

Κεφ. 3.2. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 – Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course Των Μαθηματικών, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύψος της Τράπεζας.

Θέμα 1 – Κωδικός:

21152

1. Θέμα 21152

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- i. Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.
- ii. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = x_0$.
- iii. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.
- iv. Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ έχει εστία το σημείο $E(1, 0)$.
- v. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

(Μονάδες 10)

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

i. Σωστό

Σελίδα 19 σχολικό βιβλίο.

ii. Λάθος

Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα x' έχει εξίσωση $y = y_0$.

iii. Λάθος

Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.

iv. Σωστό

Σελίδα 91 σχολικό βιβλίο.

v. Σωστό

Σελίδα 83 σχολικό βιβλίο.

β) Σελίδα 60 σχολικό βιβλίο – Εξίσωση ευθείας.

Έξυπνα & Εύκολα!

Θέμα 2 – Κωδικοί:**18242, 20235, 21306, 21307, 22190, 22267****2. Θέμα 18242**

Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C .

(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της $M(4,4)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C , τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε).

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η παραβολή C έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$ όπου $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$, οπότε

η εστία της έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ δηλαδή $E(1,0)$ και διευθετούσα με εξίσωση

$x = -\frac{p}{2}$ δηλαδή $\delta: x = -1$.

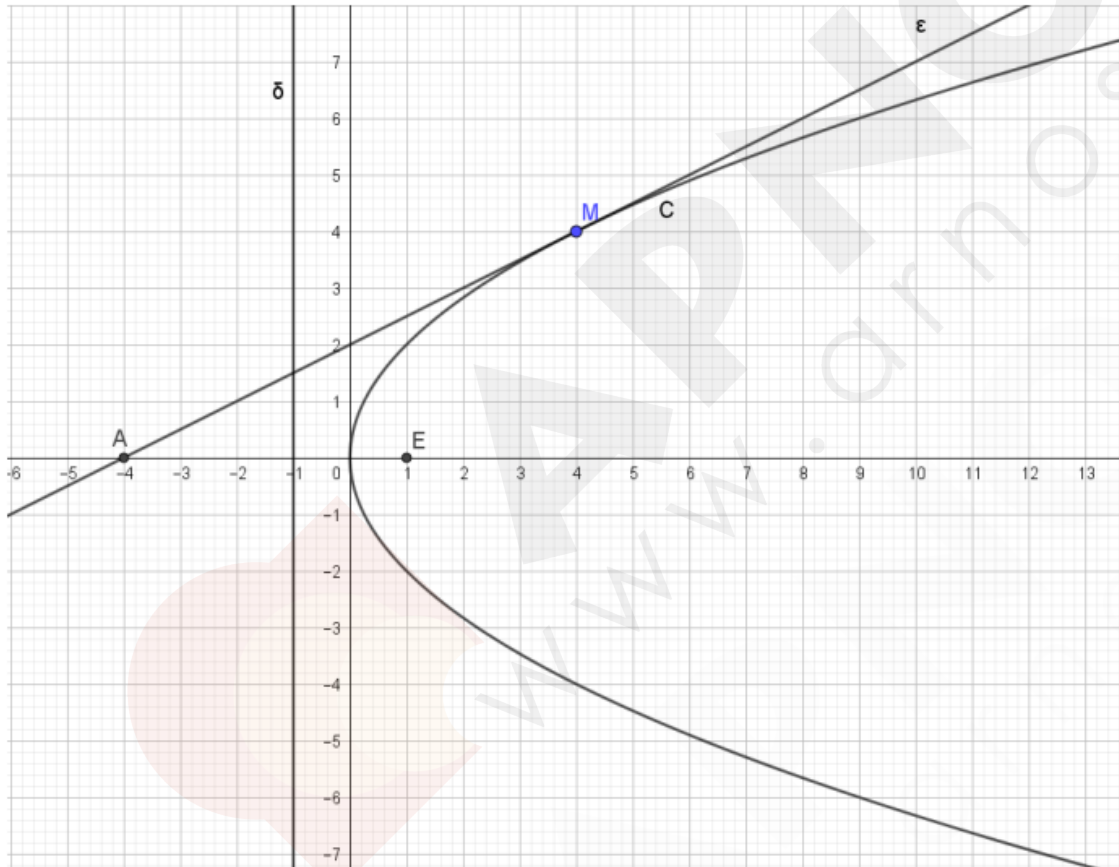
Έξυπνα & Εύκολα!

β) Η ζητούμενη εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση της μορφής $yy_1 = p(x+x_1)$ δηλαδή

$$y \cdot 4 = 2(x+4) \Leftrightarrow 2y = x+4.$$

γ) Η ευθεία (ε) εκτός από το $M(4,4)$ διέρχεται και από το σημείο $A(-4,0)$.

Η παραβολή C , η διευθετούσα δ και η ευθεία (ε) φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Έξυπνα & Εύκολα!

3. Θέμα 20235

Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $(\frac{1}{8}, 1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\epsilon: 8x - 2y + 3 = 0$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι: C: $y^2 = 2 \cdot 4x$, οπότε $p = 4$, άρα $E(\frac{p}{2}, 0) = (2, 0)$ είναι η εστία και

$\delta: x = -\frac{p}{2}$ ή $x = -2$, είναι η διευθετούσα.

β) Η εφαπτομένη της παραβολής C στο $(\frac{1}{8}, 1)$ είναι:

$$\epsilon_1: yy_1 = p(x + x_1) \text{ ή } \epsilon_1: y \cdot 1 = 4(x + \frac{1}{8}) \text{ ή } \epsilon_1: y = 4x + \frac{1}{2} \text{ με } \lambda_{\epsilon_1} = 4.$$

$$\text{Επίσης για την ευθεία } \epsilon: 8x - 2y + 3 = 0 \text{ είναι: } \lambda_{\epsilon} = -\frac{A}{B} = -\frac{8}{-2} = 4.$$

Οπότε $\lambda_{\epsilon_1} = \lambda_{\epsilon}$ επομένως η $\epsilon_1 \parallel \epsilon$.

Έξυπνα & Εύκολα!

4. Θέμα 21306

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x' , κορυφή $O(0,0)$ και εστία $E(2,0)$, όπως στο παρακάτω σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$.

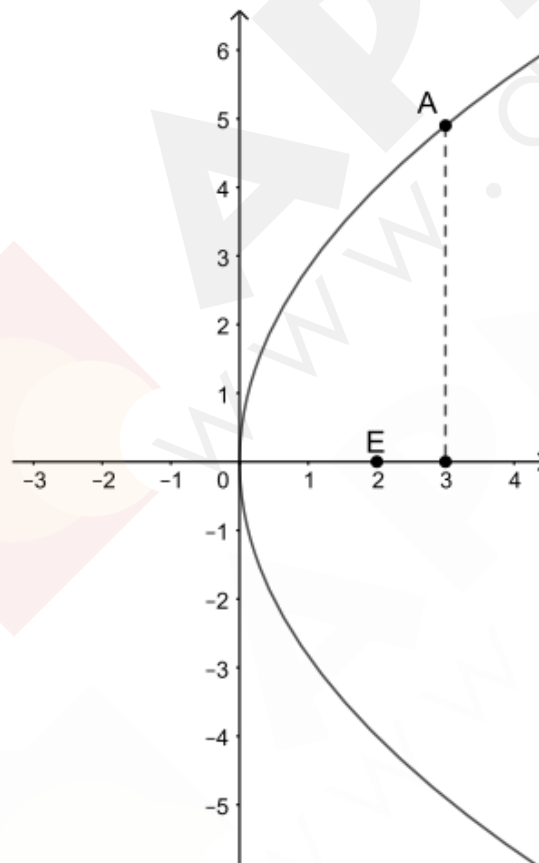
(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της παραβολής στο σημείο A .

(Μονάδες 09)



Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x' και κορυφή $O(0,0)$ έχει εξίσωση $y^2 = 2px$ και εστία $E(\frac{p}{2}, 0)$.

Άρα $\frac{p}{2} = 2$ ή $p = 4$ και η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 2 \cdot 4 \cdot x$ ή $y^2 = 8x$.

Το σημείο $A(3, y_A)$ της παραβολής έχει $y_A > 0$, εφόσον βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy . Οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής.

