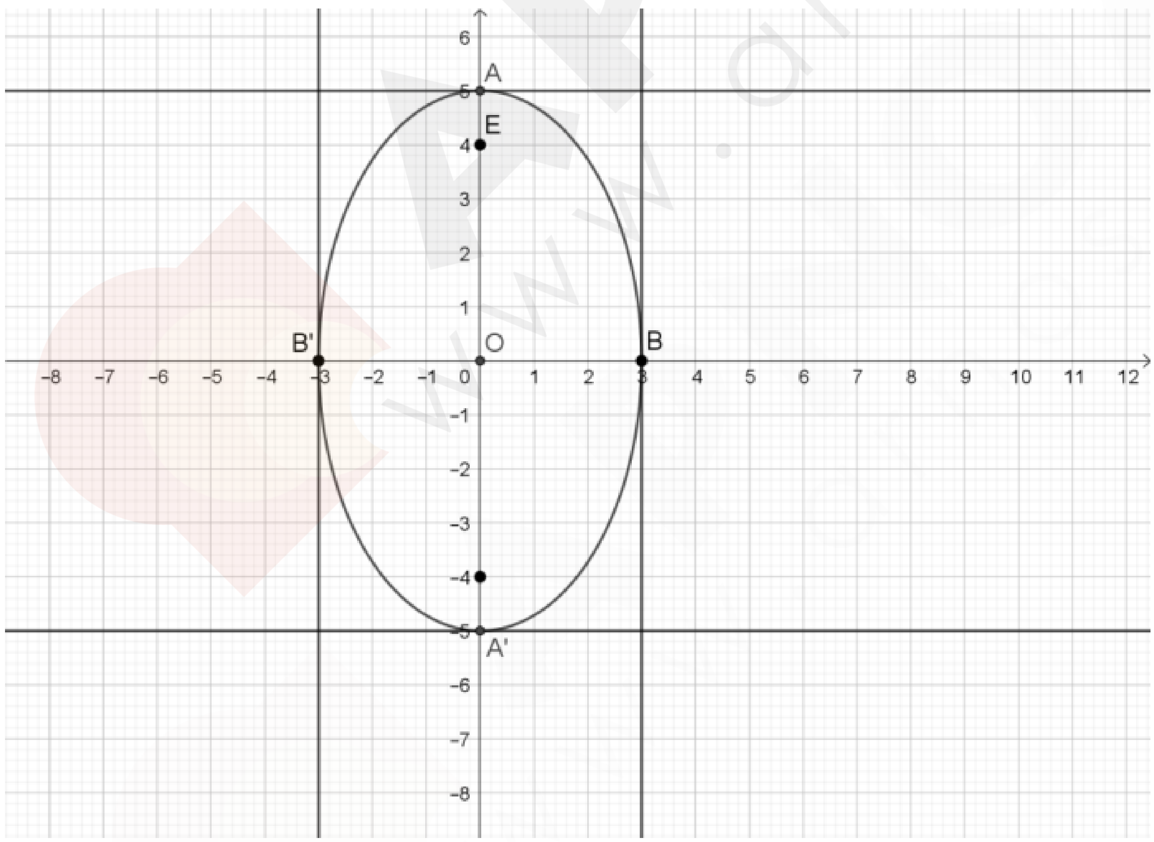
(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha^2 = 25$ και $\beta^2 = 9$ οπότε $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 9 = 16$ και άρα $\gamma = 4$. Οι ζητούμενες εστίες είναι τα σημεία $\mathrm{E}(0,4)$ και $\mathrm{E}'(0,-4)$.

β) Η έλλειψη C έχει κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(0,5)$, $\mathrm{A}'(0,-5)$, $\mathrm{B}(3,0)$, $\mathrm{B}'(-3,0)$ και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

γ) Οι εφαπτόμενες στα άκρα των δύο αξόνων της, δηλαδή στα σημεία $\mathrm{A}(0,5)$, $\mathrm{A}'(0,-5)$, $\mathrm{B}(3,0)$, $\mathrm{B}'(-3,0)$ έχουν εξισώσεις $y=5$, $y=-5$, $x=3$, $x=-3$ και φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



2. Θέμα 20883

Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης C: $16x^2 + 25y^2 = 400$.

α) Να βρείτε τα μήκη ΒΒ', ΑΑ' του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της Ε και Ε'. (Μονάδες 12)

β) Αν Ε'(-3,0) και Ε(3,0), να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο Ε' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το Ε και είναι παράλληλη στον άξονα y'y. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: C: $16x^2 + 25y^2 = 400$ ή C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, οπότε:

$\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = 5$, άρα (Α'Α) = $2\alpha = 2\cdot 5 = 10$ είναι το μήκος του μεγάλου άξονα.

Επίσης $\beta^2 = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$, άρα (Β'Β) = $2\beta = 2\cdot 4 = 8$ είναι το μήκος του μικρού άξονα.

