

Κεφ. 3.1. - Τράπεζα Θεμάτων 2022 – Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ & ΛΥΣΕΙΣ

Η Τράπεζα Θεμάτων για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου είναι μία μεγάλη «θάλασσα». Εμείς όμως έχουμε φροντίσει για εσένα, συγκεντρώνοντας εκείνα τα θέματα που αποτελούν τη «βάση» της γνώσης και για τα υπόλοιπα. Μελετώντας και κατανοώντας το μοτίβο σκέψης για τα συγκεκριμένα, μπορείς να λύσεις με επιτυχία και τα υπόλοιπα θέματα. Στην ιστοσελίδα μας www.arnos.gr για το Course των Μαθηματικών Προσανατολισμού, μελετάς και προετοιμάζεσαι με την αναλυτική διδασκαλία σε ασκήσεις και θέματα, στο ύψος της Τράπεζας.

Θέμα 2 - Κωδικοί:

15028, 15680, 15994, 16773, 16808, 17317, 18238, 18239, 18241, 18700,
18749, 19039, 20890, 21962, 22147, 22172, 22279

1. Θέμα 15028

Έστω κύκλος C με κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho=2$ και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x+4y-1=0$.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C .

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K(1,2)$ από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

(Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C .

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $C:(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

β) Είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{|3\cdot 1+4\cdot 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

γ) Αφού $d(K,\varepsilon)=2=\rho$ η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C .

Έξυπνα & Εύκολα!

2. Θέμα 15680

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ με κέντρο $K(1, 2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y + 1 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = 2$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 - 4 \cdot 1}}{2} = 2$.

β) Είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5}$.

γ) Αφού $d(K, \varepsilon) = \frac{12}{5} > \rho$ η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

3. Θέμα 15994

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 13)

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (c) και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες.

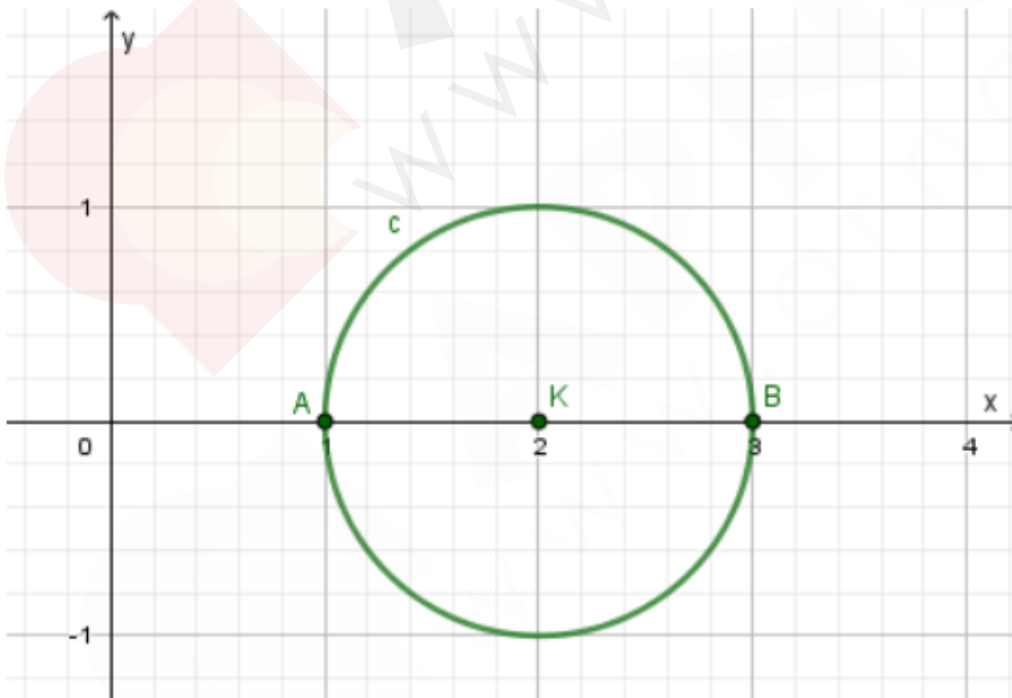
(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Ως γνωστόν, η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο, με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.

Επειδή $(-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0$, η (1) παριστάνει κύκλο. Τότε $-\frac{A}{2} = 2$, $-\frac{B}{2} = 0$ και $\rho = \frac{\sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3}}{2} = 1$. Το κέντρο του λοιπόν είναι το σημείο $K(2,0)$, η ακτίνα του είναι $\rho = 1$, οπότε η εξίσωση του γράφεται ισοδύναμα (c): $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ (2).

β) Η γραφική παράσταση του ζητούμενου κύκλου είναι η παρακάτω.



Έξυπνα & Εύκολα!

Εναλλακτική λύση:

Από την εξίσωση του κύκλου, για $y = 0$ έχουμε:

$$(x - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \text{ ή } x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = 1.$$

Επομένως ο κύκλος τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

Για $x = 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη, οπότε ο κύκλος δεν έχει κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

4. Θέμα 16773

α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $O(0,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

(Μονάδες 08)

β) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης του στο σημείο A .

(Μονάδες 09)

ii. Να βρεθεί το σημείο B , το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο.

(Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το $O(0,0)$ είναι $x^2 + y^2 = \rho^2$ (1), όπου ρ η ακτίνα του κύκλου.

Επειδή ο κύκλος διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ θα πρέπει οι συντεταγμένες του A να επαληθεύουν την εξίσωση (1), δηλαδή $1^2 + 2^2 = \rho^2$, άρα $\rho^2 = 5$.

Οπότε, η (1) γίνεται:

$$x^2 + y^2 = 5$$

Έξυπνα & Εύκολα!

β)

 i. Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (1) στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι:

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2 \quad (2)$$

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο του $A(1,2)$ θα είναι:

$$x + 2y = 5$$

ii. Για να είναι το σημείο B αντιδιαμετρικό του A, θα πρέπει το κέντρο O να είναι το μέσο του τμήματος AB. Επομένως θα ισχύουν:

$$\begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_O = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 0 = \frac{1 + x_B}{2} \\ 0 = \frac{2 + y_B}{2} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 0 = 1 + x_B \\ 0 = 2 + y_B \end{cases}, \text{ άρα } x_B = -1 \text{ και } y_B = -2.$$

Άρα είναι $B(-1, -2)$.

5. Θέμα 16808

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(-8, 1)$, $B(4, 5)$ και $\Gamma(-4, 9)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του ευθυγράμμου τμήματος AB.

(Μονάδες 08)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος (C) που έχει κέντρο το σημείο K και διάμετρο το τμήμα AB διέρχεται από το σημείο Γ.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C).

(Μονάδες 08)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Το μέσο Κ του τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

$$\text{Άρα } K\left(\frac{-8+4}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (-2, 3).$$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι, το μέσο Κ του τμήματος ΑΒ απέχει από το σημείο Γ απόσταση ίση με το μισό του τμήματος ΑΒ. Δηλαδή $K\Gamma = \frac{AB}{2}$.

Το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι

$$(AB) = \sqrt{(-8-4)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}.$$

Το μήκος του τμήματος ΚΓ είναι

$$(K\Gamma) = \sqrt{(-2+4)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = \frac{AB}{2}.$$

γ) Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο Κ(-2,3) και η ακτίνα του είναι $\rho = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{10}$.

Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι

$$(C): (x+2)^2 + (y-3)^2 = 40.$$

6. Θέμα 17317

Δίνεται ο κύκλος $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = 8$.

α) Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του.

(Μονάδες 5)

β) Αν $K(1,2)$, να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε είναι

$$d(K, \varepsilon) = \frac{13}{5}.$$

(Μονάδες 13)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

(Μονάδες 7)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C έχει κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

β) Έχουμε: $d(K, \varepsilon) = \frac{|3-8-8|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{13}{\sqrt{25}} = \frac{13}{5}$.

γ) Αφού $d(K, \varepsilon) = \frac{13}{5} > 2$, η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα. Άρα ευθεία και κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

7. Θέμα 18238

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-3,5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB .

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(KA) = \sqrt{5}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB .

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-3)}{2} = -1$ και $y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4$, οπότε $K(-1,4)$.

β) Είναι $(KA) = \sqrt{(x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5}$.

γ) Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το σημείο $K(-1,4)$ και ακτίνα την απόσταση $(KA) = \sqrt{5}$, οπότε έχει εξίσωση: $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 5$.

Έξυπνα & Εύκολα!

8. Θέμα 18239

Δίνεται το σημείο $K(-3,1)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 4x - 3y + 5 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία (ε) .

(Μονάδες 9)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε) .

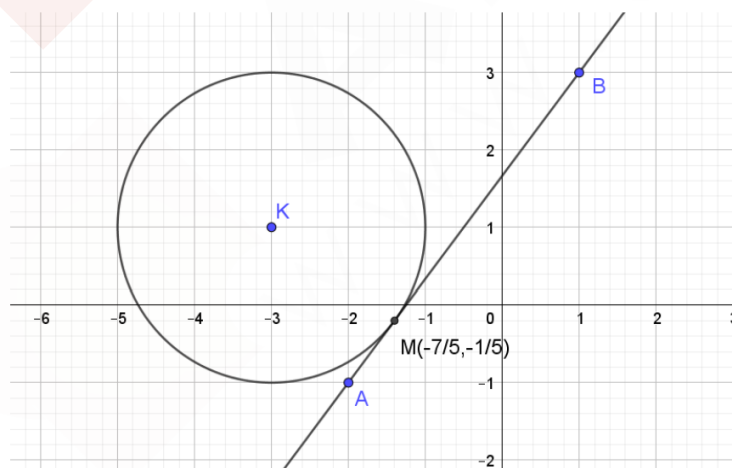
(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{|4(-3) - 3 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$.

β) Ο ζητούμενος κύκλος θα έχει ακτίνα $\rho = d(K, \varepsilon) = 2$, οπότε η εξίσωσή του θα είναι η $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$.

γ) Η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία $A(-2, -1)$ και $B(1, 3)$, αφού οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της. Ο κύκλος C και η ευθεία (ε) φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Έξυπνα & Εύκολα!

9. Θέμα 18241

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

α) τον κύκλο C .