Επομένως $y_A^2 = 8 \cdot 3$ ή $y_A^2 = 24$ ή $y_A = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

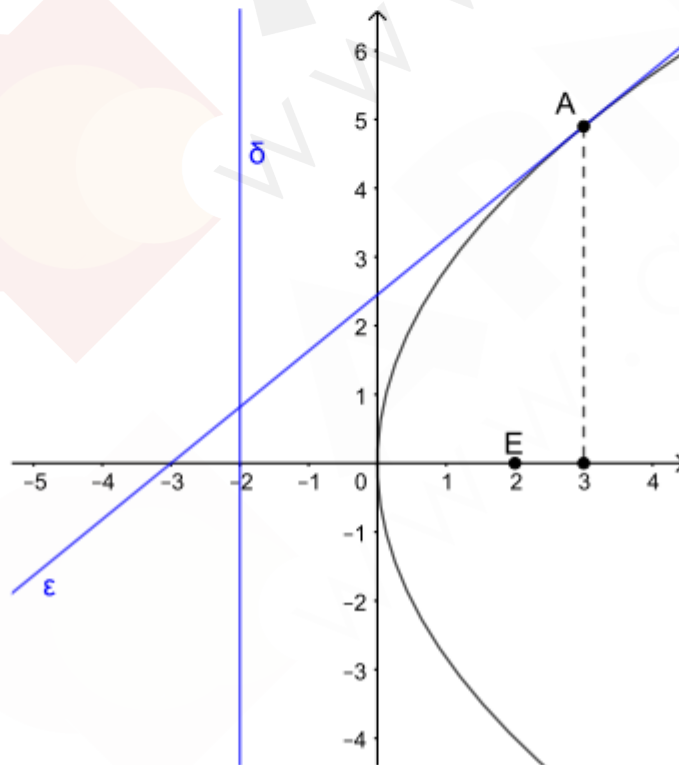
β) Η διευθετούσα (δ) της παραβολής είναι η κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{p}{2}$. Για $p = 4$ δηλαδή είναι η $x = -2$, την οποία σχεδιάζουμε στο παρακάτω σχήμα.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο της Α έχει εξίσωση:

$$yy_A = p(x + x_A)$$

Αντικαθιστούμε ως x_A και y_A τις συντεταγμένες του σημείου Α και $p = 4$ και παίρνουμε:

$$2\sqrt{6}y = 4(x + 3) \text{ ή } 2\sqrt{6}y = 4x + 12 \text{ ή } 4x - 2\sqrt{6}y + 12 = 0 \text{ ή } 2x - \sqrt{6}y + 6 = 0.$$



Έξυπνα & Εύκολα!

5. Θέμα 21307

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(0, 3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ϵ_1) και (ϵ_2) της παραβολής στα σημεία $A(6, 3)$ και $B(-6, 3)$, αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$. (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ϵ_1) και (ϵ_2) . (Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Για την παραβολή $x^2 = 12y$ ή $x^2 = 2 \cdot 6y$ το $p = 6$, άρα η εστία της είναι το $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$ ή $E(0, 3)$.

Το σημείο $(x_0, 3)$ ανήκει στην παραβολή, άρα:

$$x_0^2 = 12 \cdot 3 \text{ ή } x_0^2 = 36 \text{ ή } (x_0 = 6 \text{ ή } x_0 = -6)$$

Επομένως $A(6, 3)$ και $B(-6, 3)$ είναι τα ζητούμενα σημεία.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της (x_1, y_1) έχει εξίσωση:

$$xx_1 = p(y + y_1)$$

Για την (ϵ_1) με σημείο επαφής το $A(6, 3)$ αντικαθιστούμε ως x_1 και y_1 τις συντεταγμένες του σημείου A και $p = 6$:

$$6x = 6(y + 3) \text{ ή } 6x = 6y + 18 \text{ ή } x = y + 3 \text{ ή } y = x - 3$$

Για την (ϵ_2) με σημείο επαφής το $B(-6, 3)$ αντικαθιστούμε ως x_1 και y_1 τις συντεταγμένες του σημείου B και $p = 6$:

$$-6x = 6(y + 3) \text{ ή } -6x = 6y + 18 \text{ ή } -x = y + 3 \text{ ή } y = -x - 3$$

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Βρίσκουμε το σημείο τομής των (ϵ_1) : $y = x - 3$ και (ϵ_2) : $y = -x - 3$ λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -x - 3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} y = x - 3 \\ 2y = -6 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} -3 = x - 3 \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των (ϵ_1) και (ϵ_2) είναι το σημείο $(0, -3)$.

6. Θέμα 22190

Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση

$$y^2 = x \quad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ).

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο A(1,-1) είναι σημείο της παραβολής.

(Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της A(1,-1).

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Αρχικά υπολογίζουμε την παράμετρο p της παραβολής. Είναι:

$$2p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

Η εστία E της παραβολής έχει συντεταγμένες

$$E\left(\frac{p}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$$

Έξυπνα & Εύκολα!

Η διευθετούσα (δ) της παραβολής έχει εξίσωση

$$x = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{4}$$

β) Εξετάζουμε αν οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής. Για $x = 1$ και $y = -1$ είναι:

$$(-1)^2 = 1$$

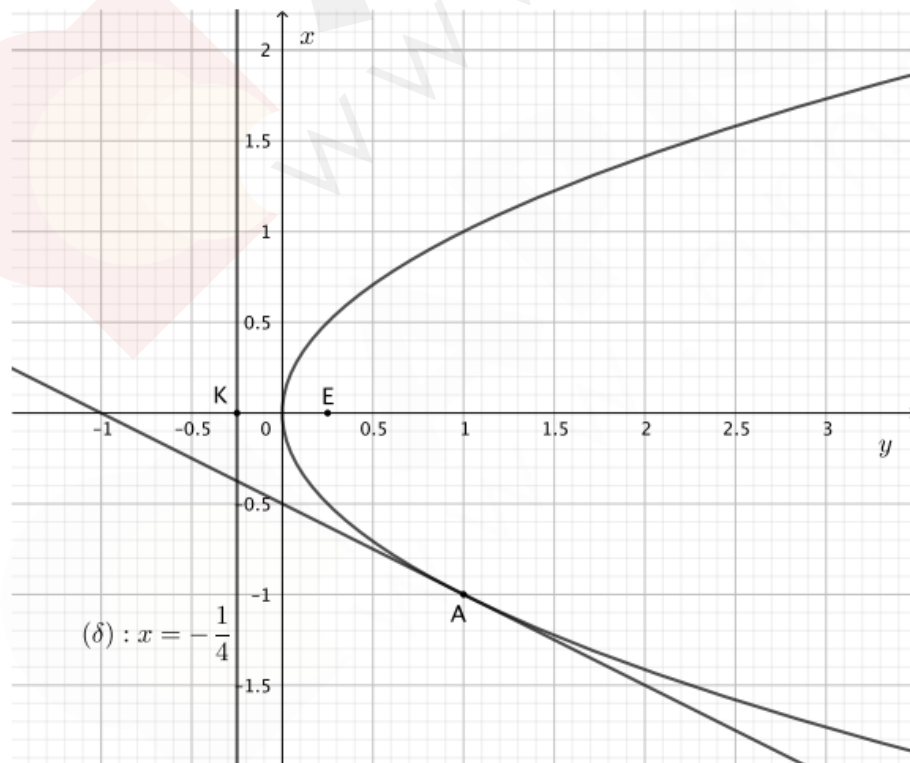
Η τελευταία ισότητα είναι αληθής, οπότε το σημείο Α είναι σημείο της παραβολής.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ είναι:

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

Αφού δίνεται $A(1, -1)$, η ζητούμενη εξίσωση θα είναι:

$$-1 \cdot y = \frac{1}{2}(x + 1) \quad \text{ή} \quad x + 2y + 1 = 0$$



Έξυπνα & Εύκολα!

7. Θέμα 22267

Δίνεται η εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες $E(\dots, \dots)$ και η διευθετούσα έχει εξίσωση».

(Μονάδες 09)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο $A(1, -2)$.

(Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής.

