

Κεφ. 3.2. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 – Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course Των Μαθηματικών, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύφος της Τράπεζας.

Θέμα 1 – Κωδικός:

21152

1. Θέμα 21152

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- i. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.
- ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = x_0$.
- iii. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.
- iv. Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει εστία το σημείο $E(1, 0)$.
- v. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

(Μονάδες 10)

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

(Μονάδες 15)

Θέμα 2 – Κωδικοί:

18242, 20235, 21306, 21307, 22190, 22267

2. Θέμα 18242

Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C .

(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της $M(4,4)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C , τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε).

(Μονάδες 9)

Έξυπνα & Εύκολα!

3. Θέμα 20235

Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $(\frac{1}{8}, 1)$ είναι

παράλληλη στην ευθεία $\epsilon: 8x - 2y + 3 = 0$. (Μονάδες 15)

4. Θέμα 21306

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x' , κορυφή $O(0,0)$ και εστία $E(2,0)$, όπως στο παρακάτω σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$.

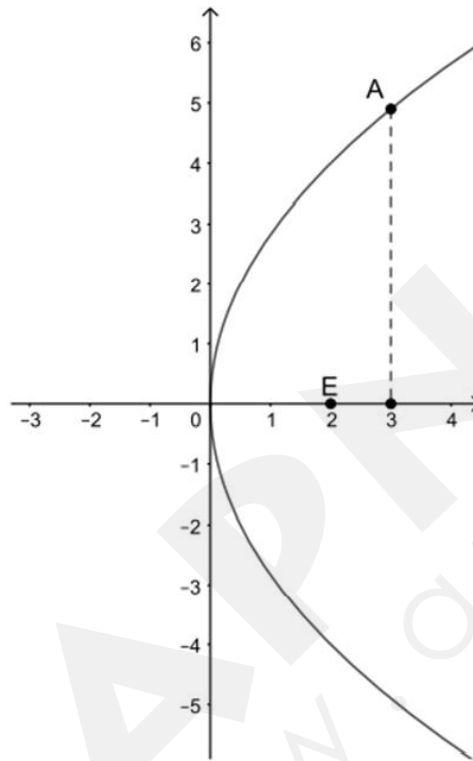
(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη (ϵ) της παραβολής στο σημείο A. (Μονάδες 09)

Έξυπνα & Εύκολα!


5. Θέμα 21307

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(0, 3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ϵ_1) και (ϵ_2) της παραβολής στα σημεία $A(6, 3)$ και $B(-6, 3)$, αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$. (Μονάδες 08)
- γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ϵ_1) και (ϵ_2) . (Μονάδες 05)

Έξυπνα & Εύκολα!

6. Θέμα 22190

Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση

$$y^2 = x \quad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ).

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο A(1,-1) είναι σημείο της παραβολής.

(Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της A(1,-1).

(Μονάδες 08)

7. Θέμα 22267

Δίνεται η εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Η εστία της E, έχει συντεταγμένες E(.....,) και η διευθετούσα έχει εξίσωση».

(Μονάδες 09)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο A(1, -2).

(Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα x'x είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής.

(Μονάδες 08)

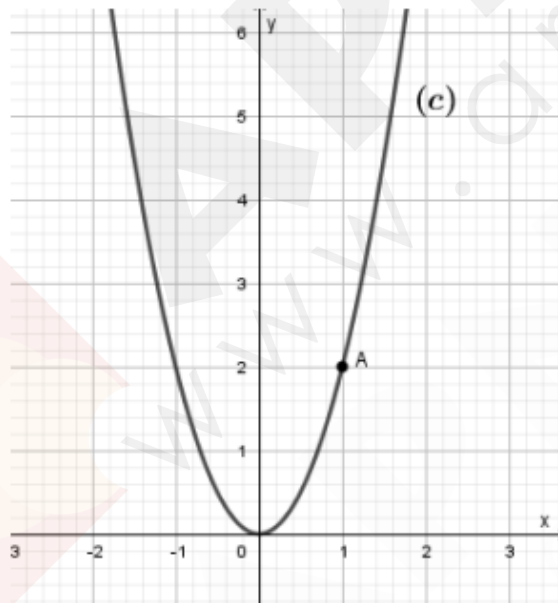
Έξυπνα & Εύκολα!

Θέμα 3 – Κωδικός:

20866

8. Θέμα 20866

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραβολής (c), που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα της παραβολής.

(Μονάδες 04)

Έξυπνα & Εύκολα!

γ)

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο $A'(-1,2)$.

(Μονάδες 08)

ii. Να βρείτε το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$ και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε.

(Μονάδες 07)

Θέμα 4 – Κωδικοί:

15394, 18245, 18372, 18570, 18870, 20092, 21883, 22275, 22465

9. Θέμα 15394

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 12x$ με εστία E και η εφαπτομένη ευθεία (ε) της (C) στο σημείο της $M(1,2\sqrt{3})$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Από το σημείο M φέρνουμε ευθεία $t't$ παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο H .

α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B, H, E .

(Μονάδες 6)

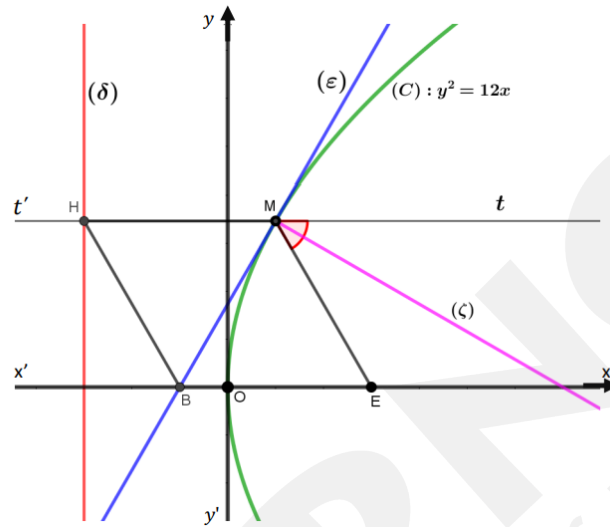
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $MEBH$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία $E\hat{M}t$.