(Μονάδες 9)

β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον yy' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 8)

γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 8)

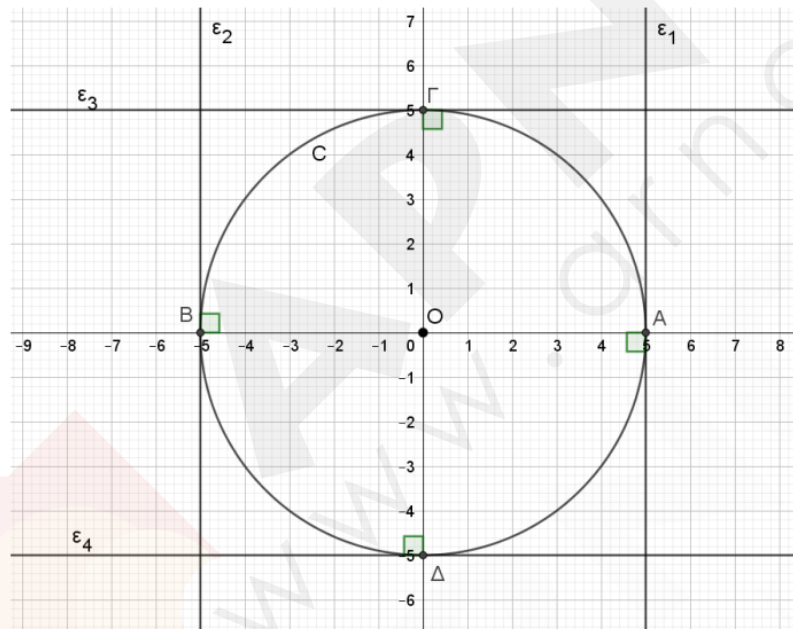
ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, έχει κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=5$. Τα σημεία τομής με τον άξονα xx' είναι τα σημεία $A(5,0)$ και $B(-5,0)$ ενώ τα σημεία τομής με τον άξονα yy' είναι τα σημεία $\Gamma(0,5)$ και $\Delta(0,-5)$.

β) Αναζητούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $\Gamma(0,5)$ και $\Delta(0,-5)$. Οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες στον yy' οπότε παράλληλες στον xx' και διέρχονται από τα σημεία $\Gamma(0,5)$ και $\Delta(0,-5)$, άρα έχουν εξισώσεις $y=5$ και $y=-5$ αντίστοιχα. Είναι οι ευθείες $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Αναζητούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία $A(5,0)$ και $B(-5,0)$. Οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες στον xx' οπότε παράλληλες στον yy' και διέρχονται από τα σημεία $A(5,0)$ και $B(-5,0)$, άρα έχουν εξισώσεις $x=5$ και $x=-5$ αντίστοιχα. Είναι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



10. Θέμα 18700

Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 10)

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Δίνεται το σημείο $A(3, -4)$.

i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο C .

(Μονάδες 05)

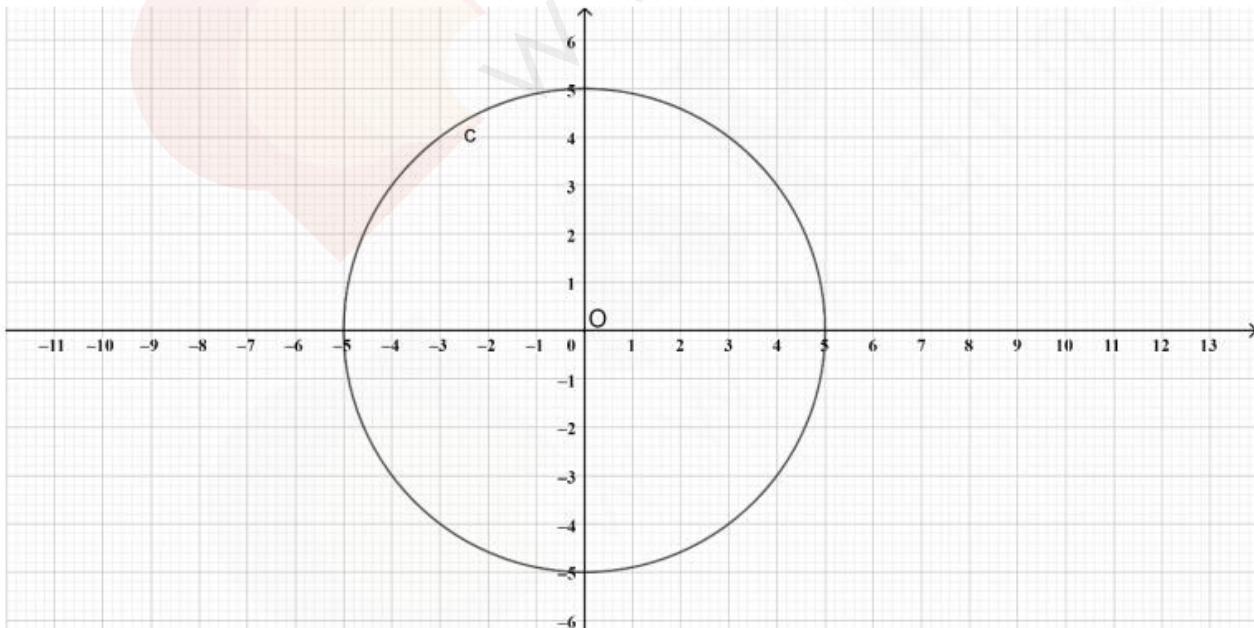
ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A .

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, δηλαδή το $(0,0)$ και ακτίνα 5 είναι $C: x^2 + y^2 = 25$.

Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και με τη βοήθεια του διαβήτη κατασκευάζουμε κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα ίση με την απόσταση του O από το σημείο $(5,0)$. Προκύπτει το παρακάτω σχήμα:



Έξυπνα & Εύκολα!

β) i. Το σημείο $A(3, -4)$ επαληθεύει την εξίσωση του κύκλου C , δηλαδή

$$3^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25.$$

Επίσης, από το σχήμα που κάναμε στο α) ερώτημα φαίνεται ότι το σημείο $A(3, -4)$ ανήκει στον κύκλο C .

ii. Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $A(x_1, y_1)$ του κύκλου της μορφής $x^2 + y^2 = \rho^2$ δίνεται από το τύπο $x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = \rho^2$.

Άρα, η εξίσωση εφαπτομένης στο $A(3, -4)$ του κύκλου C είναι $\epsilon: 3x - 4y = 25$.

11. Θέμα 18749

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ ώστε $A(5, 6)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(12, 2)$ και το ύψος του $A\Delta$, όπου Δ σημείο της $B\Gamma$, όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $B\Gamma$ και $A\Delta$.

(Μονάδες 10)

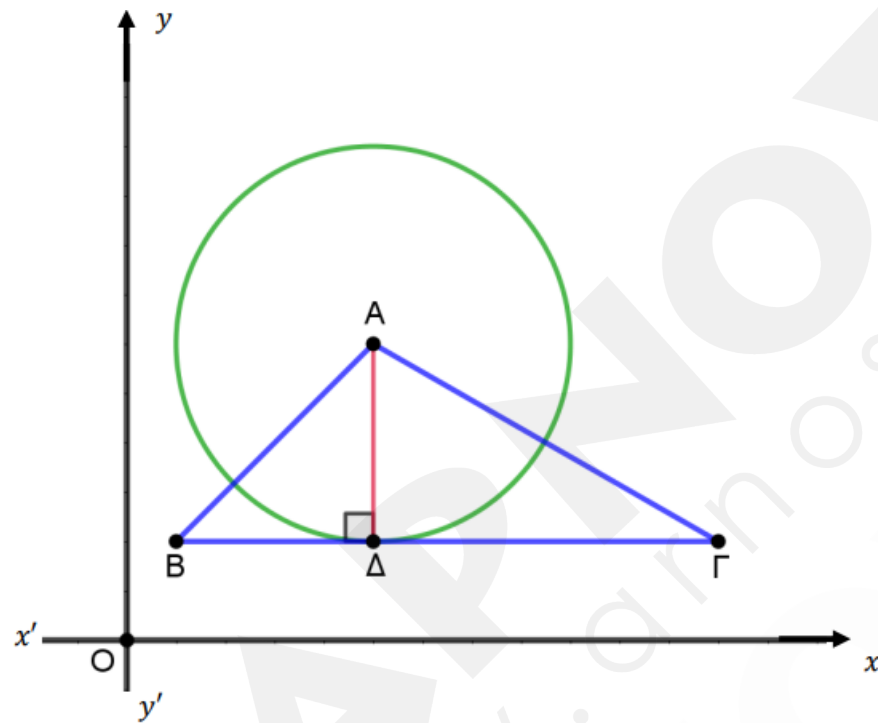
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο A , ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $B\Gamma$ στο σημείο Δ .

(Μονάδες 10)

Έξυπνα & Εύκολα!


ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι τα σημεία Β και Γ έχουν την ίδια τεταγμένη 2, άρα κάθε σημείο της ευθείας $B\Gamma$ έχει τεταγμένη 2 και επομένως η ευθεία $B\Gamma$ είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, άρα $B\Gamma: y = 2$.

Η ευθεία AD είναι κάθετη στην $B\Gamma$, άρα παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ και καθώς το σημείο A έχει τεταγμένη 6, θα είναι $AD: x = 5$.

β) Αφού το σημείο Δ είναι η τομή των ευθειών με εξισώσεις $AD: x = 5$ και $B\Gamma: y = 2$, άρα θα είναι $\Delta(5, 2)$.

γ) Η ακτίνα του κύκλου θα είναι το μήκος $AD = y_A - y_\Delta = 6 - 2 = 4$.

Άρα ο κύκλος έχει εξίσωση $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

Έξυπνα & Εύκολα!

12. Θέμα 19039

Δίνεται η εξίσωση

$$(x - 1)(x + 3) + (y + 1)(y - 3) = -4 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R = 2$.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να βρείτε τα σημεία A και B του κύκλου (K,R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με -1 .

(Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned}(x - 1)(x + 3) + (y + 1)(y - 3) &= -4 \\(x^2 + 3x - x - 3) + (y^2 - 3y + y - 3) &= -4 \\x^2 + 2x + y^2 - 2y &= 2 \\(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) &= 4 \\(x + 1)^2 + (y - 1)^2 &= 2^2 \quad (2)\end{aligned}$$

Άρα, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R = 2$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β)

 i. Η εξίσωση (2) γίνεται για $x = -1$:

$$(-1 + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

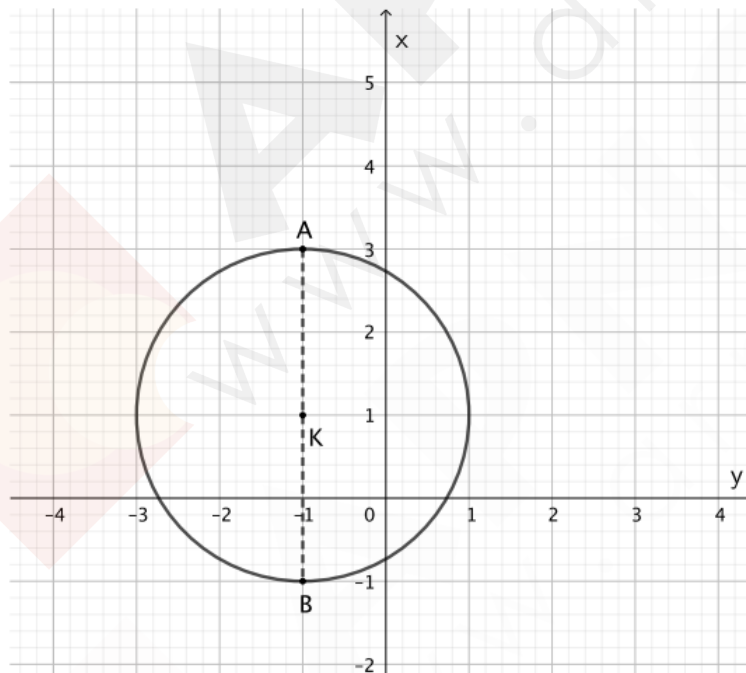
$$(y - 1)^2 = 4$$

$$y - 1 = 2 \text{ ή } y - 1 = -2$$

$$y = 3 \text{ ή } y = -1$$

Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι:

$$A(-1, -1) \text{ και } B(-1, 3)$$


 ii. Τα σημεία A και B βρίσκονται στην ευθεία $x = -1$, η οποία διέρχεται από το κέντρο K του κύκλου. Επομένως, τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

Έξυπνα & Εύκολα!

13. Θέμα 20890

Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(3,-3), B(2,-8) και Γ(7,-3). Να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 10)

β) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το Α και εφάπτεται στην πλευρά ΒΓ.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \text{ Είναι: } \text{ΒΓ: } y - y_{\Gamma} = \frac{y_{\text{B}} - y_{\Gamma}}{x_{\text{B}} - x_{\Gamma}} (x - x_{\Gamma}) \text{ ή } \text{ΒΓ: } y + 3 = \frac{-8+3}{2-7}(x-7) \text{ ή } \text{ΒΓ: } y + 3 = \frac{-5}{-5}(x-7)$$

$$\text{ή } \text{ΒΓ: } y + 3 = x - 7 \text{ ή } \text{ΒΓ: } x - y - 10 = 0.$$

β) Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι

$$\rho = d(A, \text{ΒΓ}) = \frac{|1 \cdot 3 - 1 \cdot (-3) - 10|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$

οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$\text{C: } (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = \rho^2 \text{ ή } \text{C: } (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = (2\sqrt{2})^2 \text{ ή } \text{C: } (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 8.$$

14. Θέμα 21962

Δίνονται τα σημεία A(0,3), B(3,4) και Γ(1,0).

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία BĀΓ είναι ορθή. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το μέσο Κ της υποτεινούς ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

(Μονάδες 7)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ότι: $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (3 - 0, 4 - 3) = (3, 1)$,

$$\vec{AG} = (x_G - x_A, y_G - y_A) = (1 - 0, 0 - 3) = (1, -3).$$

Οπότε $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 3 - 3 = 0$, άρα $\vec{AB} \perp \vec{AG}$ ή $\widehat{BAG} = 90^\circ$.

β) Το σημείο K που είναι το μέσο του τμήματος ΒΓ θα έχει συντεταγμένες:

$$K \left(\frac{x_B + x_G}{2}, \frac{y_B + y_G}{2} \right) \text{ ή } K \left(\frac{3+1}{2}, \frac{4+0}{2} \right) \text{ ή } K(2, 2).$$

γ) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι η γωνία \widehat{BAG} είναι ορθή και τα σημεία A, B και Γ είναι σημεία του ζητούμενου κύκλου, άρα η γωνία \widehat{BAG} είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικόκλιο, συνεπώς η υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ, θα είναι διάμετρος του κύκλου και ισούται με:

$$(B\Gamma) = \sqrt{(x_G - x_B)^2 + (y_G - y_B)^2} = \sqrt{(1 - 3)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Όμως $B\Gamma = 2R$, άρα $2R = 2\sqrt{5}$ ή $R = \sqrt{5}$.

Ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ θα έχει ακτίνα R και κέντρο το σημείο K του ερωτήματος β) και η εξίσωσή του θα είναι:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5.$$

15. Θέμα 22147

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0 \quad (1)$$

Έξυπνα & Εύκολα!

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $R = 2$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (Κ,Ρ).

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (Κ,Ρ) στο Α.

(Μονάδες 8)

16. Θέμα 22172

Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = 0$ και το σημείο $A(-2,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία είναι 2. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) κάθετης στην (ε) που διέρχεται από το σημείο Α.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Α και εφάπτεται στην ευθεία (ε).

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α) Η απόσταση του σημείου (x_0, y_0) από την ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \text{ Επομένως έχουμε } d(A, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot (-2) - 4 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Η ζητούμενη ευθεία (η) είναι κάθετη στην (ε), οπότε το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης της (η) και της (ε) θα είναι -1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι

$$\lambda_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}.$$

Επομένως ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας (η) θα είναι $-\frac{4}{3}$.

Η ευθεία διέρχεται από το $A(-2,1)$, οπότε η εξίσωση θα είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ ή $y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 2)$

$$\text{ή } y = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3} + 1 \text{ ή } y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}.$$

γ) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο (x_0, y_0) και ακτίνα ρ δίνεται από την εξίσωση

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ (1). Για να εφάπτεται ο κύκλος στην ευθεία (ε), θα πρέπει η

απόσταση του κέντρου του Α από την (ε) να ισούται με την ακτίνα ρ . Στο ερώτημα (α) βρήκαμε ότι η απόσταση του Α από την (ε) είναι 2, επομένως $\rho = 2$ και η (1) γίνεται

$$(x - (-2))^2 + (y - 1)^2 = 2^2 \text{ ή } (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

17. Θέμα 22279

Δίνεται η εξίσωση

$$(y - 1)^2 = (3 + x)(1 - x) \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R = 2$.

(Μονάδες 9)

β) Η αρχή $O(0,0)$ των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (Κ, R).

(Μονάδες 7)

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Η ευθεία (ε): $x + y = 2$ είναι τέμνουσα του κύκλου (Κ, R).

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) γράφεται διαδοχικά:

$$(y - 1)^2 = (3 + x)(1 - x)$$

$$(y - 1)^2 = 3 - 3x + x - x^2$$

$$(y - 1)^2 = 3 - 2x - x^2$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y - 1)^2 = 4$$

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

Άρα, η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, 1)$ και ακτίνα $R = 2$.

β) Υπολογίζουμε την απόσταση OK της αρχής $O(0, 0)$ των αξόνων από το κέντρο $K(-1, 1)$ του κύκλου. Είναι:

$$OK = \sqrt{(x_K - x_O)^2 + (y_K - y_O)^2} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2} < R = 2$$

Άρα, η αρχή O των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (Κ, R).

γ) Υπολογίζουμε την απόσταση του κέντρου K του κύκλου από την ευθεία (ε) με εξίσωση $x + y - 2 = 0$. Είναι:

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|-1 + 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < R = 2$$

Άρα, η ευθεία (ε) είναι τέμνουσα του κύκλου (Κ, R).

Έξυπνα & Εύκολα!

Θέμα 4 - Κωδικοί:

14954, 15030, 15042, 15080, 15081, 15082, 15189, 15272, 15432, 15628, 15646, 15791,
15826, 15993, 16191, 18237, 18247, 18415, 18416, 18521, 18567, 18569, 20091, 20229,
20700, 20863, 21154, 21159, 21276, 21349, 22214, 22223, 22239, 22264, 22280, 22508

18. Θέμα 14954

Θεωρούμε τις εξισώσεις (ε_1) : $\mu x - y - \mu = 0$ και

(ε_2) : $(\mu + 1)x + (\mu - 1)y - \mu + 1 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45° για κάθε τιμή της παραμέτρου μ .

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Κάθε μία από τις εξισώσεις (ε_1) και (ε_2) είναι στη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$, εξίσωση που γνωρίζουμε ότι παριστάνει ευθεία όταν $|A| + |B| > 0$, δηλαδή όταν οι αριθμοί A και B δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν. Παρατηρούμε ότι στην (ε_1) είναι $B = -1 \neq 0$, ενώ στην (ε_2) είναι $A = \mu + 1, B = \mu - 1$ και $A = 0$ για $\mu = -1, B = 0$ για $\mu = 1$. Έτσι, δεν υπάρχει τιμή της παραμέτρου μ η οποία να μηδενίζει ταυτόχρονα τους συντελεστές A και B .

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Γνωρίζουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη προς το διάνυσμα

$\vec{\delta} = (-B, A)$. Έτσι, θα είναι $\vec{\delta}_1 = (1, \mu)$ παράλληλο στην (ε_1) και

$\vec{\delta}_2 = (1 - \mu, 1 + \mu)$ παράλληλο στην (ε_2) .

Οπότε η οξεία γωνία θ των (ε_1) και (ε_2) θα είναι ίση ή παραπληρωματική της οξείας γωνίας

ϕ των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$. Αλλά $\text{συν}\phi = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|}$.

Όμως $\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = 1 \cdot (1 - \mu) + \mu \cdot (1 + \mu) = 1 - \mu + \mu + \mu^2 = 1 + \mu^2$.

Επίσης $|\vec{\delta}_2| = \sqrt{(1 - \mu)^2 + (1 + \mu)^2} = \sqrt{1 - 2\mu + \mu^2 + 1 + 2\mu + \mu^2} = \sqrt{2 + 2\mu^2} = \sqrt{2(1 + \mu^2)} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \mu^2} = \sqrt{2} \cdot |\vec{\delta}_1|$.

Έτσι, $\text{συν}\phi = \frac{1 + \mu^2}{|\vec{\delta}_1| \cdot \sqrt{2} \cdot |\vec{\delta}_1|} = \frac{1 + \mu^2}{\sqrt{2} |\vec{\delta}_1|^2} = \frac{1 + \mu^2}{\sqrt{2}(1 + \mu^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Όστε $\hat{\theta} = 45^\circ$.