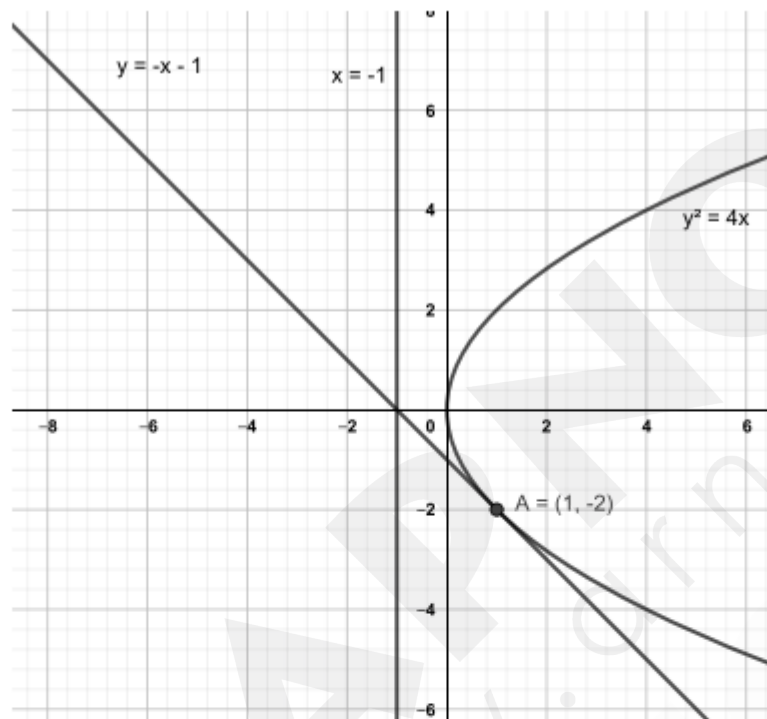
(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $y^2 = 2px$, όπου $2p = 4$, άρα $p = 2$. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε παραβολή με εστία στον άξονα $x'x$. Η Εστία της είναι το σημείο $E(\frac{p}{2}, 0)$ και η διευθετούσα της έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$.

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή**. Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες $E(1, 0)$ και η διευθετούσα έχει εξίσωση $x = -1$ ».

Έξυπνα & Εύκολα!



β) Η εφαπτόμενη ευθεία σε σημείο με συντεταγμένες (x_1, y_1) της παραβολής είναι της μορφής : $yy_1 = p(x+x_1)$ και επειδή $p = 2$ η εφαπτόμενη ε θα είναι ε: $yy_1 = 2(x+x_1)$. Δίνεται το σημείο επαφής $A(1, -2)$, οπότε η εξίσωση της ευθείας ε για $x_1 = 1$ και $y_1 = -2$ θα είναι ε: $-2y = 2(x+1)$ ή ε: $y = -x - 1$.

γ) Για να βρω το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ θέτω στην εξίσωση της ευθείας ε όπου $y = 0$. Οπότε έχω $-x - 1 = 0$ ή $x = -1$, δηλαδή το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $(-1, 0)$, το οποίο είναι σημείο της διευθετούσας αφού η εξίσωση της διευθετούσας είναι η $x = -1$.

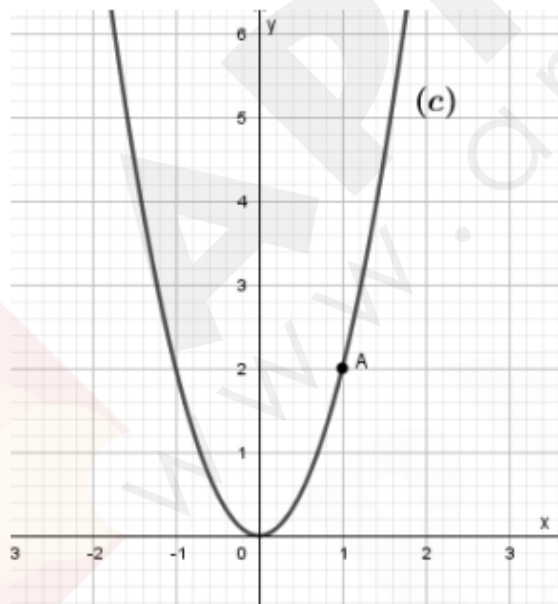
Έξυπνα & Εύκολα!

Θέμα 3– Κωδικός:

20866

8. Θέμα 20866

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραβολής (c), που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα της παραβολής.

(Μονάδες 04)

Έξυπνα & Εύκολα!

γ)

- i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής στο σημείο $A'(-1,2)$.
(Μονάδες 08)
- ii. Να βρείτε το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$ και στη συνέχεια να την σχεδιάσετε.

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α) Ως γνωστόν, η παραβολή που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον $y'y$ έχει εξίσωση την $x^2 = 2py$. Επιπλέον, έχει εστία το σημείο $E(0, \frac{p}{2})$ και διευθετούσα την ευθεία $y = -\frac{p}{2}$.

Επειδή η παραβολή διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ συμπεραίνουμε ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της. Επομένως είναι: $1^2 = 2p \cdot 2 \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$

Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι η (c): $x^2 = \frac{1}{2}y$.

Επίσης, η παραβολή έχει εστία το σημείο $E(0, \frac{1}{8})$ και διευθετούσα την ευθεία $y = -\frac{1}{8}$.

β) Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$. Είναι γνωστό ότι τα συμμετρικά σημεία ως προς τον άξονα $y'y$ έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη. Αν λοιπόν $A'(x, y)$ είναι το συμμετρικό σημείο του A , τότε είναι $A'(-1,2)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ)

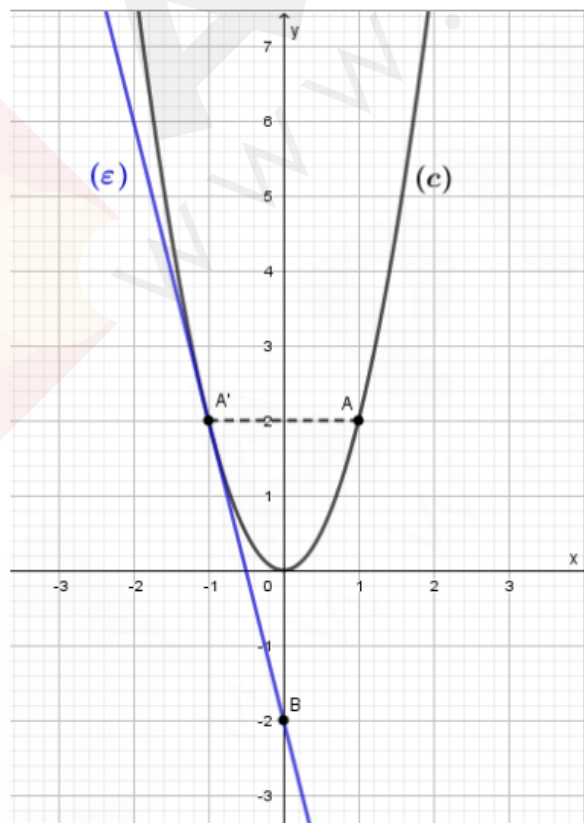
- i. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι $x \cdot x_1 = p(y + y_1)$.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της παραβολής (c): $x^2 = \frac{1}{2}y$ στο σημείο της $A'(-1, 2)$, είναι:

$$x \cdot (-1) = \frac{1}{4}(y + 2) \Leftrightarrow -4x = y + 2 \Leftrightarrow y = -4x - 2$$

- ii. Για $x = 0$, η (ε): $y = -4x - 2$ γίνεται $y = -4 \cdot 0 - 2 = -2$.

Επομένως, το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $B(0, -2)$. Για τον σχεδιασμό της ευθείας (ε) αρκεί να φέρουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A'(-1, 2)$ και $B(0, -2)$.



Έξυπνα & Εύκολα!

Θέμα 4 – Κωδικοί:**15394, 18245, 18372, 18570, 18870, 20092, 21883, 22275, 22465****9. Θέμα 15394**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 12x$ με εστία E και η εφαπτομένη ευθεία (ϵ) της (C) στο σημείο της $M(1, 2\sqrt{3})$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Από το σημείο M φέρνουμε ευθεία $t't$ παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, η οποία τέμνει την διευθετούσα (δ) στο σημείο H .

α) Να αποδείξετε ότι η (ϵ) έχει εξίσωση $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B , H , E .