Ακόμη: $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 25 - 16 = 9$, οπότε $\gamma = 3$.

Άρα Ε'(-γ,0) και Ε(γ,0) ή Ε'(-3,0) και Ε(3,0) είναι οι εστίες της έλλειψης.

β) Έχουμε Ε'(-3,0) και Ε(3,0).

Θέλουμε η Ε' να είναι εστία της ζητούμενης παραβολής, άρα $\frac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow p = -6$, άρα

C': $y^2 = 2px$ ή C': $y^2 = 2\cdot(-6)x$ ή C': $y^2 = -12x$, είναι η ζητούμενη εξίσωση.

3. Θέμα 21308

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄ της έλλειψης και την απόστασή τους.

(Μονάδες 09)

β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.

(Μονάδες 08)

γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της $B(0,4)$.

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της έλλειψης είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha=5$ και $\beta=4$.

Επομένως έχει εστίες της μορφής $E(\gamma,0)$ και $E'(-\gamma,0)$, με $\gamma>0$, όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$ ή $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ ή $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$.

Αντικαθιστώντας $\alpha=5$ και $\beta=4$ έχουμε $\gamma^2=5^2-4^2$ ή $\gamma^2=25-16$ ή $\gamma^2=9$ ή $\gamma=3$, εφόσον $\gamma>0$.

Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι οι $E(3,0)$ και $E'(-3,0)$.

Η απόσταση των εστιών είναι $2\gamma=2\cdot 3=6$.

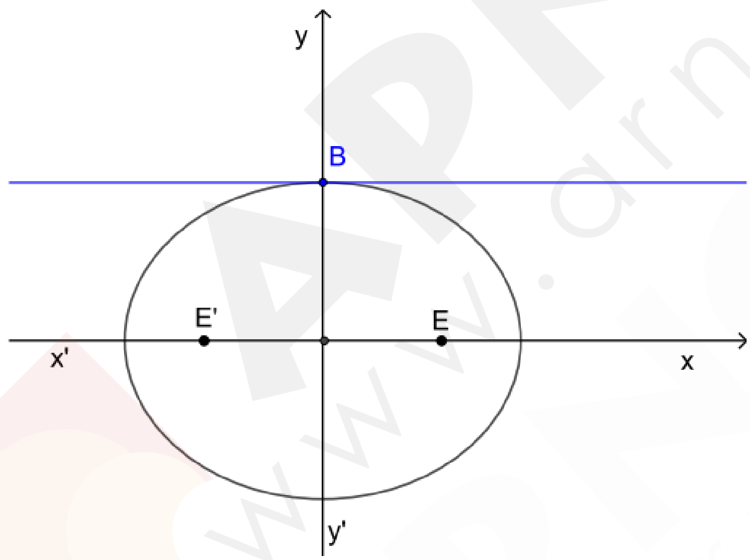
β) Ο μικρός άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\beta=2\cdot 4=8$.

Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2\alpha=2\cdot 5=10$.

γ) Από τη θεωρία η εφαπτομένη (ε) της έλλειψης της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο της (x_1, y_1) είναι $\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2}+\frac{y \cdot y_2}{\beta^2}=1$.

Αντικαθιστώντας όπου x_1 και y_1 τις συντεταγμένες του σημείου Β της έλλειψης και όπου $\alpha=5$ και $\beta=4$ έχουμε:

$\frac{0x}{25}+\frac{4y}{16}=1$ ή $y=4$, που είναι η εξίσωση της (ε).



4. Θέμα 22168

Δίνονται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

α) Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο Α(1,2), να βρείτε:

i. Την εξίσωση της παραβολής. (Μονάδες 10)

ii. Την εστία Ε της παραβολής. (Μονάδες 05)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το Ο, αν η μια εστία της είναι το σημείο Ε(1,0) και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α)

i. Η παραβολή $y^2 = 2px$ διέρχεται από το Α(1,2), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή:

$$2^2 = 2p1 \text{ ή } 4 = 2p \text{ ή } p = 2$$

Επομένως, $y^2 = 2 \cdot 2x$ ή $y^2 = 4x$.

ii. Η εστία Ε της παραβολής είναι:

$$E\left(\frac{p}{2},0\right) \text{ ή } E(1,0)$$

β) Μία από τις εστίες της έλλειψης είναι το σημείο Ε(γ,0) και ο μεγάλος άξονας έχει μήκος 2α. Αφού η εστία είναι το σημείο Ε(1,0), έχουμε ότι γ = 1.

Επειδή ο μεγάλος άξονας έχει μήκος ίσο με 4 έχουμε ότι 2α = 4, οπότε α = 2.

Είναι:

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

Οπότε, η εξίσωση της έλλειψης γίνεται:

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

5. Θέμα 22192

Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1 \quad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών Ε και Ε΄.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β(0,9) είναι σημείο της έλλειψης.

(Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της Β(0,9).

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η έλλειψη με εξίσωση την (1) έχει $\alpha^2 = 225$, $\beta^2 = 81$ και εστίες τα σημεία Ε(γ,0), Ε΄(-γ,0). Είναι:

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 225 - 81 = 144$$

Άρα, $\gamma = 12$. Επομένως, οι εστίες της έλλειψης είναι:

$$E(12,0),\ E΄(-12,0)$$

β) Εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες του σημείου Β επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης. Για $x = 0$ και $y = 9$ είναι:

$$\frac{0^2}{225} + \frac{9^2}{81} = 1$$

Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, οπότε το σημείο Β είναι σημείο της έλλειψης .

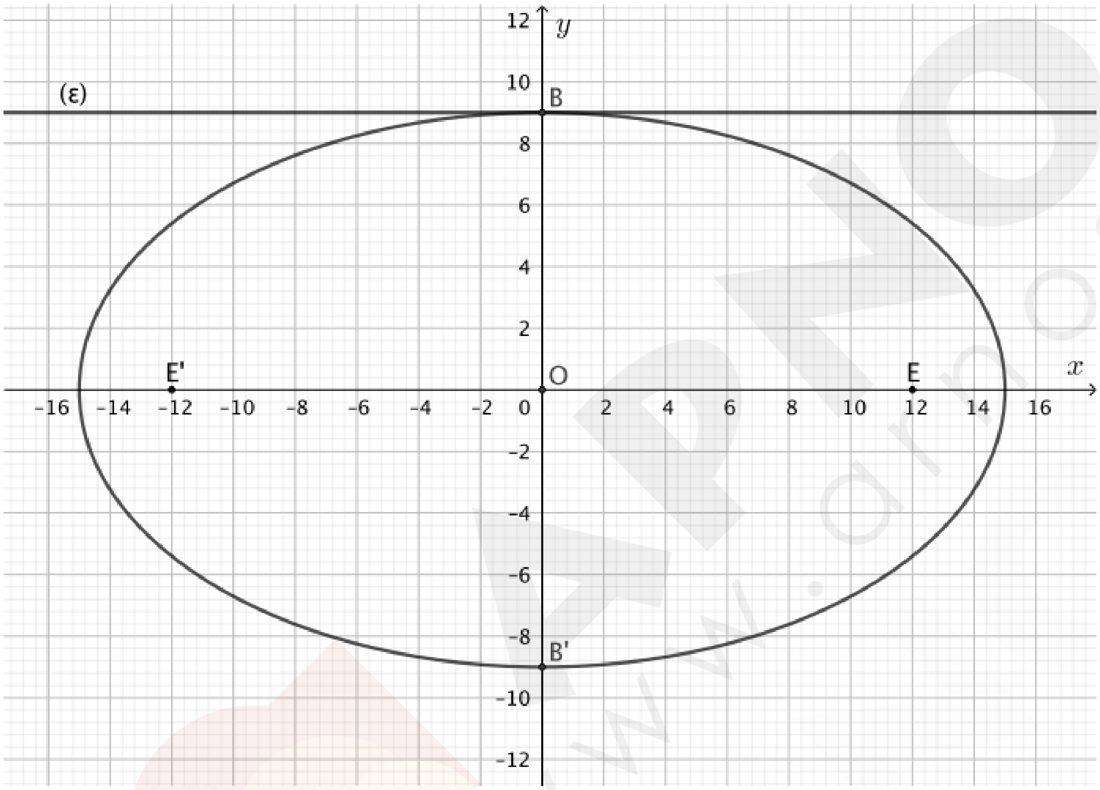
γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της $B(x_1,y_1)$ είναι:

$$\frac{xx_1}{225} + \frac{yy_1}{81} = 1$$

Αφού δίνεται ότι Β(0,9), η ζητούμενη εξίσωση θα είναι:

$$\frac{0x}{225} + \frac{9y}{81} = 1 \quad \text{ή} \quad y = 9$$

Η καμπύλη της έλλειψης, οι εστίες Ε, Ε΄ της και η εφαπτομένη (ε) απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα:



6. Θέμα 22268

Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται .... Οι εστίες της Ε και Ε' , έχουν συντεταγμένες Ε(....., ...) και Ε'(....., ...) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με ..... και η εκκεντρότητα της είναι ίση με ....».