γ) Για να βρούμε που τέμνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (ε_1) και (ε_2) . Ένας τρόπος είναι με την μέθοδο της αντικατάστασης. Από την (ε_1) παίρνουμε $y = \mu x - \mu$ οπότε αντικαθιστώντας στην (ε_2) παίρνουμε

$$(\mu + 1)x + (\mu - 1)(\mu x - \mu) - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

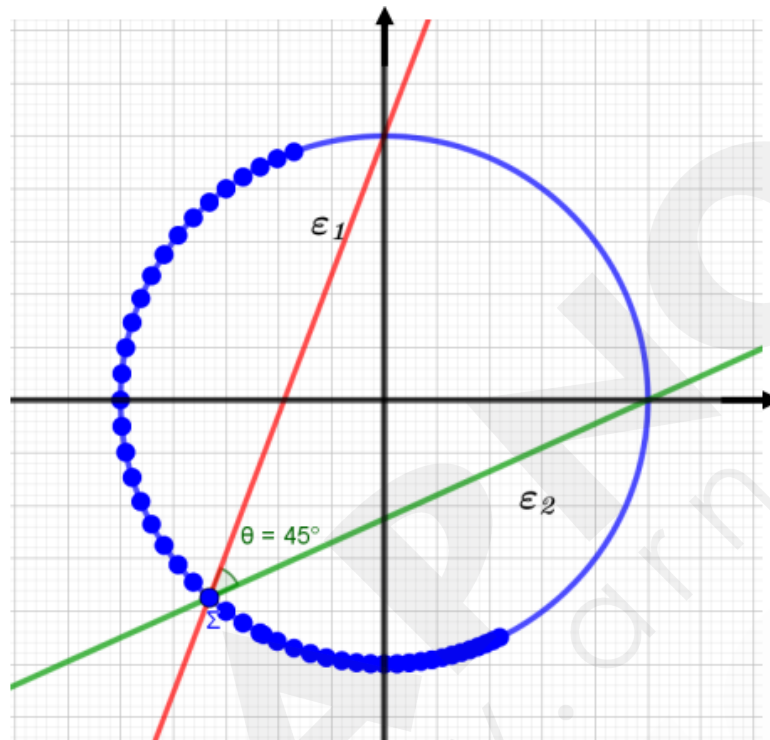
$$(\mu + 1)x + \mu(\mu - 1)x - \mu(\mu - 1) - \mu + 1 = 0, \text{ \acute{a}\rho\alpha}$$

$$(\mu + 1 + \mu^2 - \mu)x - \mu^2 + \mu - \mu + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}.$$

$$\text{Τότε } y = \mu \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} - \mu = \frac{\mu^3 - \mu - \mu^3 - \mu}{\mu^2 + 1} = \frac{-2\mu}{\mu^2 + 1}.$$

Τα παραπάνω αποτυπώνονται στο παρακάτω σχήμα.

Έξυπνα & Εύκολα!


19. Θέμα 15030

Δίνεται ο κύκλος $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ και η ευθεία $\epsilon: 2x + y + 5 = 0$.

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C .

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ϵ) δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1), (\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (ϵ) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1), (\eta_2)$.

(Μονάδες 6)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C έχει κέντρο το $K(2, -3)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$.

β) Είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} > \sqrt{5} = \rho$ και αφού $d(K, \varepsilon) > \rho$ ο κύκλος

C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία.

γ) Κάθε ευθεία (η) παράλληλη στην (ε) έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης με την ευθεία (ε), δηλαδή $\lambda_\eta = -2$. Έτσι (η): $y = -2x + \beta \Leftrightarrow 2x + y - \beta = 0$

Για να εφάπτεται η ευθεία (η) στον κύκλο πρέπει και αρκεί να απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου δηλαδή

$$d(K, \eta) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) - \beta|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|1 - \beta|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |1 - \beta| = 5 \Leftrightarrow$$

$$1 - \beta = 5 \quad \text{ή} \quad 1 - \beta = -5 \Leftrightarrow \beta = -4 \quad \text{ή} \quad \beta = 6$$

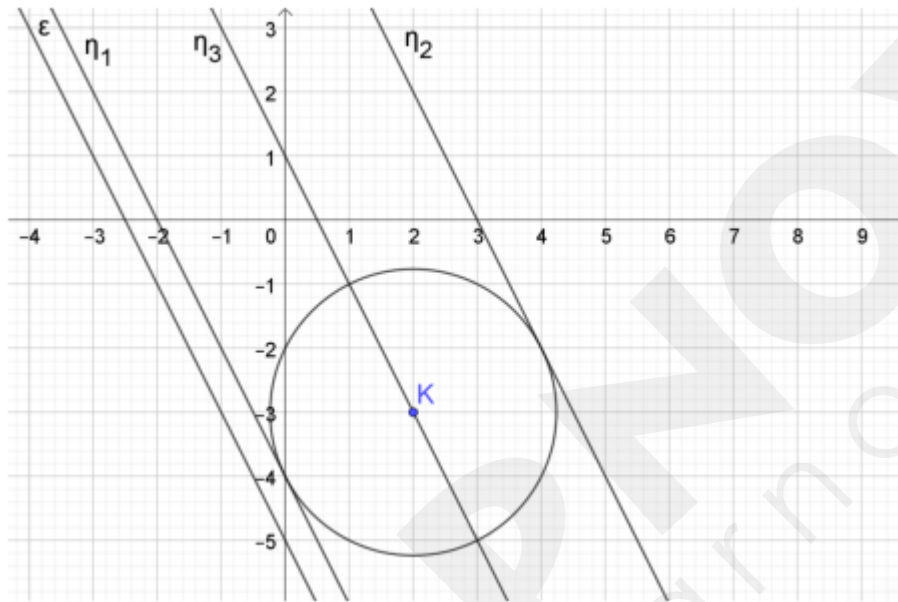
Συνεπώς έχουμε δύο εφαπτομένες τις $\eta_1: 2x + y + 4 = 0$ και $\eta_2: 2x + y - 6 = 0$

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

δ) Είναι $d(K, \eta_1) = d(K, \eta_2) = \rho$ δηλαδή το $K(2, -3)$ ισαπέχει από τις ευθείες (η_1), (η_2) οπότε ανήκει στη μεσοπαράλληλή τους. Η ζητούμενη μεσοπαράλληλη (η_3) ως παράλληλη στις (η_1), (η_2) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\eta_3} = -2$.

Τελικά η ζητούμενη μεσοπαράλληλη είναι η (η_3): $y + 3 = -2(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 1$.

Έξυπνα & Εύκολα!


20. Θέμα 15042

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο του επιπέδου M , τέτοιο ώστε:

$$\vec{AB} - 2\vec{AM} + \vec{A\Gamma} = \vec{0}$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Γ, M είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το M είναι το μέσο του $B\Gamma$.

(Μονάδες 2)

γ) Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = \kappa$ και $\vec{AM} \cdot \vec{B\Gamma} = \lambda$.

Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\vec{A\Gamma}, \vec{AB}$ ισχύει ότι $\kappa \vec{A\Gamma} = \lambda \vec{AB}$, τότε:

ι. Να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$.

(Μονάδες 7)

Έξυπνα & Εύκολα!

- ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\overrightarrow{B\Gamma} = \mu \overrightarrow{BM}$.

Πράγματι, θεωρώντας το B ως σημείο αναφοράς, είναι:

$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} - 2(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BA}) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{BM}$$

β) Το M είναι το μέσο του τμήματος $B\Gamma$, διότι

$$\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{BM}$$

γ) i. Επειδή τα σημεία A, B, Γ ως κορυφές τριγώνου δεν είναι συνευθειακά, έπεται ότι τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα.

Είναι $\kappa \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

Αν $\kappa \neq 0$, τότε $\kappa \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \frac{\lambda}{\kappa} \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} // \overrightarrow{AB}$.

Αν $\lambda \neq 0$, τότε $\kappa \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{\kappa}{\lambda} \overrightarrow{A\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} // \overrightarrow{AB}$.

Επομένως πρέπει $\kappa = \lambda = 0$.

Έξυπνα & Εύκολα!

ii) Τότε είναι:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 \end{cases}$$

Αφού $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$ έπεται ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}$ είναι κάθετα. Επομένως, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, με $\hat{A} = 90^\circ$.

Αφού $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$ έπεται ότι η διάμεσος AM του ορθογώνιου τριγώνου είναι κάθετη στην πλευρά BG , δηλαδή είναι και ύψος.

Ως εκ τούτου το τρίγωνο είναι και ισοσκελές με $AB = AG$.

21. Θέμα 15080

Δίνονται οι εξισώσεις

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \quad (1)$$

και

$$C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0 \quad (2).$$

α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $K(1,0), L(3,0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 3, \rho_2 = 1$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ).

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2 .

(Μονάδες 9)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$, αν και μόνο αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.

Για την εξίσωση (1) έχουμε:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4 - 4(-8) = 36 > 0,$$

δηλαδή παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1, 0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 3$.

Όμοια για την (2) έχουμε:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 36 - 4 \cdot 8 = 4 > 0,$$

δηλαδή παριστάνει κύκλο με κέντρο $\Lambda(3, 0)$ και ακτίνα $\rho_2 = 1$.

β)

i. Έχουμε $(K\Lambda) = \sqrt{(3-1)^2 + 0^2} = 2$.

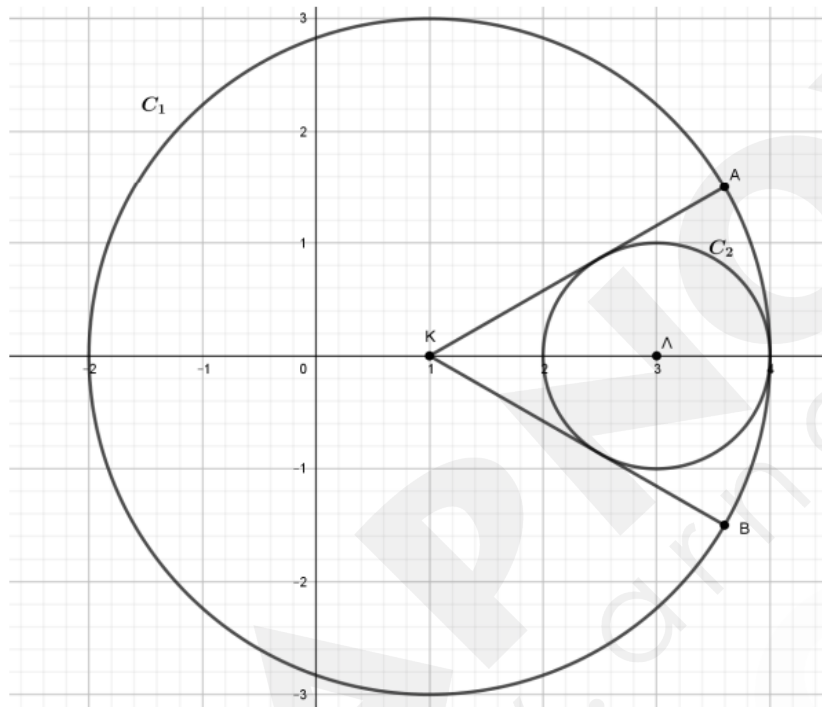
ii. Δύο κύκλοι με κέντρα K , Λ και ακτίνες ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα εφάπτονται εσωτερικά αν και μόνο αν $(K\Lambda) = |\rho_1 - \rho_2| = \rho_1 - \rho_2$, όπως γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια γεωμετρία.