(Μονάδες 6)

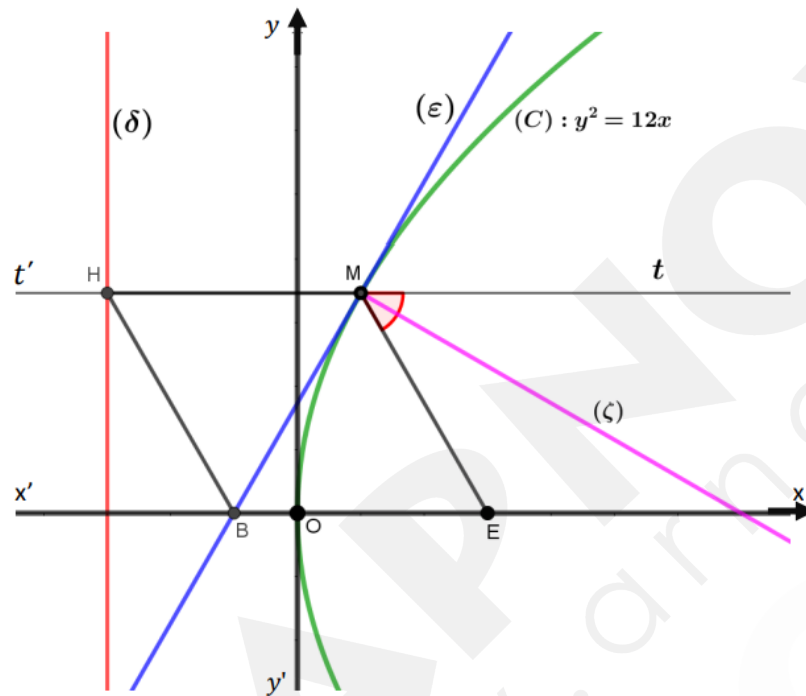
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $MEBH$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) η οποία διχοτομεί την γωνία $\widehat{EMt}$.

(Μονάδες 6)

Έξυπνα & Εύκολα!



ΛΥΣΗ

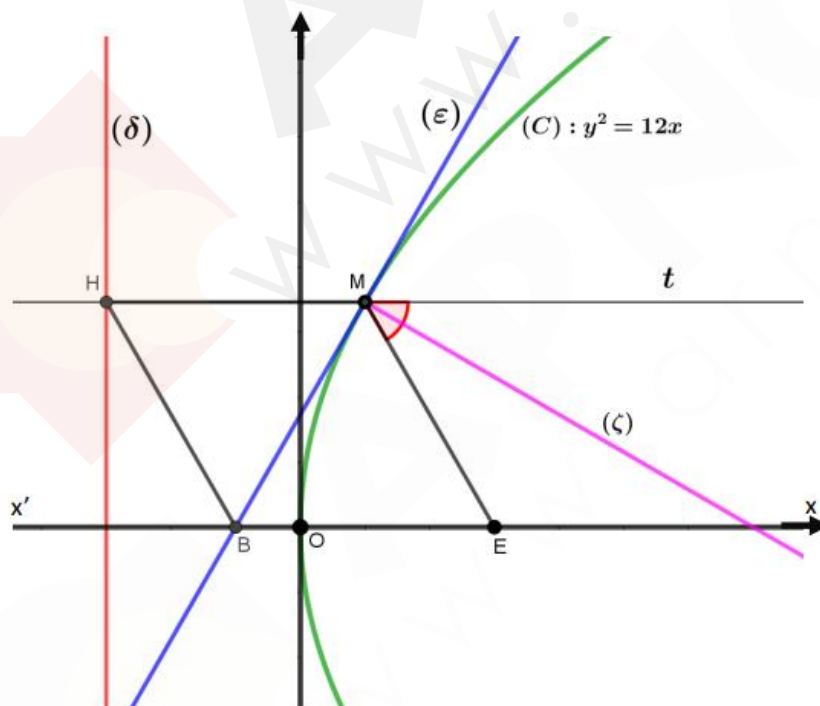
- α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $y_1 y = p(x + x_1)$. Αλλά $2p = 12$, άρα $p = 6$. Όστε (ε): $2\sqrt{3} \cdot y = 6(x + 1)$. Έτσι $y = \frac{3}{\sqrt{3}}(x + 1)$ άρα $y = \sqrt{3}(x + 1)$, τελικά $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$.
- β) Η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$, άρα είναι (δ): $x = -3$ έτσι είναι $H(-3, 2\sqrt{3})$ και η εστία E έχει συντεταγμένες $E(\frac{p}{2}, 0)$, άρα $E(3, 0)$. Επίσης για $y = 0$ από την εξίσωση της (ε) παίρνουμε $0 = \sqrt{3}(x + 1)$, άρα $x = -1$. Όστε $B(-1, 0)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Βρίσκουμε τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ME και BH. Είναι

$$\lambda_{ME} = \frac{2\sqrt{3} - 0}{1 - 3} = -\sqrt{3} \text{ και } \lambda_{HB} = \frac{2\sqrt{3} - 0}{-3 - (-1)} = -\sqrt{3}. \text{ Όστε } ME \text{ παράλληλη στην } HB. \text{ Άρα το } ME \text{ BH είναι παραλληλόγραμμο. Αλλά από τον ορισμό της παραβολής είναι } MH = ME. \text{ Παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, είναι ρόμβος.}$$

δ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής, γνωρίζουμε ότι η ευθεία που είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε) στο σημείο επαφής M, διχοτομεί την γωνία $\widehat{EMt}$ όπου E η εστία της παραβολής. Αρκεί λοιπόν να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην (ε) στο M. Αλλά $\lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\zeta} = -1$, έτσι $\lambda_{\zeta} = -\frac{1}{\lambda_{\varepsilon}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Όστε $(\zeta): y - 2\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$, άρα είναι $(\zeta): y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ και τελικά $(\zeta): y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{7\sqrt{3}}{3}$.



Έξυπνα & Εύκολα!

10. Θέμα 18245

Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 4x$ και η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y + \lambda^2 + 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής C .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει ευθεία ε_λ που δεν διέρχεται από το $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ .

(Μονάδες 6)

δ) Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην παραπάνω διευθετούσα δ . Αν από το M διέρχεται μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ , να δείξετε ότι το M ανήκει στον κύκλο που έχει κέντρο την κορυφή της παραβολής C και διέρχεται από την εστία της E .

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Η παραβολή C έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$ όπου $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$, οπότε

η εστία της έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ δηλαδή $E(1,0)$ και διευθετούσα με εξίσωση

$x = -\frac{p}{2}$ δηλαδή $\delta : x = -1$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Η (1) είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ όπου $A = \lambda^2 - 1$, $B = 2\lambda$, $\Gamma = \lambda^2 + 1$.

Είναι $A = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$ και $B = 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$. Επειδή δεν υπάρχει τιμή του λ για την οποία να μηδενίζονται ταυτόχρονα τα A και B , η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επίσης $\Gamma = \lambda^2 + 1 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οπότε δεν διέρχεται από το $O(0,0)$.

γ) Για $\lambda \neq 0$ η (1) παριστάνει ευθεία που δεν είναι παράλληλη στον yy' και επομένως δεν μπορεί να είναι η διευθετούσα δ .

Για $\lambda = 0$ η (1) γίνεται $x = 1$ που δεν είναι η διευθετούσα δ .

Συνεπώς η διευθετούσα της παραβολής δεν ανήκει στην οικογένεια ευθειών ε_λ .

δ) Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στη δ , δηλαδή $\alpha \neq -1$ και διέρχεται από αυτό μόνο μία ευθεία από την οικογένεια ευθειών ε_λ , δηλαδή οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την (1) για μία και μόνο τιμή του λ , συνεπώς ισχύει $\lambda^2 \alpha - \alpha + 2\lambda \beta + \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)\lambda^2 + 2\lambda \beta + 1 - \alpha = 0$ για μία και μόνο τιμή του λ . Η εξίσωση $(\alpha + 1)\lambda^2 + 2\lambda \beta + 1 - \alpha = 0$ είναι 2ου βαθμού ως προς λ , αφού $\alpha \neq -1$ και για να επαληθεύεται για μία μόνο τιμή του λ , πρέπει και αρκεί $\Delta = 0$.

Είναι $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\beta)^2 - 4(\alpha + 1)(1 - \alpha) = 0 \Leftrightarrow 4\beta^2 - 4 + 4\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$

που σημαίνει ότι το σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο, χωρίς το σημείο $(-1, 0)$, αφού $\alpha \neq -1$. Ο κύκλος αυτός έχει κέντρο το $O(0,0)$ δηλαδή την κορυφή της παραβολής C και ακτίνα $\rho = 1$, οπότε διέρχεται από την εστία E , αφού $(OE) = 1 = \rho$.

Έξυπνα & Εύκολα!

11. Θέμα 18372

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -2)$, $B(0, -4)$ και την παραβολή $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε την παράμετρο, την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 09)

β) Να βρείτε το σημείο M της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην AB .