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της Β(0,-2). (Μονάδες 10)

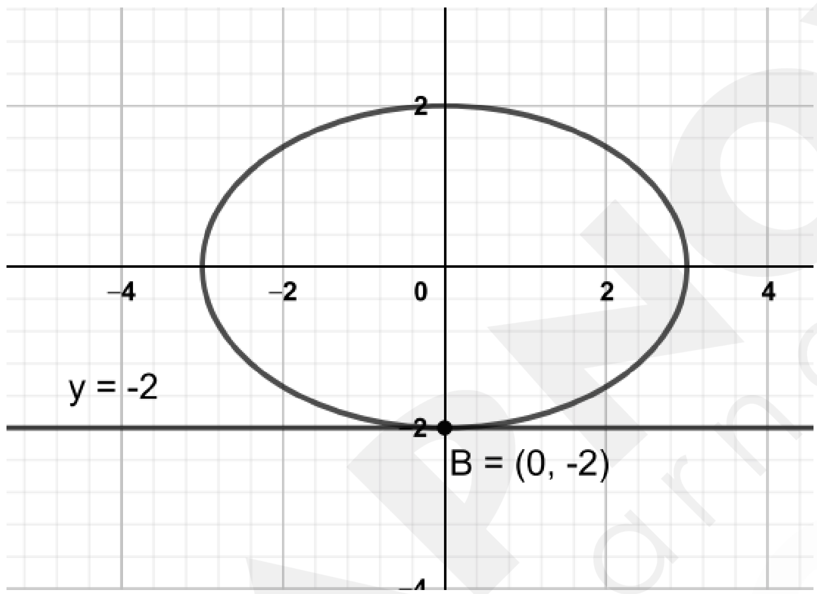
ΛΥΣΗ

Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\alpha^2 = 9$ και $\beta^2 = 4$. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε έλλειψη με εστίες στον άξονα x'x. Οι εστίες έχουν συντεταγμένες Ε(γ, 0) , και Ε'(-γ, 0), όπου $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{5}$. Η εκκεντρότητα της έλλειψης είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης είναι ίσο με $2\alpha = 2 \cdot 3 = 6$

α) «Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **έλλειψη**. Οι εστίες της Ε και Ε' , έχουν συντεταγμένες Ε(**$\sqrt{5}$, 0**) και Ε'(**-$\sqrt{5}$, 0**) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με **6** και η εκκεντρότητα της είναι ίση με $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ».

β)



Η εφαπτόμενη ευθεία σε σημείο με συντεταγμένες (x_1, y_1) της έλλειψης είναι της μορφής ε: $\frac{x\,x_1}{9} + \frac{y\,y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\cdot xx_1 + 9\cdot yy_1 = 36$. Δίνεται το σημείο επαφής Β(0,-2), οπότε αν θέσουμε στην εξίσωση της ευθείας ε όπου $x_1 = 0$ και $y_1 = -2$ θα έχουμε ε : $4\,x\cdot 0 + 9\,y\cdot(-2) = 36$ ή ε : $-18\,y = 36$ ή ε: $y = -2$.

7. Θέμα 22556

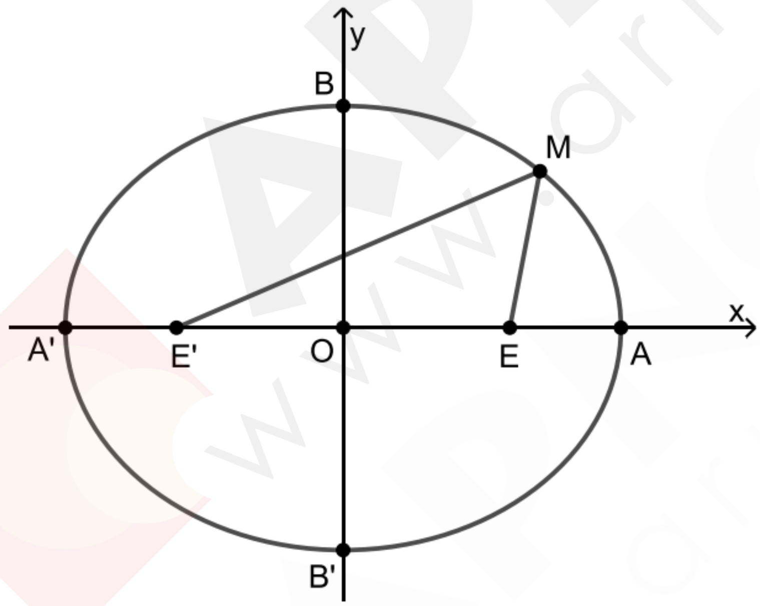
Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει κορυφές τα σημεία $A'(-5,0)$, $A(5,0)$, $B'(0,-4)$ και $B(0,4)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι $(A'A)=10$ και $(B'B)=8$. (Μονάδες 10)

ii. Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$. (Μονάδες 10)

β) Έστω M ένα σημείο της έλλειψης. Να αποδείξετε ότι $(ME')+(ME)=10$. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) i) Είναι $(\mathrm{A'A}) = |x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{A'}}| = |5+5| = 10$ και $(\mathrm{B'B}) = |y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{B'}}| = |4+4| = 8$,

άρα ο μεγάλος άξονας έχει μήκος $(\mathrm{A'A}) = 10$ και ο μικρός άξονας έχει μήκος $(\mathrm{B'B}) = 8$.

ii) Είναι $(\mathrm{A'A}) = 2\alpha$ ή $2\alpha = 10$ ή $\alpha = 5$

και $(\mathrm{B'B}) = 2\beta$ ή $2\beta = 8$ ή $\beta = 4$.