Είναι $\rho_1 - \rho_2 = 3 - 1 = 2$, από β)i. έχουμε $(K\Lambda) = 2 = \rho_1 - \rho_2$, δηλαδή ικανοποιείται η προϋπόθεση οπότε ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 .

γ) Κάθε ακτίνα του κύκλου C_1 , KA και KB σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, που δεν είναι κάθετη στον $x'x$ άξονα, είναι πάνω σε ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $K(1, 0)$ και έχει κλίση $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα θα έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y - 0 = \lambda(x - 1) \Leftrightarrow y - \lambda x + \lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Έξυπνα & Εύκολα!



Η (ε) θα εφάπτεται στον C_2 αν και μόνο αν $d(\Lambda, \varepsilon) = \rho_2$. Έχουμε:

$$d(\Lambda, \varepsilon) = \rho_2 \Leftrightarrow \frac{|0 - 3\lambda + \lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = 1 \Leftrightarrow |2\lambda| = \sqrt{1 + \lambda^2} \Leftrightarrow 3\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Τελικά οι ζητούμενες ακτίνες ΚΑ και ΚΒ έχουν εξισώσεις:

$$(\varepsilon_1): 3y - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0 \text{ και}$$

$$(\varepsilon_2): 3y + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0 \text{ αντίστοιχα.}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

22. Θέμα 15081

Δίνονται οι κύκλοι

$$C_1: x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \text{ και}$$

$$C_2: x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0.$$

α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $K(-\sqrt{2}, 0)$, $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 .

(Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή $K(-\sqrt{2}, 0)$ και ακτίνα :

$\rho_1 = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = 1$ και ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$ και

ακτίνα : $\rho_2 = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = 3$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β)

i. Μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και δεν είναι κάθετη στον $x'x$ άξονα έχει εξίσωση:

$$(\eta): y = \lambda x \Leftrightarrow y - \lambda x = 0.$$

Η ευθεία (η) εφάπτεται και στους δύο κύκλους αν και μόνο αν οι αποστάσεις των κέντρων K και Λ από την ευθεία αυτή είναι ίσες με τις αντίστοιχες ακτίνες των κύκλων. Δηλαδή έχουμε:

$$d(K, \eta) = 1 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$d(\Lambda, \eta) = 3 \quad (2).$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

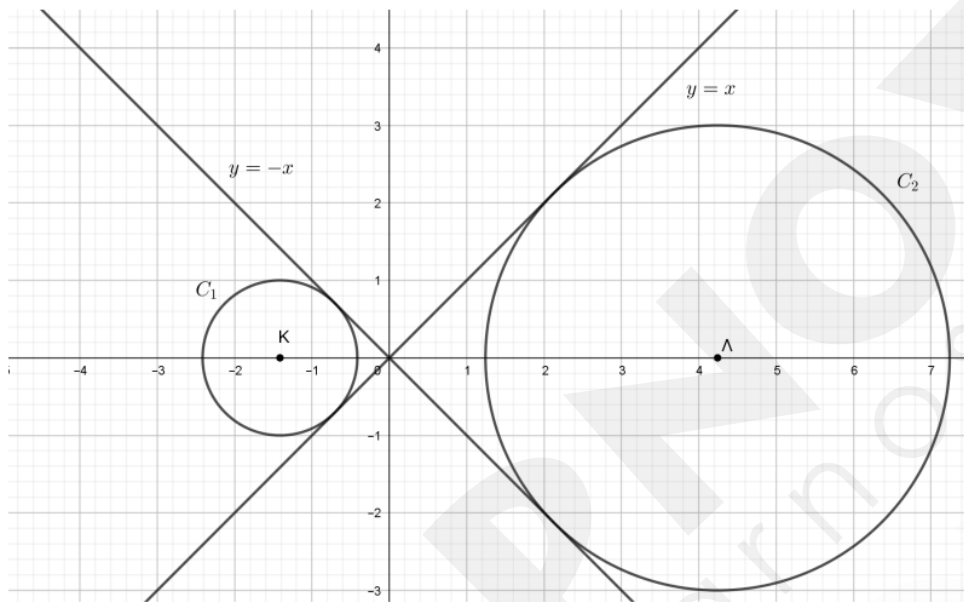
$$\begin{cases} \frac{|0 + \sqrt{2}\lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = 1 \\ \frac{|0 - 3\sqrt{2}\lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\sqrt{2}\lambda| = \sqrt{1 + \lambda^2} \\ |3\sqrt{2}\lambda| = 3\sqrt{1 + \lambda^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda^2 = 1 + \lambda^2 \\ 18\lambda^2 = 9 + 9\lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \pm 1 \\ \lambda = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

Άρα, από την αρχή των αξόνων διέρχονται δυο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων, με εξισώσεις:

$$(\eta_1): y = -x \quad \text{και} \quad (\eta_2): y = x.$$

ii. Η αρχή των αξόνων $(0,0)$ είναι εσωτερικό σημείο της διακέντρου $K\Lambda$, διότι η $K\Lambda$ είναι πάνω στον άξονα $x'x$ και έχει άκρα τα σημεία $K(-\sqrt{2}, 0)$ και $\Lambda(3\sqrt{2}, 0)$. Επομένως οι εφαπτόμενες που βρήκαμε στο βι) ερώτημα είναι εσωτερικές, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Έξυπνα & Εύκολα!


22. Θέμα 15082

Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις:

$$C_1 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8 \text{ και } C_2 : (x-7)^2 + (y+2)^2 = 18.$$

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου (ΚΛ), όπου Κ, Λ τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2 αντίστοιχα. Ακολουθώς να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΚΛ.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων.

(Μονάδες 7)

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(2,3)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2\sqrt{2}$, ενώ ο κύκλος C_2 κέντρο $\Lambda(7,-2)$

και ακτίνα $\rho_2 = 3\sqrt{2}$. Οπότε έχουμε $(ΚΛ) = \sqrt{(7-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$. Ακόμα

$\rho_1 + \rho_2 = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, δηλαδή $(ΚΛ) = \rho_1 + \rho_2$.

Αφού η διάκεντρος των δύο κύκλων είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β)

i. Έχουμε $\lambda_{κλ} = \frac{-2-3}{7-2} = -1$, οπότε $ΚΛ: y-3 = -1(x-2) \Leftrightarrow y = -x+5$.

ii. Θα βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 .

Έχουμε:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (-x+2)^2 = 8 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 4 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \pm 2 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4 \text{ ή } x = 0 \\ y = 1 \text{ ή } y = 5. \end{cases}$$

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 είναι τα $A(4,1)$ και $A'(0,5)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

Αντίστοιχα έχουμε:

$$\begin{cases} (x-7)^2 + (y+2)^2 = 18 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^2 + (-x+7)^2 = 18 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)^2 = 9 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = \pm 3 \\ y = -x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ ή } x = 10 \\ y = 1 \text{ ή } y = -5. \end{cases}$$

Οπότε τα κοινά σημεία της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_2 είναι τα $A(4,1)$ και $A''(10,-5)$. Η κοινή λύση των δύο συστημάτων είναι το ζητούμενο σημείο επαφής των δύο κύκλων. Άρα το κοινό σημείο της ευθείας και με τους δύο κύκλους είναι το $A(4,1)$, οπότε είναι το σημείο επαφής.

Εναλλακτική λύση:

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της ευθείας ΚΛ με τον κύκλο C_1 λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8 \\ y = -x+5 \end{cases} \text{ και βρίσκουμε, όπως και στον προηγούμενο τρόπο λύσης, τα σημεία}$$

$A(4,1)$ και $A'(0,5)$.

Έχουμε $\vec{KL} = (7-2, -2-3) = (5, -5)$ και $\vec{KA} = (4-2, 1-3) = (2, -2)$, δηλαδή

$$\vec{KA} = \frac{2}{5} \vec{KL},$$

οπότε το A , ως εσωτερικό σημείο του \vec{KL} , είναι το μοναδικό ζητούμενο σημείο επαφής.

γ) Η κοινή εσωτερική εφαπτομένη (η) των δύο κύκλων είναι κάθετη στην ευθεία ΚΛ και διέρχεται από το σημείο επαφής $A(4,1)$.

Στο ερώτημα β)i έχουμε βρει ότι $\lambda_{\kappa\lambda} = -1$, οπότε $\lambda_{\eta} \cdot \lambda_{\kappa\lambda} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\eta} \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\eta} = 1$, και η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δυο κύκλων έχει εξίσωση:

$$(\eta): y-1=1(x-4) \Leftrightarrow y=x-3.$$

Έξυπνα & Εύκολα!

23. Θέμα 15189

Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(2,-2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB .

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει εξίσωση $C: x^2 + (y + 1)^2 = 5$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB) = 5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1: x + 2y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y + 7 = 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C .

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Το μέσο K του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{0-2}{2}\right)$ δηλαδή $(0, -1)$.

Το μέτρο του διανύσματος \overrightarrow{AB} είναι:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

β) Ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει κέντρο $K(0, -1)$ και ακτίνα $\rho = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \sqrt{5}$. Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$C: x^2 + (y + 1)^2 = 5.$$

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Έστω $M(x, y)$. Τότε $(ABM) = \frac{1}{2} |\det(\overline{AB}, \overline{AM})|$ με $\overline{AM} = (x+2, y)$ και $\overline{AB} = (4, -2)$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\det(\overline{AB}, \overline{AM})| = 5 &\Leftrightarrow \left| \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ x+2 & y \end{vmatrix} \right| = 10 \Leftrightarrow \\ |4y + 2(x+2)| = 10 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 2x + 4 = 10 \\ \text{ή} \\ 4y + 2x + 4 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0 \\ \text{ή} \\ 2x + 4y + 14 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ \text{ή} \\ x + 2y + 7 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

δ) Για να εφάπτονται οι ε_1 και ε_2 στο κύκλο C πρέπει $d(K, \varepsilon_1) = d(K, \varepsilon_2) = \sqrt{5}$.

Είναι

$$d(K, \varepsilon_1) = \frac{|0 + 2(-1) - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

και

$$d(K, \varepsilon_2) = \frac{|0 + 2(-1) + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

24. Θέμα 15272

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3, 2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το M .