(Μονάδες 08)

γ) Αν $M(1, -2)$ και K είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης ευθείας του προηγούμενου ερωτήματος με τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABMK$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Η γενική μορφή της εξίσωσης της παραβολής είναι $y^2 = 2px$. Για την $y^2 = 4x$ θα έχουμε ότι $2p = 4$, οπότε είναι $p = 2$.

Η εστία της E είναι το σημείο $\left(\frac{p}{2}, 0\right) = \left(\frac{2}{2}, 0\right) = (1, 0)$.

Η διευθετούσα (δ) έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$, δηλαδή $x = -\frac{2}{2} = -1$.

β) Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ δίνεται από την εξίσωση: $yy_1 = p(x + x_1)$, δηλαδή $yy_1 = 2(x + x_1)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι

$$\lambda_1 = \frac{2}{y_1}, \text{ ενώ ο συντελεστής διεύθυνσης της } AB \text{ είναι } \lambda_2 = \frac{-4 - (-2)}{0 - (-2)} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στην AB πρέπει $\lambda_1 = \lambda_2$ ή $\frac{2}{y_1} = -1$, άρα $y_1 = -2$.

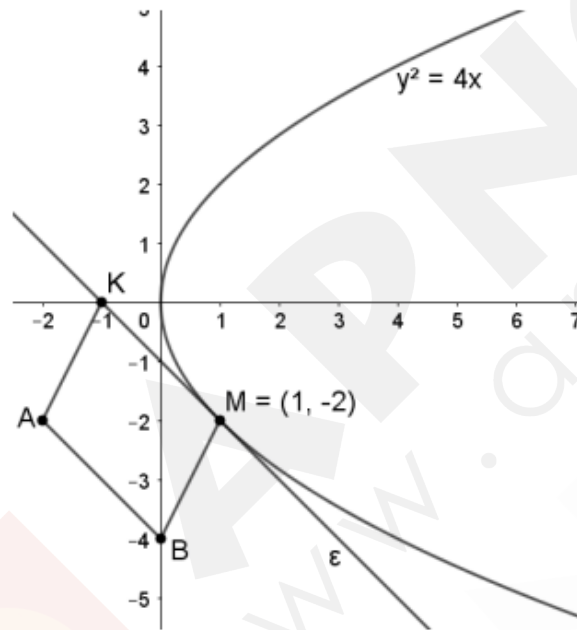
Έξυπνα & Εύκολα!

Επειδή όμως το σημείο M ανήκει στην παραβολή θα επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή

$$y_1^2 = 4x_1. \text{ Αντικαθιστούμε και έχουμε } (-2)^2 = 4x_1, \text{ άρα } x_1 = 1.$$

Επομένως το σημείο M θα είναι το (1,-2).

γ)



Η εφαπτομένη ευθεία (ε) της παραβολής στο σημείο της M(1,-2) θα είναι $yy_1 = 2(x + x_1)$ ή $-2y = 2(x + 1)$ ή $-y = x + 1$ ή $x + y + 1 = 0$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της με τον $x'x$ βάζουμε όπου $y = 0$ και έχουμε $x = -1$.

Επομένως το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το K(-1,0).

Από το ερώτημα (β) γνωρίζουμε ότι $KM \parallel AB$.

$$(KM) = \sqrt{(x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

$$(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (-4 - (-2))^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

Τα τμήματα AB και KM είναι ίσα και παράλληλα, επομένως το τετράπλευρο ABMK είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

Έξυπνα & Εύκολα!

12. Θέμα 18570

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ και η ευθεία (ε): $3x - 4y = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

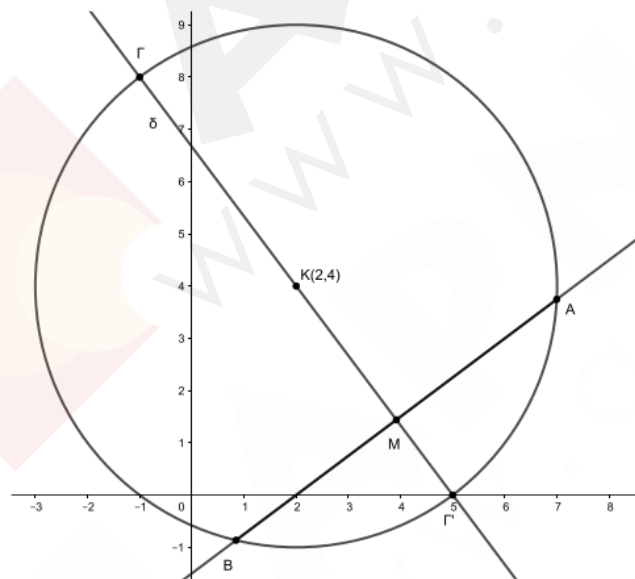
α) Να βρείτε το κέντρο του κύκλου και την ακτίνα του. (Μονάδες 05)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο σε δύο διαφορετικά σημεία Α, Β

i. Να αποδείξετε ότι $-35 < \mu < 15$. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του. (Μονάδες 04)

iii. Να βρεθεί σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ. (Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ


α) $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 - 8y + 16 - 16 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$. Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K(2,4)$ και η ακτίνα του είναι $\rho=5$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β)

- i. Η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του από την ευθεία ε είναι μικρότερη της ακτίνας του. Δηλαδή $d(K, \varepsilon) < \rho \Leftrightarrow \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 - \mu|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} < 5 \Leftrightarrow \frac{|-10 - \mu|}{5} < 5 \Leftrightarrow |\mu + 10| < 25 \Leftrightarrow -25 < \mu + 10 < 25 \Leftrightarrow -35 < \mu < 15$.
- ii. Αν η ευθεία ε διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τότε οι συντεταγμένες του σημείου K θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή $3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = \mu \Leftrightarrow \mu = -10$. Η τιμή $\mu = -10$ είναι δεκτή αφού βρίσκεται στο διάστημα $(-35, 15)$ που βρήκαμε στο β) i. ερώτημα.
- iii. Το ζητούμενο σημείο Γ θα είναι η κορυφή του ισοσκελούς τριγώνου ΓAB με βάση τη χορδή AB . Άρα το Γ θα ανήκει στη μεσοκάθετο ευθεία (δ) της χορδής AB που είναι ο φορέας του αποστήματος της χορδής AB και είναι ευθεία που διέρχεται από το κέντρο K του κύκλου. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε , με $\lambda_\varepsilon = \frac{3}{4}$. Επειδή $\delta \perp \varepsilon$ θα είναι $\lambda_\delta \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = -\frac{4}{3}$. Οπότε η εξίσωση της ευθείας δ είναι: $y - y_K = -\frac{4}{3}(x - x_K)$ ή $y - 4 = -\frac{4}{3}(x - 2) \Leftrightarrow 3y - 12 = -4x + 8 \Leftrightarrow 4x + 3y = 20$. Τα σημεία τομής της ευθείας δ με τον κύκλο είναι τα ζητούμενα σημεία. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$(\Sigma) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0 \\ y = \frac{1}{3}(20 - 4x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{9}(20 - 4x)^2 - 4x - 8 \cdot \frac{1}{3}(20 - 4x) - 5 = 0 \\ y = \frac{1}{3}(20 - 4x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9x^2 + 400 + 16x^2 - 160x - 36x - 480 + 96x - 45 = 0 \\ y = \frac{1}{3}(20 - 4x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

Έξυπνα & Εύκολα!

$$\begin{cases} 25x^2 - 100x - 125 = 0 \\ y = \frac{1}{3}(20 - 4x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 0 \\ y = \frac{1}{3}(20 - 4x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ ή } x = -1 \\ y = 0 \text{ ή } y = 8 \end{cases}$$

Άρα υπάρχουν δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε, το τρίγωνο ΓΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση τη χορδή ΑΒ, τα Γ(5,0) και Γ'(-1,8).