Επομένως

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

$5^2 = 4^2 + \gamma^2$

$\gamma^2 = 9$

$\gamma = 3$.

Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $\mathrm{E'}(-3, 0)$ και $\mathrm{E}(3, 0)$.

β) Επειδή το M είναι σημείο της έλλειψης, σύμφωνα με τον ορισμό της έλλειψης θα είναι

$(\mathrm{ME'}) + (\mathrm{ME}) = 2\alpha$ ή $(\mathrm{ME'}) + (\mathrm{ME}) = 10$.

8. Θέμα 22558

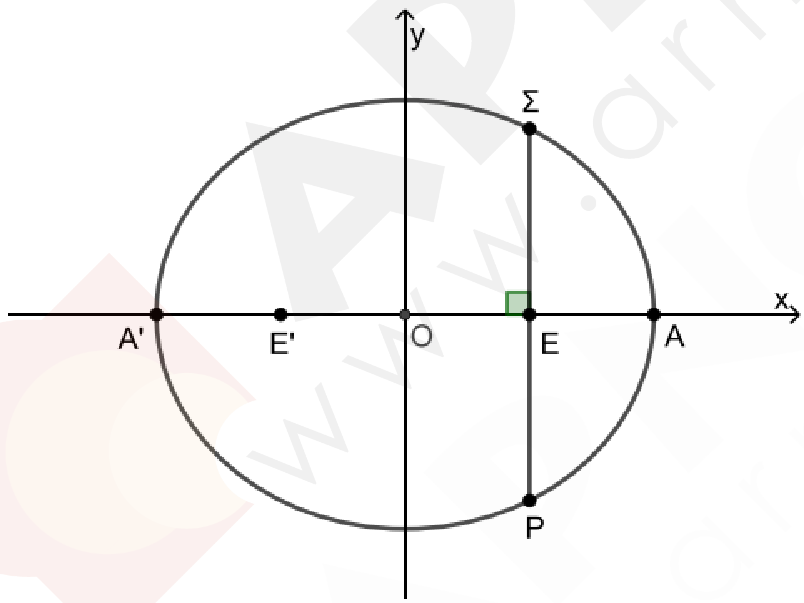
Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει εστίες τα σημεία $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $(A'A) = 8$.

α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. (Μονάδες 12)

β) Έστω Σ και P τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία $E(2,0)$. Επίσης το Σ έχει θετική τεταγμένη και το P αρνητική τεταγμένη.

i. Να αποδείξετε ότι $\Sigma(2,3)$ και $P(2,-3)$. (Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΣP. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$,

άρα $2\gamma = (E'E) = 4$ ή $\gamma = 2$.

Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $(A'A) = 8$,

άρα $2\alpha = (A'A) = 8$ ή $\alpha = 4$.

Επομένως $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = 4^2 - 2^2 = 12$.

Επειδή οι εστίες βρίσκονται στον άξονα x′x, η έλλειψη έχει εξίσωση της μορφής

$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, οπότε με αντικατάσταση προκύπτει $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

β) i) Από την εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, για $x=x_E=2$ βρίσκουμε:

$$\frac{2^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

$$\frac{1}{4}+\frac{y^2}{12}=1$$

$$3+y^2=12$$

$$y^2=9$$

$$y=3 \text{ ή } y=-3$$

Επειδή το Σ έχει θετική τεταγμένη και το P αρνητική, θα είναι $\Sigma(2,3)$ και $P(2,-3)$.

ii) Είναι $(\Sigma P)=|y_P-y_\Sigma|=|-3-3|=|-6|=6$.

9. Θέμα 22564

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$ και $C_2: \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}=1$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α(2,2) και Β(−2,2) ανήκουν και στις δύο ελλείψεις.

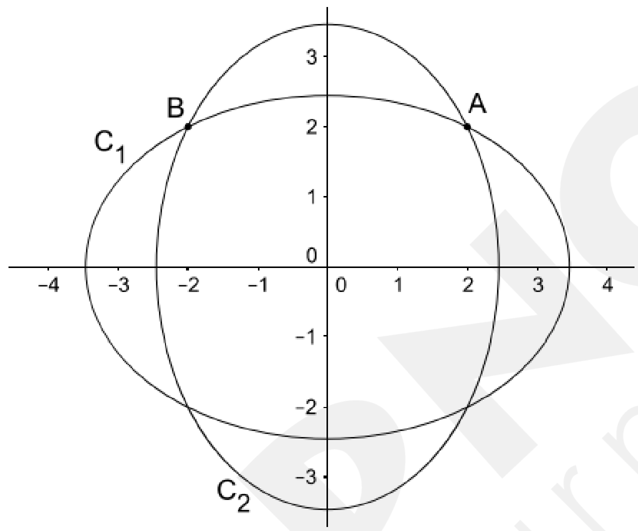
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο Α και η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο Β είναι αντίστοιχα

$$x+2y-6=0 \text{ και } -2x+y-6=0 \ .$$

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες ε_1, ε_2 είναι κάθετες. (Μονάδες 5)