(Μονάδες 6)

Έξυπνα & Εύκολα!


10. Θέμα 18245

Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ .

Έξυπνα & Εύκολα!

δ) Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ . Αν από το M διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ , να δείξετε ότι το M ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της E .

(Μονάδες 7)

11. Θέμα 18372

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -2)$, $B(0, -4)$ και την παραβολή $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 09)

β) Να βρείτε το σημείο M της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην AB .

(Μονάδες 08)

γ) Αν $M(1, -2)$ και K είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABMK$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 08)

12. Θέμα 18570

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ και η ευθεία (ε): $3x - 4y = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του.

(Μονάδες 05)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία A, B

i. Να αποδείξετε ότι $-35 < \mu < 15$.

(Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του. (Μονάδες 04)

iii. Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓAB να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή AB .

(Μονάδες 09)

Έξυπνα & Εύκολα!

13. Θέμα 18870

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$, η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο $A(4,4)$ και η AK κάθετη στην (ε). Μία φωτεινή ακτίνα (ζ), ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο A και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο M . Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ε) και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα AM με την (ε) είναι ίσες, τότε:

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και το σημείο B στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

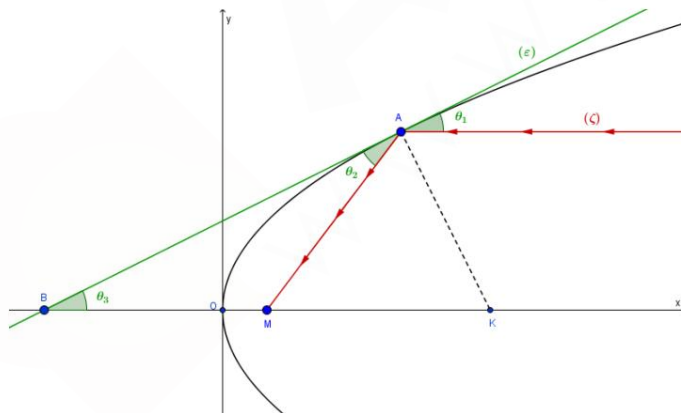
(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 07)

δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής.

(Μονάδες 06)



Έξυπνα & Εύκολα!

14. Θέμα 20092

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M(\frac{1}{4}, 1)$ και η ευθεία ϵ του επιπέδου με εξίσωση

$$\epsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0.$$

α)

- i. Να δείξετε ότι η ευθεία ϵ δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόστασή του σημείου M από την ϵ . (Μονάδες 07)
- ii. Αν η ευθεία ϵ τέμνει τους άξονες x' και y' στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $(M\Gamma\Delta) = 5$ τ.μ. (Μονάδες 05)

β)

- i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που εφάπτεται της παραβολής και είναι παράλληλη στην ευθεία ϵ .
- ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών ζ και ϵ ; (Μονάδες 05)

Έξυπνα & Εύκολα!

15. Θέμα 21883

Δίνεται η παραβολή $C: x^2=4y$ και η ευθεία $\epsilon: y=x-2$.

α) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής C και της ευθείας ϵ . (Μονάδες 8)

γ) Αν $M(x,y)$ είναι σημείο της παραβολής, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του M από την ευθεία ϵ είναι $d(M,\epsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}$

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου M από την ευθεία ϵ καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου M της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία. (Μονάδες 6)

16. Θέμα 22275

Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της E και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ .

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0, 2)$ και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

Έξυπνα & Εύκολα!

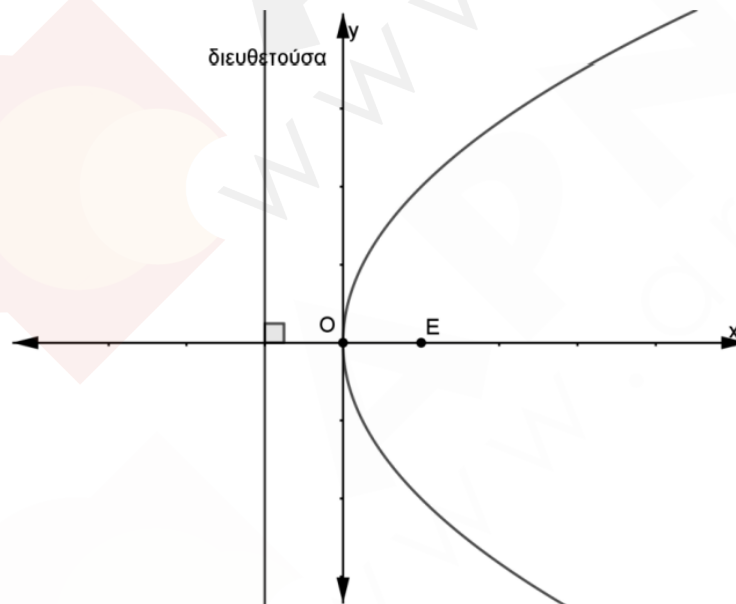
17. Θέμα 22465

Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον x' . Η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η $E(2,0)$, η διευθετούσα της είναι η $\delta : x=-2$ και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2=8x$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(2,4)$ είναι η $\epsilon : y=x+2$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ϵ στο σημείο της $A(2,4)$. (Μονάδες 7)



Έξυπνα & Εύκολα!