13. Θέμα 18870

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$, η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο Α(4,4) και η ΑΚ κάθετη στην (ε). Μία φωτεινή ακτίνα (ζ), ακολουθώντας πορεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, προσπίπτουσα στο σημείο Α και ανακλώμενη πάνω στην καμπύλη (που αντιστοιχεί σε παραβολικό κάτοπτρο) διέρχεται από το σημείο Μ. Αν γνωρίζετε ότι η γωνία θ_1 που σχηματίζει η προσπίπτουσα φωτεινή ακτίνα (ζ) με την (ε) και η γωνία θ_2 που σχηματίζει η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα ΑΜ με την (ε) είναι ίσες, τότε:

α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και το σημείο Β στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 06)

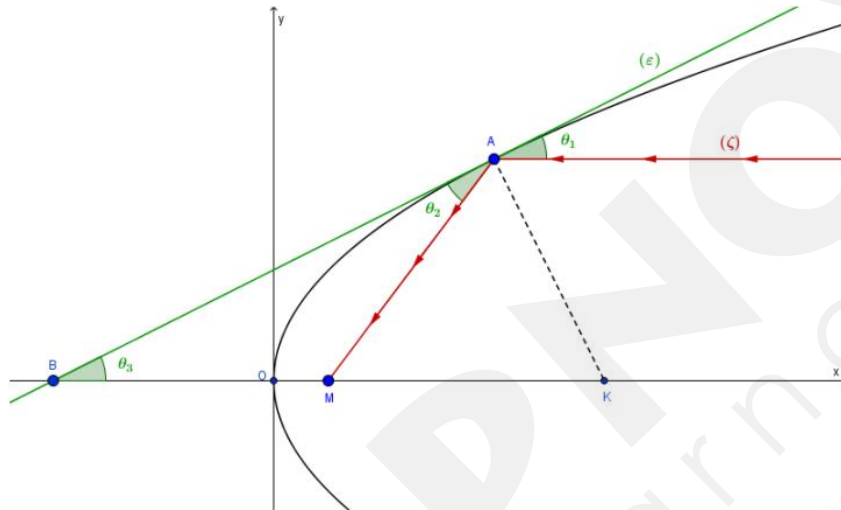
γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 07)

δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ταυτίζεται με την εστία της παραβολής.

(Μονάδες 06)

Έξυπνα & Εύκολα!



ΛΥΣΗ

α) Η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2px$ έχει άξονα τον $x'x$, εστία το σημείο $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x = -\frac{p}{2}$.

Ως εκ τούτου, η $y^2 = 4x$, (με $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$) έχει άξονα τον $x'x$, εστία το σημείο $E(1,0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x = -1$.

β) Η εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο $A(4,4)$ έχει εξίσωση

$$yy_1 = p(x + x_1) \Leftrightarrow 4y = 2(x + 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Θέτοντας στη συνέχεια όπου $y = 0$, έχουμε ότι $\frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

Το σημείο B λοιπόν, στο οποίο η εφαπτομένη (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι το $B(-4, 0)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Αν θ_3 είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\theta_3 = \theta_2$. Πραγματικά είναι:

Οι γωνίες θ_1 και θ_3 είναι ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ευθειών (ζ) και $x'x$. Από την εκφώνηση του προβλήματος είναι γνωστόν ότι $\theta_1 = \theta_2$. Επομένως $\theta_3 = \theta_2$ και ως εκ τούτου το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.

δ) Η θέση του σημείου $M(x, 0)$ μπορεί να βρεθεί λύνοντας την εξίσωση:

$$(MA) = (MB) \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + 16} = |x+4| \Leftrightarrow (x-4)^2 + 16 = (x+4)^2 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα έχουμε $M(1,0)$.

Επομένως το ζητούμενο σημείο M ταυτίζεται με την εστία της παραβολής $E(1,0)$. Άρα η ανακλώμενη φωτεινή ακτίνα διέρχεται από την εστία της παραβολής.

14. Θέμα 20092

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$, το σημείο της $M(\frac{1}{4}, 1)$ και η ευθεία ε του επιπέδου με εξίσωση

$$\varepsilon: \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0.$$

α)

- Να δείξετε ότι η ευθεία ε δεν έχει κοινά σημεία με την παραβολή και να βρείτε την απόστασή του σημείου M από την ε . (Μονάδες 07)
- Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $(M\Gamma\Delta) = 5$ τ.μ. (Μονάδες 05)

β)

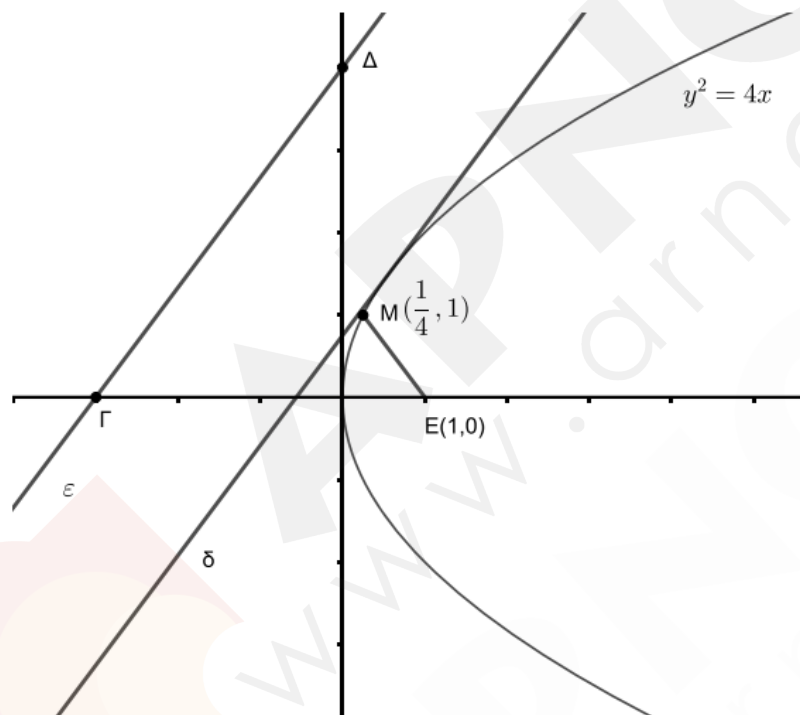
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που εφάπτεται της παραβολής και είναι παράλληλη στην ευθεία ε .

Έξυπνα & Εύκολα!

ii. Ποια είναι η απόσταση των ευθειών ζ και ε;

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ



α)

i. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων της παραβολής $y^2 = 4x$ και της ευθείας $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0$ είναι αδύνατο.

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 1 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 12 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 3y + 12 = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} . \text{ Η δευτέρου}$$

βαθμού εξίσωση $y^2 - 3y + 12 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, αφού $\Delta = 9 - 48 < 0$, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Έξυπνα & Εύκολα!

Η ευθεία ε ισοδύναμα γράφεται $4x-3y+12=0$

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|4 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot 1 + 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

- ii. Τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες τα βρίσκουμε θέτοντας $y=0$ και $x=0$ στην εξίσωσή της.

Για $y=0$ έχουμε $\frac{x}{3} = -1$ ή $x = -3$, άρα $\Gamma(-3, 0)$.

Για $x=0$ έχουμε $\frac{y}{4} = 1$ ή $y = 4$, άρα $\Delta(0, 4)$.

Για το εμβαδό του τριγώνου $ΜΓΔ$ θα βρούμε το μήκος του τμήματος $ΓΔ$ γιατί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτό είναι η απόσταση του σημείου $Μ$ από την ευθεία ε .

$$(ΓΔ) = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\text{Άρα } (ΜΓΔ) = \frac{1}{2} (ΓΔ) \cdot d(M, \varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5 \text{ τ.μ.}$$

β)

- i. Η εφαπτομένη ζ της παραβολής σε τυχαίο σημείο της (x_1, y_1) με $y_1 \neq 0$ έχει εξίσωση

$$yy_1 = 2(x+x_1) \text{ ή } y = \frac{2}{y_1}x + \frac{2x_1}{y_1} \text{ με συντελεστή διεύθυνσης } \lambda_\zeta = \frac{2}{y_1}.$$

Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = \frac{4-0}{0-(-3)} = \frac{4}{3}$. Για να είναι η ευθεία ε

παράλληλη της εφαπτομένης ζ πρέπει και αρκεί $\lambda_\zeta = \lambda_\varepsilon$ ή $\frac{4}{3} = \frac{2}{y_1}$ ή $y_1 = \frac{3}{2}$.

Το σημείο (x_1, y_1) επαληθεύει την εξίσωση της παραβολής, επομένως

$$y_1^2 = 4x_1 \text{ ή } \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4x_1 \text{ ή } x_1 = \frac{9}{16}.$$

Για $x_1 = \frac{9}{16}$, $y_1 = \frac{3}{2}$ η εφαπτομένη ζ που είναι παράλληλη της ευθείας ε είναι:

$$y = \frac{2}{y_1}x + \frac{2x_1}{y_1} \text{ ή } y = \frac{2}{\frac{3}{2}}x + \frac{2 \cdot \frac{9}{16}}{\frac{3}{2}} \text{ ή τελικά}$$

$$\zeta: 16x-12y+9=0$$

Έξυπνα & Εύκολα!