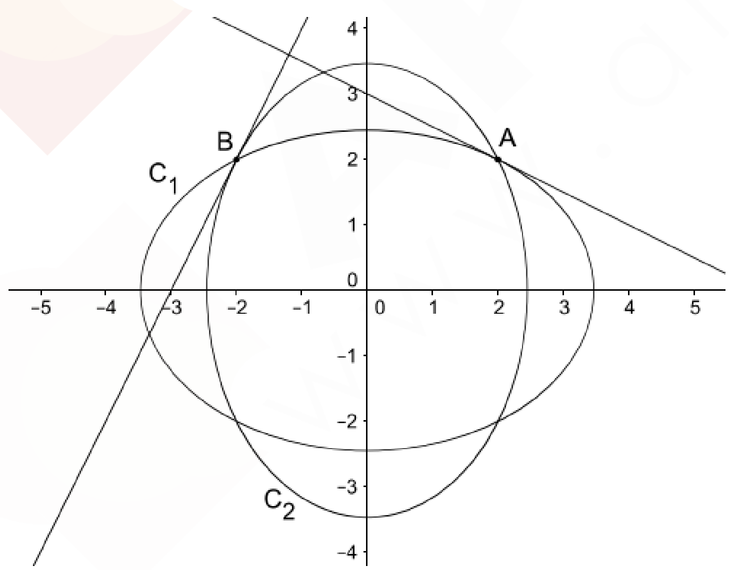


ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν τις εξισώσεις των δύο ελλείψεων αφού

$$\frac{2^2}{12}+\frac{2^2}{6}=\frac{4}{12}+\frac{4}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1 \quad \text{και} \quad \frac{2^2}{6}+\frac{2^2}{12}=\frac{4}{6}+\frac{4}{12}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

Το σημείο Β είναι συμμετρικό του σημείο Α ως προς τον άξονα $y'y$, επομένως θα ανήκει στις δύο ελλείψεις, αφού και το σημείο Α ανήκει στις δύο ελλείψεις.



β) Η εφαπτομένη ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο Α έχει εξίσωση:

$$\frac{2x}{12}+\frac{2y}{6}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{6}+\frac{2y}{6}=1 \Leftrightarrow x+2y=6 \Leftrightarrow x+2y-6=0.$$

Η εφαπτομένη ε_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο Β έχει εξίσωση:

$$\frac{-2x}{6}+\frac{2y}{12}=1 \Leftrightarrow \frac{-2x}{6}+\frac{y}{6}=1 \Leftrightarrow -2x+y=6 \Leftrightarrow -2x+y-6=0.$$

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε_1 είναι $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε_2 είναι $\lambda_2=2$.

Οι εφαπτομένες ε_1, ε_2 είναι κάθετες, γιατί $\lambda_1\lambda_2=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$.

Θέμα 4 – Κωδικοί:

20726, 22273

10. Θέμα 20726

Ένας κατασκευαστής μπιλιάρδων θέλει να κατασκευάσει ένα ελλειπτικό μπιλιάρδο όπως αυτό του παρακάτω σχήματος (σχήμα 1). Το περίγραμμα του μπιλιάρδου είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $\mathrm{E}(3,0)$ και $\mathrm{E}'(-3,0)$. Η μοναδική τρύπα του μπιλιάρδου έχει σχήμα κύκλου (ο μαύρος κύκλος στο σχήμα 1) με κέντρο το σημείο E'. Για να σχεδιάσει ο κατασκευαστής το περίγραμμα του μπιλιάρδου πάνω σε μία ξύλινη επίπεδη επιφάνεια, τοποθέτησε στα σημεία E και E' δύο καρφιά στα οποία έδεσε τις άκρες ενός σχοινιού μήκους 10 μονάδων μήκους. Στη συνέχεια με ένα μολύβι διατηρούσε το σχοινί τεντωμένο, ώστε αυτό, κατά την κίνησή του, να διαγράψει έλλειψη C όπως φαίνεται στο παρακάτω (σχήμα 2).

α) Να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα της έλλειψης C.

(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε την εξίσωση της έλλειψης C και να βρείτε την εκκεντρότητά της.