(Μονάδες 12)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση γράφεται

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

οπότε παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(1, -2)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(KM) > \rho$. Πραγματικά, είναι:

$$(KM) = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} > 2$$

οπότε το M βρίσκεται έξω από τον κύκλο.

γ) Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το M είναι:

- Η κατακόρυφη ευθεία $x=3$. Η ευθεία αυτή απέχει από το κέντρο του κύκλου απόσταση $d = \frac{|1-3|}{\sqrt{1+0}} = 2 = \rho$. Άρα η κατακόρυφη ευθεία $x=3$ εφάπτεται στον κύκλο.

- Όλες οι μη κατακόρυφες ευθείες που είναι της μορφής $y-2 = \lambda(x-3)$ δηλαδή $\lambda x - y - 3\lambda + 2 = 0$. Μια τέτοια ευθεία εφάπτεται στον κύκλο, μόνο όταν η απόσταση d του κέντρου K από αυτή είναι ίση με την ακτίνα ρ . Είναι:

$$d=2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda + 2 - 3\lambda + 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda - 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4}$$

Επομένως η άλλη εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το M είναι η:

$$y-2 = \frac{3}{4}(x-3) \text{ που γράφεται } y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι κοινές εφαπτόμενες των δυο κύκλων είναι οι ευθείες με

εξισώσεις $x=3$ και $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$.

Έξυπνα & Εύκολα!

25. Θέμα 15432

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4κx - 2κy + 4 = 0$ (1) με $κ \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $κ \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου.

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.

(Μονάδες 7)

δ) Για $κ = 1$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο $\Gamma(2,2)$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, για να παριστάνει κύκλο μόνο όταν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, όπου $A = -4κ$, $B = -2κ$ και $\Gamma = 4$.

Άρα $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16κ^2 + 4κ^2 - 16 = 20κ^2 - 16$ και

$$20κ^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow κ^2 > \frac{4}{5} \Leftrightarrow |κ| > \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow κ < -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ ή } κ > \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

β) Η εξίσωση (1) είναι μία παραμετρική εξίσωση με παράμετρο $κ$ και $κ \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, +\infty\right)$.

Για κάθε $κ \in \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, +\infty\right)$ έχουμε έναν κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$, δηλαδή με

$$K(2κ, κ) \text{ και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{20κ^2-16}}{2}.$$

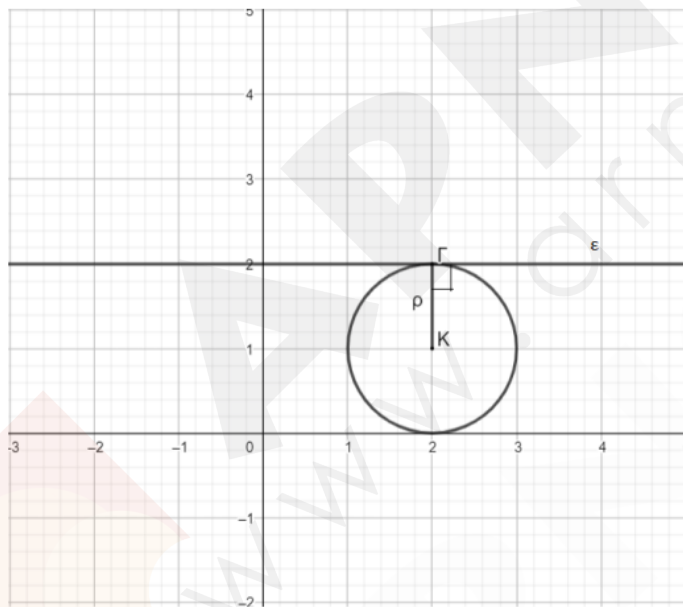
Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) παραμετρική εξίσωση, από το ερώτημα

β) έχουν συντεταγμένες $(2κ, κ)$, δηλαδή $x = 2κ$ και $y = κ$.

Άρα $x = 2y \Leftrightarrow x - 2y = 0$ (2), δηλαδή τα κέντρα ανήκουν στην εξίσωση ευθείας (2).

δ) Για $κ = 1$ η εξίσωση (1) γίνεται $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, με κέντρο $K(2,1)$ και ακτίνα $ρ = 1$.



Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων σχεδιάζουμε τον παραπάνω κύκλο.

Η ευθεία που είναι εφαπτομένη στον κύκλο στο σημείο Γ είναι η ευθεία που είναι κάθετη στο τμήμα $K\Gamma = \rho$ και παράλληλη στον άξονα $x'x$, γιατί K και Γ έχουν την ίδια τετμημένη. Άρα έχει εξίσωση $y = 2$.

Έξυπνα & Εύκολα!

26. Θέμα 15628

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (4 - 2k)x - 2(1 + k)y + 5 - 2k = 0$ (I), όπου $k \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η (I) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k - 2, k + 1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε $k > 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε $k > 0$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε $k > 0$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι η (I) είναι στη μορφή $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (4 - 2k)^2 + [-2(1 + k)]^2 - 4 \cdot (5 - 2k) =$$

$$16 - 16k + 4k^2 + 4 + 8k + 4k^2 - 20 + 8k = 8k^2.$$

Αφού $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, η (I) παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{8k^2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}k}{2} = k\sqrt{2}$ και

κέντρο $M\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = M\left(-\frac{4-2k}{2}, -\frac{-2(1+k)}{2}\right) = M(k - 2, k + 1)$. Καθώς η παράμετρος

k παίρνει άπειρες τιμές, έχουμε άπειρους κύκλους.

β) Ας είναι x η τετμημένη των σημείων M και y η τεταγμένη των σημείων M . Τότε:

$x = k - 2$, $y = k + 1$. Όστε $y = (x + 2) + 1$, άρα $y = x + 3$, η εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία ανήκουν τα σημεία M .

γ) Προφανώς αρκεί να δείξουμε ότι η απόσταση των κέντρων M από την σταθερή ευθεία

(ε): $x + y + 1 = 0$ ισούται με την ακτίνα. Πράγματι:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|1(k-2) + 1(k+1) + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2k|}{\sqrt{2}} = k\sqrt{2}.$$

Έξυπνα & Εύκολα!

27. Θέμα 15646

Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ και $C_2: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$.

α) Να δείξετε ότι τα κέντρα K, Λ των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ του συστήματος συντεταγμένων.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής B, Γ των κύκλων C_1 και C_2 .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y = x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα B, Γ να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(1,1)$ και ακτίνα $\rho = 3$ ενώ ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(4,4)$ και ακτίνα $\rho = 3$.

Έχουμε $\lambda_{K\Lambda} = \frac{4-1}{4-1} = 1$, άρα η $K\Lambda$ βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $y-1=1(x-1) \Leftrightarrow y=x$,

δηλαδή η διάκεντρος βρίσκεται στην διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2 θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Αφαιρώντας κατά μέλη

$$\text{παίρνουμε } (x-1)^2 + (y-1)^2 - (x-4)^2 - (y-4)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - (x-4)^2 = (y-4)^2 - (y-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$3(2x-5) = -3(2y-5) \Leftrightarrow 2x-5 = 5-2y \Leftrightarrow y = 5-x.$$

Έξυπνα & Εύκολα!

Αντικαθιστώντας την τιμή του y στην $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$, βρίσκουμε $(x-1)^2 + (4-x)^2 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 4$ με τις αντίστοιχες τιμές $y_1 = 4, y_2 = 1$. Τελικά τα σημεία τομής των κύκλων C_1 και C_2 είναι $B(1,4)$ και $\Gamma(4,1)$.

γ) Το σημείο $A(x,y)$ ανήκει στην ευθεία που ανήκουν τα σημεία K και Λ με εξίσωση, όπως βρήκαμε στο α) ερώτημα, $y = x$ αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση. Οπότε έχουμε $A(x,x)$.

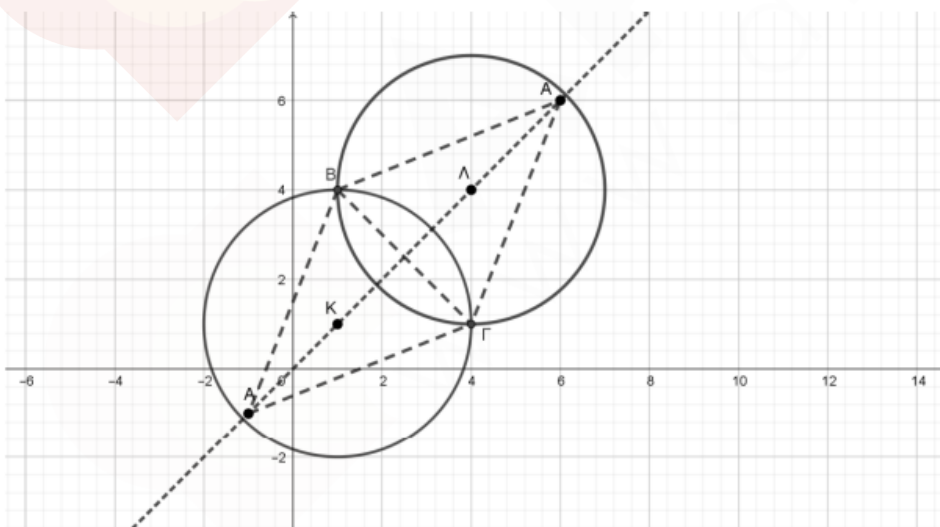
Είναι $\overline{AB} = (1-x, 4-x)$ και $\overline{A\Gamma} = (4-x, 1-x)$.

$$\text{Ακόμα } (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overline{AB} \\ \overline{A\Gamma} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1-x & 4-x \\ 4-x & 1-x \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| (1-x)^2 - (4-x)^2 \right| = \frac{1}{2} |6x-15|.$$

$$\text{Οπότε } (AB\Gamma) = \frac{21}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} |6x-15| = \frac{21}{2} \Leftrightarrow |6x-15| = 21 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-15 = 21 \\ 6x-15 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Τελικά βρήκαμε δύο σημεία της ευθείας $y = x$, τα $A(6,6)$ και $A'(-1,-1)$, που σχηματίζουν με