- ii. Για να βρούμε την απόσταση των ευθειών ζ και ϵ , αρκεί να βρούμε ένα σημείο, έστω K , της ζ και να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου αυτού από την ευθεία ϵ .

Θέτοντας $x=0$ στην εξίσωση της ευθείας ζ έχουμε: $y = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Άρα το σημείο K της ευθείας ζ είναι το $K(0, \frac{3}{4})$. Η εξίσωση της ευθείας ϵ είναι: $4x-3y+12=0$, επομένως:

$$d(\zeta, \epsilon) = d(K, \epsilon) = \frac{|4 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{3}{4} + 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-\frac{9}{4} + \frac{48}{4}|}{\sqrt{25}} = \frac{\frac{39}{4}}{5} = \frac{39}{20}.$$

15. Θέμα 21883

Δίνεται η παραβολή $C: x^2=4y$ και η ευθεία $\epsilon: y=x-2$.

α) Να βρείτε την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία. Στη συνέχεια σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις της παραβολής C και της ευθείας ϵ . (Μονάδες 8)

γ) Αν $M(x,y)$ είναι σημείο της παραβολής, τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του M από την ευθεία ϵ είναι $d(M, \epsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}$

(Μονάδες 6)

- ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου M από την ευθεία ϵ καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου M της παραβολής που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία. (Μονάδες 6)

Έξυπνα & Εύκολα!

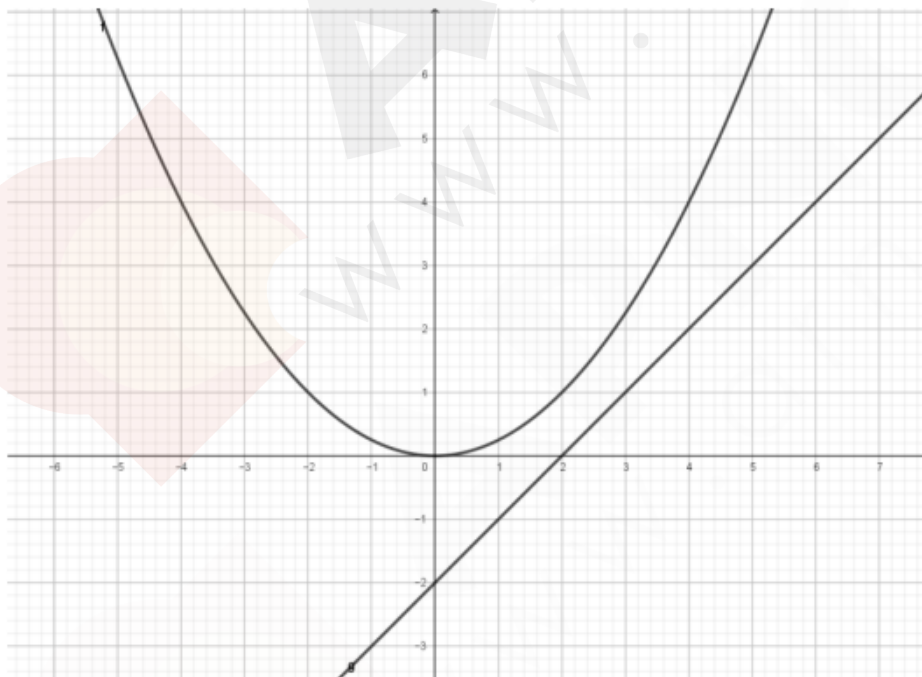
ΛΥΣΗ

α) Η παράμετρος της παραβολής είναι $p=2$, άρα η εστία είναι το $E(0, \frac{p}{2}) = (0,1)$ και η εξίσωση της διευθετούσας $\delta: y=-1$

β) Τα κοινά σημεία της παραβολής και της ευθείας είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} x^2=4y \\ y=x-2 \end{cases}$$

Άρα $x^2=4(x-2)$ άρα $x^2-4x+8=0$ η οποία είναι αδύνατη εφόσον $\Delta < 0$. Άρα η ευθεία και η παραβολή δεν έχουν κοινά σημεία.



Έξυπνα & Εύκολα!

γ)

- i. Έστω σημείο $M(x,y)$ σημείο της παραβολής, οπότε $M(x, \frac{1}{4}x^2)$. Η απόστασή του από την ευθεία $\varepsilon: x-y-2=0$ είναι $d(M,\varepsilon) = \frac{|x - \frac{1}{4}x^2 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|\frac{1}{4}x^2 - x + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}}$, διότι η διακρίνουσα του τριωνύμου $\frac{1}{4}x^2 - x + 2$ είναι $\Delta = 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = -1 < 0$ και άρα $\frac{1}{4}x^2 - x + 2 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

- ii. $d(M,\varepsilon) = \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 2}{\sqrt{2}} = \frac{(\frac{1}{2}x - 1)^2 + 1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Η απόσταση του M από την ευθεία γίνεται ελάχιστη όταν $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Άρα η ελάχιστη απόσταση $d(M,\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ όταν $x=2$. Επομένως το ζητούμενο σημείο της παραβολής που απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε είναι το $M(2,1)$.

16. Θέμα 22275

Δίνεται η παραβολή (C) που έχει εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α) Να σχεδιάσετε πρόχειρα την παραπάνω παραβολή και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας της E και την εξίσωση της ευθείας της διευθετούσας δ .

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(0, 2)$ και εφάπτονται στην παραβολή που περιγράφει η εξίσωση (1).

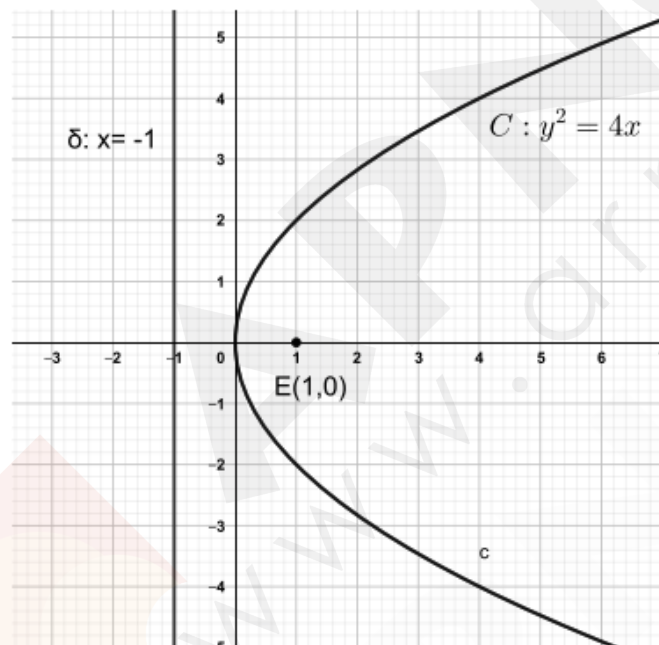
(Μονάδες 13)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση (1) της παραβολής είναι της μορφής $y^2 = 2px$, όπου $2p = 4$, άρα $p = 2$. Η μορφή αυτής της εξίσωσης παριστάνει τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται σε παραβολή με εστία στον άξονα $x'x$.

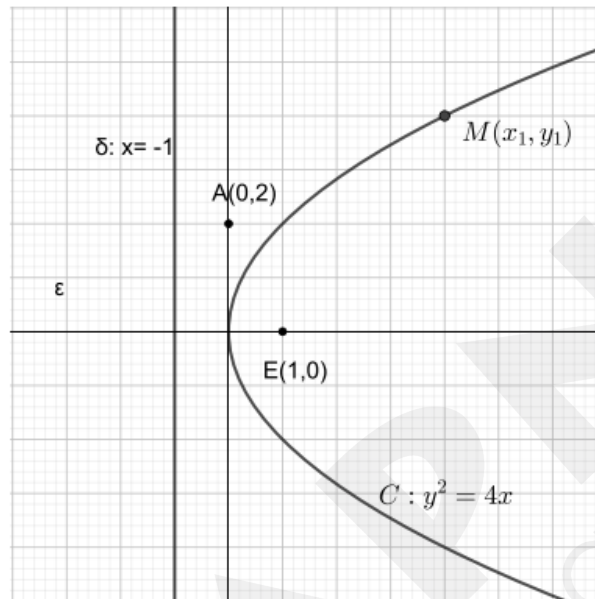
α)



Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια παραβολή. Η εστία E της παραβολής (C) έχει συντεταγμένες $E(\frac{p}{2}, 0)$ και η διευθετούσα της δ έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$. Επειδή $p = 2$ η εστία έχει συντεταγμένες $E(1, 0)$ και η διευθετούσα δ έχει εξίσωση $\delta: x = -1$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β)



Το σημείο $A(0, 2)$ είναι εξωτερικό σημείο της παραβολής, αφού είναι σημείο στον άξονα $y'y$ και η παραβολή που μας δόθηκε έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και μοναδικό κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$ την κορυφή της $O(0, 0)$. Θεωρούμε $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο M θα είναι της μορφής $y y_1 = p (x + x_1)$, και επειδή $p = 2$ η εφαπτόμενη θα είναι $\varepsilon: y y_1 = 2 (x + x_1)$. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$, οπότε οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε . Ισχύει δηλαδή $2 y_1 = 2(0 + x_1) \Leftrightarrow y_1 = x_1(2)$.