(Μονάδες 5)

γ) Ένας παίκτης τοποθετεί μια άσπρη μπάλα (ο άσπρος κύκλος στο σχήμα 1) ακριβώς στο σημείο E. Σκοπεύει να χτυπήσει την άσπρη μπάλα ώστε αφού αυτή προσκρούσει πρώτα στο ελλειπτικό περίγραμμα του μπιλιάρδου, στη συνέχεια να πέσει στην τρύπα. Αν θεωρήσουμε ότι ο παίκτης θα χτυπήσει με όση δύναμη απαιτείται για να φτάσει η μπάλα στην τρύπα και το χτύπημα θα είναι στο κέντρο της μπάλας ώστε αυτή να κυλά χωρίς να περιστρέφεται, να βρείτε σε ποιο σημείο της έλλειψης C πρέπει να σημαδέψει, ώστε με ένα μόνο χτύπημα η μπάλα να μπει στην τρύπα:

1) μόνο στα άκρα του μεγάλου άξονα

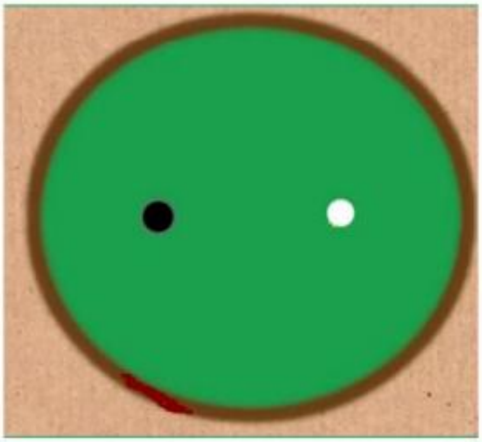
2) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα

3) μόνο στα άκρα του μικρού άξονα και στο ένα άκρο του μεγάλου άξονα

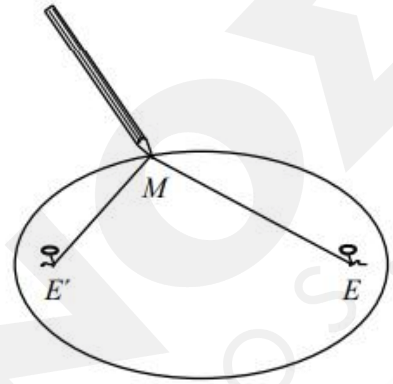
4) σε οποιοδήποτε σημείο της C εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα

Επιλέξτε τη μοναδική σωστή απαντήσεις αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

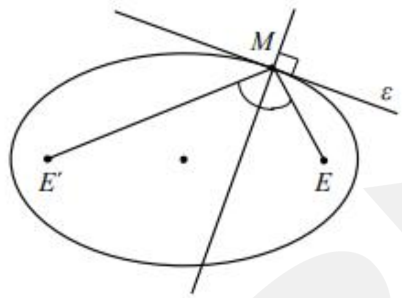
ΛΥΣΗ

α) Το μήκος του σχοινιού εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της έλλειψης από τις εστίες. Συνεπώς το άθροισμα αυτό είναι 10 μονάδες μήκους, που είναι και το μήκος του μεγάλου άξονα. Είναι $2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5$ και $\gamma = 3$, οπότε $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$. Συνεπώς το μήκος του μικρού άξονα είναι 8 μονάδες μήκους.

β) Η έλλειψη έχει εστίες στον άξονα xx' και η εξίσωσή της είναι $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

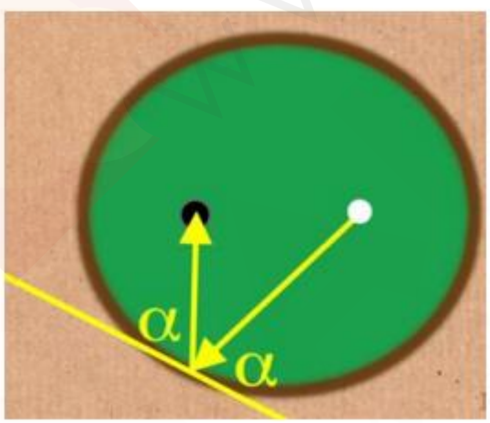
Η εκκεντρότητά της είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3}{5}$.

γ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης γνωρίζουμε ότι : Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής Μ διχοτομεί τη γωνία $E\hat{M}E'$, όπου E, E' οι εστίες της έλλειψης (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα).



Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή ένα ηχητικό κύμα ή μια φωτεινή ακτίνα που ξεκινούν από τη μία εστία μιας έλλειψης, ανακλώμενα σε αυτήν, διέρχονται από την άλλη εστία. Συνεπώς σε οποιοδήποτε σημείο της C και αν σημαδέψει θα πετύχει το στόχο του, εκτός από το ένα άκρο του μεγάλου άξονα, αφού τότε η μπάλα θα πέσει στην τρύπα χωρίς να χτυπήσει πρώτα στο περίγραμμα του μπιλιάρδου.

Σωστή απάντηση η 4).