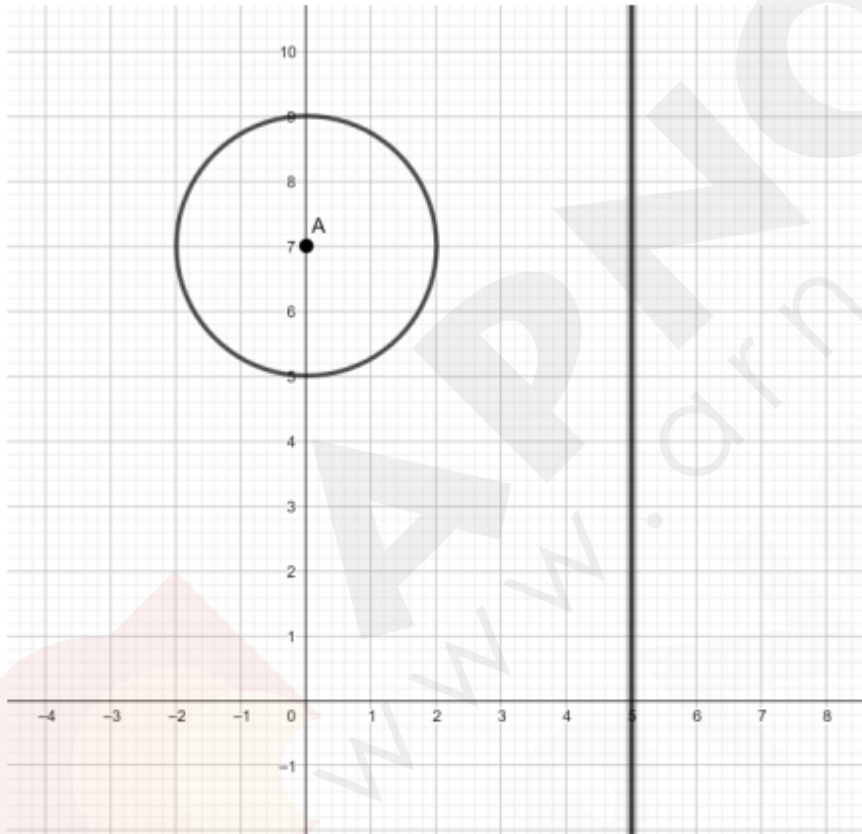
τα σημεία τομής B και Γ τρίγωνο εμβαδού $\frac{21}{2}$ τ.μ., όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έξυπνα & Εύκολα!

28. Θέμα 15791

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει κύκλο C_1 κέντρου A και την ευθεία $(\varepsilon): x=5$.



α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1 .

(Μονάδες 3)

β) Έστω ένα σημείο του επιπέδου $B(x_1, y_1)$

ι. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $B(x_1, y_1)$ και ακτίνα 2.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε όλους τους κύκλους του ερωτήματος β)ι. με ακτίνα 2, που εφάπτονται εξωτερικά στον C_1 και στην ευθεία (ε) .

(Μονάδες 10)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $A(0,7)$ και ακτίνα $\rho=2$, άρα αντικαθιστώντας στον τύπο $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$, τις αντίστοιχες τιμές έχουμε:

$$(x-0)^2+(y-7)^2=2^2 \Leftrightarrow x^2+(y-7)^2=4 \text{ που είναι η ζητούμενη εξίσωση του κύκλου } C_1.$$

β)

i. Σύμφωνα με το τύπο $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$, οι κύκλοι με κέντρο $B(x_1,y_1)$ και ακτίνα 2 έχουν εξίσωση $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=4$.

ii. Η απόσταση δύο σημείων $A(x_A,y_A)$ και $B(x_B,y_B)$ δίνεται από τον τύπο

$$(AB)=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}, \text{ οπότε για τα σημεία } A(0,7) \text{ και } B(x_1,y_1) \text{ έχουμε}$$

$$(AB)=\sqrt{(0-x_1)^2+(7-y_1)^2} \Leftrightarrow (AB)=\sqrt{x_1^2+(7-y_1)^2}.$$

γ) Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν η διάκεντρος είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους. Οπότε έχουμε:

$$(AB)=2+2 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-7)^2}=4 \Leftrightarrow x_1^2+(y_1-7)^2=16 \quad (1).$$

Ένας κύκλος εφάπτεται σε ευθεία αν και μόνο αν το κέντρο του κύκλου απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με την ακτίνα του. Οπότε έχουμε:

$$d(B,\varepsilon)=2 \Leftrightarrow \frac{|0+x_1-5|}{\sqrt{0^2+1^2}}=2 \Leftrightarrow |x_1-5|=2 \quad (2).$$

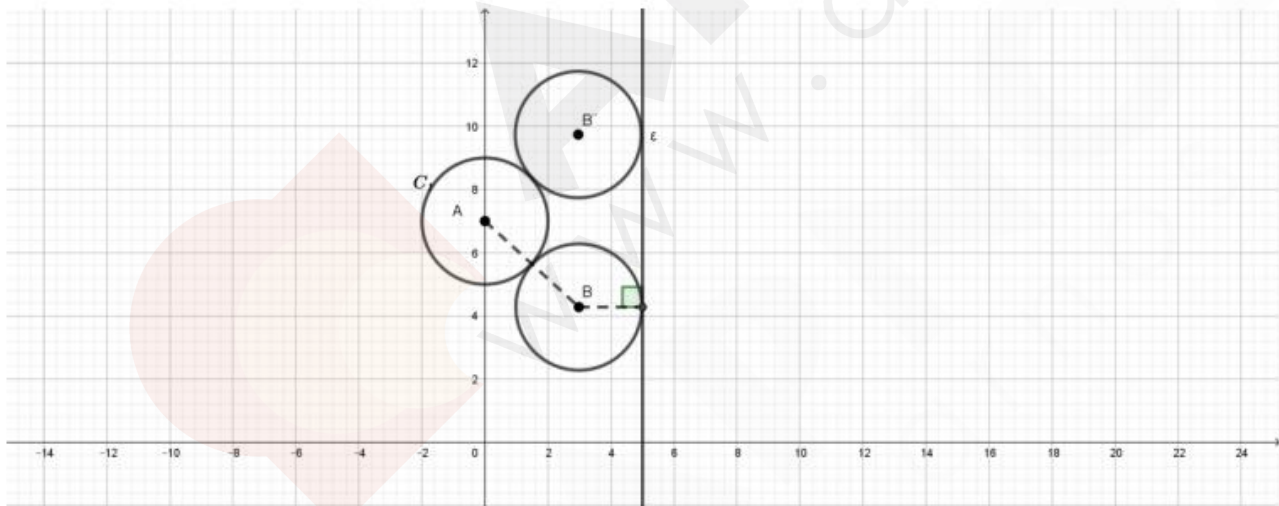
Για να βρούμε τους κύκλους που εφάπτονται στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases} x_1^2+(y_1-7)^2=16 \\ |x_1-5|=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Έξυπνα & Εύκολα!

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x_1^2 + (y_1 - 7)^2 = 16 \\ x_1 - 5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^2 + (y_1 - 7)^2 = 16 \\ x_1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_1 - 7)^2 = -33 \\ x_1 = 7 \end{cases} \text{ Αδύνατο.} \\ \text{ή} \\ \begin{cases} x_1^2 + (y_1 - 7)^2 = 16 \\ x_1 - 5 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 + (y_1 - 7)^2 = 16 \\ x_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_1 - 7)^2 = 7 \\ x_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 7 - \sqrt{7} \text{ ή } y_2 = 7 + \sqrt{7} \\ x_1 = 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

Τελικά είναι δύο οι δύο κύκλοι που εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο C_1 και στην ευθεία (ε) έχουν κέντρα τα σημεία $B(3, 7 - \sqrt{7})$ και $B'(3, 7 + \sqrt{7})$ και ακτίνα $\rho = 2$.



Έξυπνα & Εύκολα!

29. Θέμα 15826

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2(\lambda + 1)x - 2\lambda y + 2\lambda + 1 = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου K και την ακτίνα ρ .

(Μονάδες 7)

β) Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda = 0$;

(Μονάδες 3)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους K_1, K_2, K_3, K_4 που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ . Αξιοποιώντας το σχήμα,

i. να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

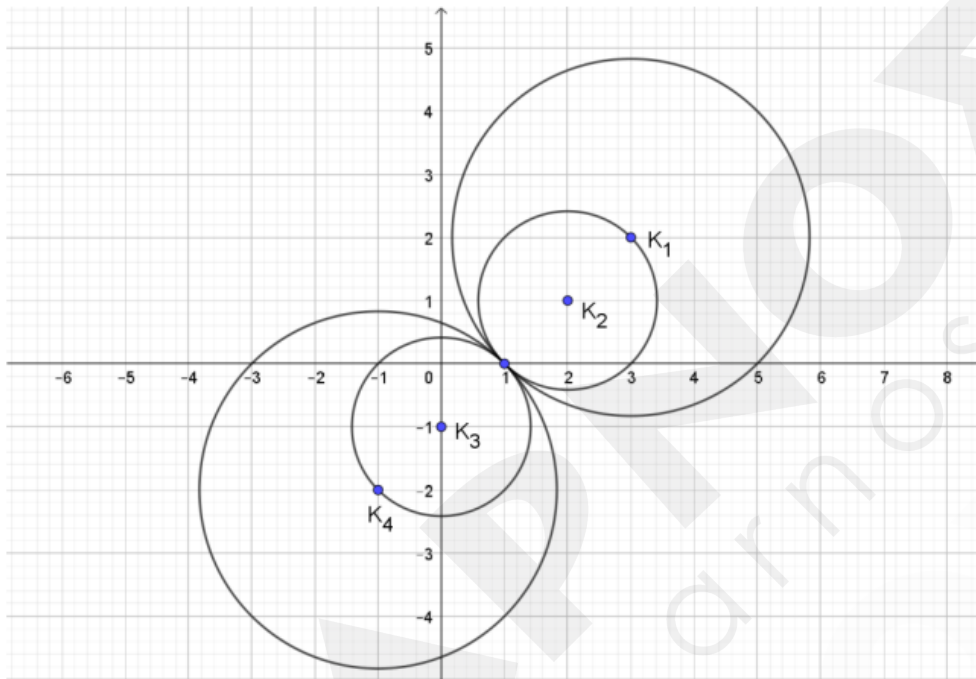
(Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 5)

iii. να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon : x + y - 1 = 0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1).

Έξυπνα & Εύκολα!


ΛΥΣΗ

α) Η (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, όπου $A = -2(\lambda + 1)$, $B = -2\lambda$ και $\Gamma = 2\lambda + 1$. Είναι:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2(\lambda + 1))^2 + (-2\lambda)^2 - 4(2\lambda + 1) = 4\lambda^2 + 8\lambda + 4 + 4\lambda^2 - 8\lambda - 4 = 8\lambda^2$$

Για να παριστάνει η (1) κύκλο πρέπει και αρκεί $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow 8\lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$.