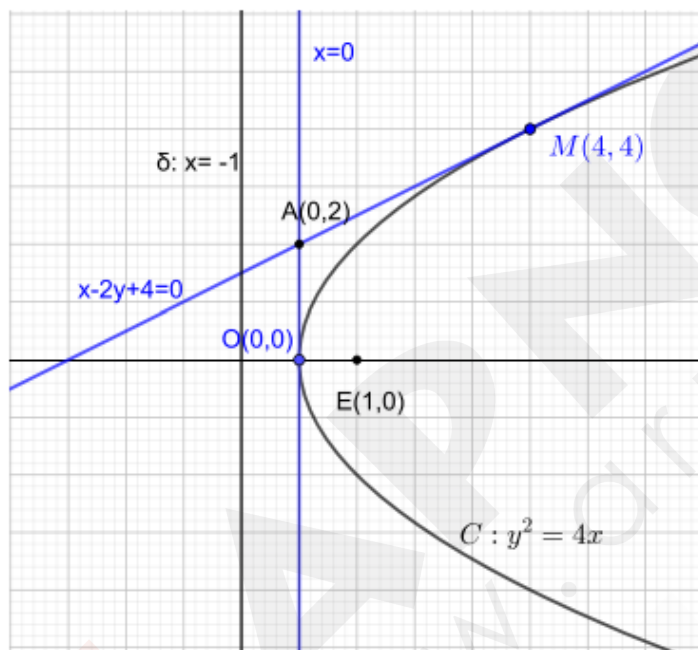
Επιπλέον το σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής, οπότε ικανοποιεί την εξίσωση (1). Άρα $y_1^2 = 4x_1$ (3), και λόγω της (2) η σχέση (3) μας δίνει $x_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow x_1(x_1 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ ή $x_1 = 4$.

Για $x_1 = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 0$, οπότε η εφαπτόμενη έχει εξίσωση $0 = 2(x + 0) \Leftrightarrow x = 0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$.

Για $x_1 = 4$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 4$, οπότε η εφαπτόμενη έχει εξίσωση $\varepsilon: 4y = 2(x + 4) \Leftrightarrow 2y = x + 4 \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$.

Έξυπνα & Εύκολα!

Άρα οι δύο εφαπτόμενες της παραβολής που διέρχονται από το σημείο $A(0, 2)$ είναι οι:
 $x = 0$ (άξονας $y'y$) και η ευθεία ϵ με εξίσωση $x - 2y + 4 = 0$.



17. Θέμα 22465

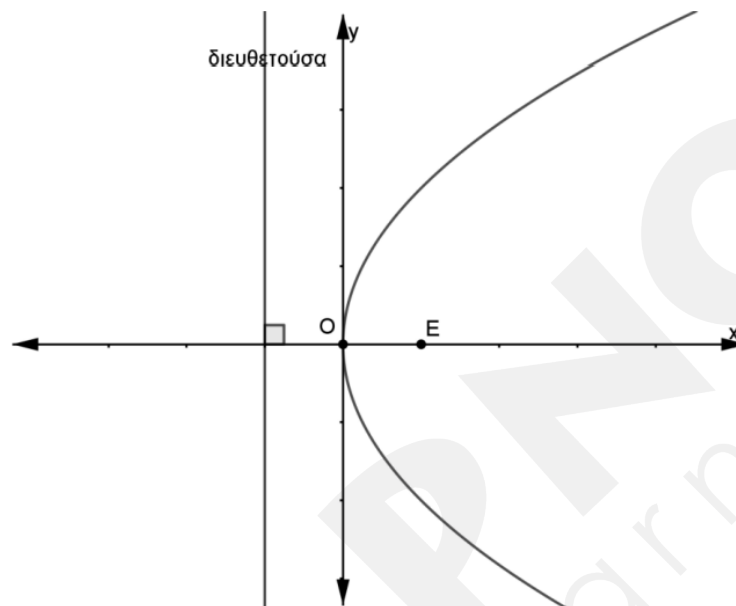
Έστω παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων O και άξονα συμμετρίας τον $x'x$. Η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ της παραβολής C είναι 4 και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η εστία της είναι η $E(2,0)$, η διευθετούσα της είναι η $\delta : x=-2$ και η εξίσωσή της παραβολής είναι $y^2=8x$. Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(2,4)$ είναι η $\epsilon: y=x+2$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από την εστία της παραβολής και εφάπτεται στην ευθεία ϵ στο σημείο της $A(2,4)$. (Μονάδες 7)

Έξυπνα & Εύκολα!



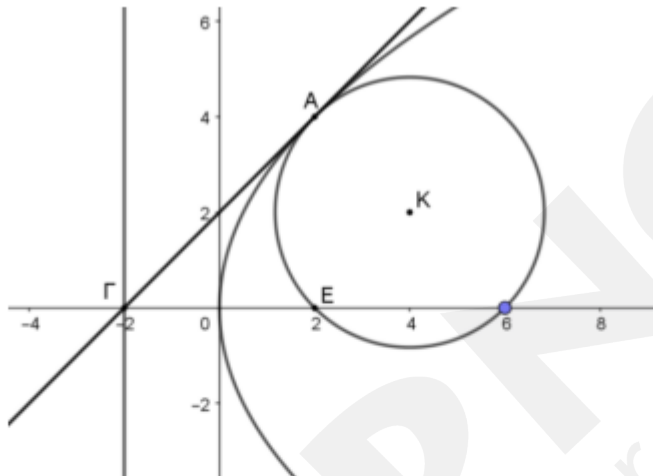
ΛΥΣΗ

α) Αν p η παράμετρος της παραβολής τότε η $|p|$ παριστάνει την απόσταση της εστίας από την διευθετούσα και εφόσον η εστία της παραβολής μας είναι στο θετικό ημιάξονα $x'x$ είναι $p > 0$, άρα $p = 4$. Οι συντεταγμένες της είναι $E(\frac{p}{2}, 0)$ άρα $E(2, 0)$. Η διευθετούσα της έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2} = -2$ και η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 2px = 8x$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ είναι η $y_1 y = p(x + x_1)$, άρα η εφαπτομένη της παραβολής μας στο σημείο της $A(2, 4)$ είναι $4y = 4(x + 2)$ ή $y = x + 2$

Έξυπνα & Εύκολα!

γ)



Αν K το κέντρο του ζητούμενου κύκλου η ευθεία KA είναι κάθετη στην ευθεία ε , επομένως το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των είναι -1 , και αφού ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι 1 άρα $\lambda_{AK} = -1$. Η ευθεία AK διέρχεται από το σημείο $A(2,4)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης -1 , επομένως η εξίσωσή της είναι $y-4 = -(x-2)$ ή $y = -x+6$. Το κέντρο K του κύκλου ισαπέχει από το σημείο $A(2,4)$ και την εστία $E(2,0)$, άρα βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του τμήματος AE . Εφόσον τα σημεία A και E έχουν την ίδια τετμημένη, η ευθεία AE είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, $x'x$. Το μέσον του τμήματος AE είναι το σημείο $(2,2)$. Έτσι η μεσοκάθετη του τμήματος AE είναι η ευθεία $y=2$ και επομένως η τεταγμένη του κέντρου K είναι $y=2$. Θέτοντας $y=2$ στην εξίσωση της ευθείας AK έχουμε $2 = -x+6$ άρα $x=4$. Άρα το κέντρο του

ζητούμενου κύκλου είναι το $K(4,2)$. Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι

$$\rho = (KE) = \sqrt{(4-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}.$$

Άρα η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 8$.

Έξυπνα & Εύκολα!