11. Θέμα 22273

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας τις συντεταγμένες :

i. Των σημείων που η έλλειψη τέμνει τους άξονες x'x και y'y.

ii. Των εστιών Ε και Ε' της έλλειψης.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α(0 , 4) και εφάπτονται στη καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

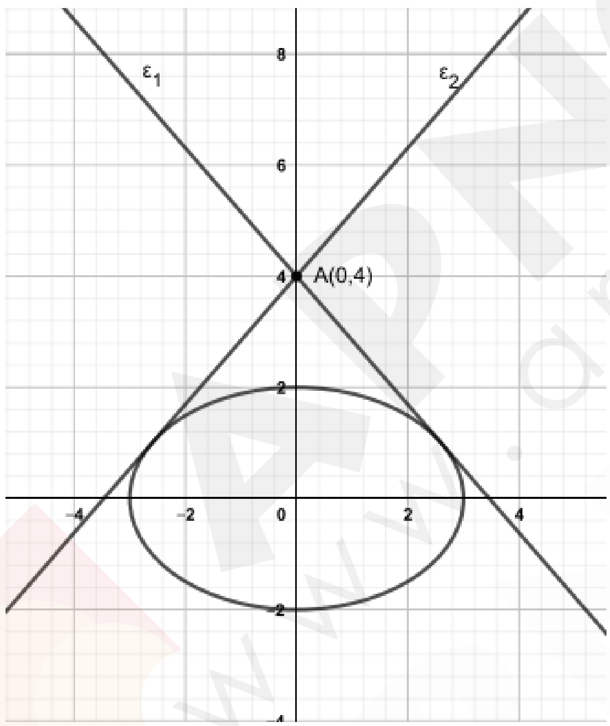
α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\alpha^2 = 9$ και $\beta^2 = 4$.

i. Για να βρούμε τα σημεία τομής της έλλειψης αυτής με τον άξονα x'x θέτουμε στην εξίσωση (1) y=0. Έτσι έχουμε $\frac{\chi^2}{9} = 1$ ή $x^2 = 9$, οπότε x =3 ή x= -3. Τα σημεία τομής με τον άξονα x'x είναι τα σημεία Α(3,0) και Α'(-3,0).

Αντίστοιχα, για να βρούμε τα σημεία τομής της έλλειψης αυτής με τον άξονα y'y θέτουμε στην εξίσωση (1) x=0. Έτσι έχουμε $\frac{y^2}{4} = 1$ ή $y^2 = 4$, οπότε y =2 ή y= -2. Τα σημεία τομής με τον άξονα y'y είναι τα σημεία Β(0,2) και Β'(0,-2).

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη με εστίες στον άξονα x′x. Οπότε οι εστίες έχουν συντεταγμένες Ε(γ, 0) , και Ε′(-γ, 0), όπου $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{5}$. Άρα οι εστίες της Ε, και Ε′ έχουν συντεταγμένες Ε($\sqrt{5}$, 0) και Ε′(-$\sqrt{5}$, 0).

β)



Το σημείο Α(0, 4) είναι εξωτερικό σημείο της έλλειψης, αφού είναι σημείο στον άξονα y′y και η έλλειψη που μας δόθηκε τέμνει τον άξονα y′y στα σημεία Β(0, 2) και Β′(0,-2). Θεωρούμε Μ(x_1, y_1) το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο Μ θα είναι της μορφής ε: $\frac{x\,x_1}{9} + \frac{y\,y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\,xx_1 + 9\,yy_1 = 36$. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(0 , 4), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε. Ισχύει δηλαδή $4\cdot 0\,x_1 + 9\cdot 4y_1 = 36 \Leftrightarrow y_1 = 1$ (2).

Επιπλέον το σημείο Μ(x_1, y_1) είναι σημείο της έλλειψης, οπότε ικανοποιεί την εξίσωση(1). Άρα ισχύει $\frac{x_1{}^2}{9} + \frac{y_1{}^2}{4} = 1$ (3), και λόγω της (2) η σχέση (3) μας δίνει

$$\frac{x_1{}^2}{9} + \frac{1^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1{}^2}{9} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ ή } x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Για $x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ και λόγω της (2) έχουμε $y_1 = 1$, έχουμε την εφαπτόμενη ε με εξίσωση

$$\varepsilon:\ 4\frac{3\sqrt{3}}{2}x + 9\ y = 36 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\,x + 3y = 12.$$

Για $x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 1$, οπότε η εφαπτόμενη ε έχει εξίσωση

$$\varepsilon:\ 4(-\frac{3\sqrt{3}}{2})x + 9\ y = 36 \Leftrightarrow -2\sqrt{3}\,x + 3y = 12.$$

Άρα οι δύο εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το σημείο Α(0, 4) είναι οι ε_1 : $2\sqrt{3}\,x + 3y = 12$ και ε_2 : $-2\sqrt{3}\,x + 3y = 12$.