Το κέντρο είναι το $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ δηλαδή $K(\lambda + 1, \lambda)$ και η ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{8\lambda^2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}|\lambda|}{2} = \sqrt{2}|\lambda|$$

β) Για $\lambda = 0$ η (1) γίνεται $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{και} \\ y = 0 \end{cases}$

που σημαίνει ότι παριστάνει το σημείο $M(1, 0)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ)

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα K_1, K_2 του σχήματος έχει συντελεστή

$$\text{διεύθυνσης } \lambda = \frac{y_{K_1} - y_{K_2}}{x_{K_1} - x_{K_2}} = \frac{2-1}{3-2} = 1 \text{ και εξίσωση } \zeta : y-1=1(x-2) \Leftrightarrow y=x-1.$$

Θα αποδείξουμε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω στην ευθεία ζ . Πράγματι το τυχαίο κέντρο $K(\lambda+1, \lambda)$ ανήκει στην ευθεία ζ , αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $y=x-1$.

ii. Οι κύκλοι του σχήματος διέρχονται από το σημείο $M(1,0)$. Θα αποδείξουμε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από το $M(1,0)$. Πράγματι οι συντεταγμένες του M επαληθεύουν την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, αφού

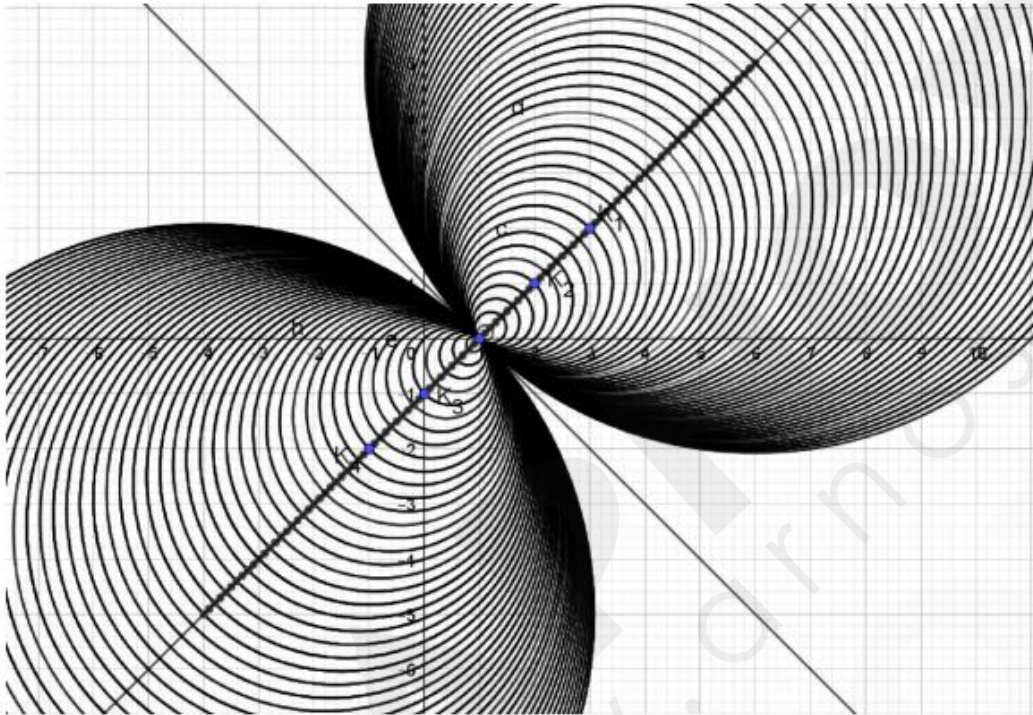
$$1^2 + 0^2 - 2(\lambda+1) \cdot 1 - 2\lambda \cdot 0 + 2 \cdot \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ που ισχύει.}$$

iii. Θα πρέπει το κέντρο $K(\lambda+1, \lambda)$ να απέχει από την ευθεία $\varepsilon : x+y-1=0$ απόσταση ίση με την ακτίνα ρ .

$$\text{Πράγματι } d(K, \varepsilon) = \frac{|\lambda+1+\lambda-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2|\lambda|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|\lambda| = \rho$$

Σημείωση : Η ευθεία $\varepsilon : x+y-1=0$ διέρχεται από το σημείο $M(1,0)$ και να είναι κάθετη στην ευθεία ζ , όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

Έξυπνα & Εύκολα!


30. Θέμα 15993

Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $A(1,0)$ και $B(3,0)$ είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων.

(Μονάδες 07)

Έξυπνα & Εύκολα!

δ) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 0$.

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Είναι γνωστό ότι η εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα $\rho > 0$.

Η (1) γράφεται $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = (\sqrt{\lambda^2 + 1})^2$, επομένως παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(2, \lambda)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{\lambda^2 + 1}$, διότι $\lambda^2 + 1 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Επιλέγουμε δύο από τους κύκλους (1), δίνοντας τις παρακάτω τιμές:

$$\text{Για } \lambda = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\text{Για } \lambda = 1, \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο ισότητες προκύπτει $y = 0$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση, είναι: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$.

Επομένως οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία, τα $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

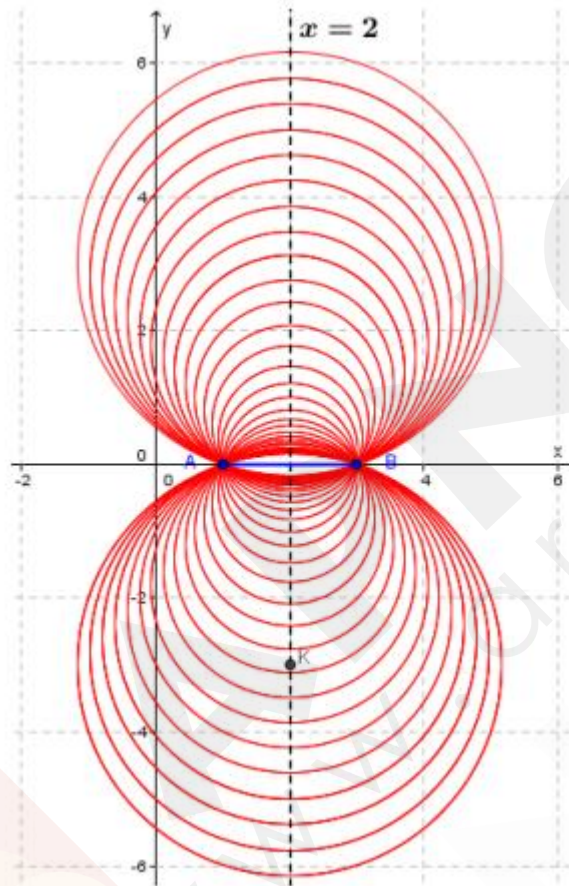
Με μια απλή αντικατάσταση στην (1), αποδεικνύεται ότι τα σημεία αυτά την επαληθεύουν για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και ως εκ τούτου, αποτελούν τα κοινά σημεία όλων των κύκλων.

γ) Η κοινή χορδή των κύκλων (1) είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB , το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$. Επομένως έχει εξίσωση $y = 0$.

Τα κέντρα όλων των κύκλων είναι της μορφής $K(2, \lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα, η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα όλων των κύκλων, είναι η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = 2$.

Επομένως είναι κάθετη στην κοινή χορδή.

Έξυπνα & Εύκολα!



δ) Αφού το σημείο $M(\alpha, \beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, πρέπει υποχρεωτικά να είναι ή το $A(1,0)$ ή το $B(3,0)$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει: $\alpha \cdot \beta = 1 \cdot 0 = 3 \cdot 0 = 0$.

Έξυπνα & Εύκολα!

31. Θέμα 16191

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(5,5)$.

α) Αν για το σημείο $M(x,\psi)$ ισχύει $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 32$, να αποδείξετε ότι:

i. Το σημείο M βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2 + \psi^2 - 6\psi - 6x + 10 = 0$ (1)
(Μονάδες 08)

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 03)

β) Αν το κέντρο του κύκλου είναι το $K(3,3)$ και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{2}$:

i. Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία $(\epsilon): \lambda x + \psi = 2$ εφάπτεται του κύκλου (1).
(Μονάδες 07)

ii. Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία (ϵ) σχηματίζει με την AB γωνία 45° ;
(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

α)

i.

$$\overline{AM} = (x-1, \psi-1)$$

$$\overline{BM} = (x-5, \psi-5)$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 32 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (\psi-1)^2}^2 + \sqrt{(x-5)^2 + (\psi-5)^2}^2 = 32$$

$$x^2 - 2x + 1 + \psi^2 - 2\psi + 1 + x^2 - 10x + 25 + \psi^2 - 10\psi + 25 = 32$$

$$2x^2 + 2\psi^2 - 12x - 12\psi + 20 = 0 \text{ διαιρούμε με } 2 \text{ και έχουμε}$$

$$x^2 + \psi^2 - 6x - 6\psi + 10 = 0 \text{ (1)}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

ii. Για να παριστάνει η εξίσωση $x^2 + \psi^2 + Ax + B\psi + \Gamma = 0$ κύκλο θα πρέπει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.

Από την (1) έχουμε $A = -6$, $B = -6$, $\Gamma = 10$.

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 6^2 + 6^2 - 4 \cdot 10 = 32 > 0$. Επομένως πρόκειται περί κύκλου.

β)

i. Για να εφάπτεται ο κύκλος στην ευθεία, πρέπει η απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία να ισούται με την ακτίνα του κύκλου.

$$d(K, \epsilon) = \rho \text{ δηλαδή } \frac{|3\lambda + 3 - 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |3\lambda + 1| = 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 + 1} \Rightarrow (3\lambda + 1)^2 = 8(\lambda^2 + 1).$$

$$9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 8\lambda^2 + 8 \Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0.$$

Υπολογίζουμε τις ρίζες και έχουμε $\lambda = -7$ και $\lambda = 1$.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι $\lambda_{AB} = \frac{\psi_B - \psi_A}{\chi_B - \chi_A} = \frac{5-1}{5-1} = 1$. Ένα διάνυσμα

παράλληλο στην AB είναι το $\vec{\delta}_1 = (1, 1)$ ενώ ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ϵ) είναι το $\vec{\delta}_2 = (1, -\lambda)$. Η γωνία των δύο ευθειών είναι η γωνία των δύο διανυσμάτων που είναι παράλληλα σε αυτές.

$$\cos(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) = \cos 45^\circ \text{ ή } \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| |\vec{\delta}_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \frac{(1, 1) \cdot (1, -\lambda)}{\sqrt{1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + \lambda^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \frac{1 - \lambda}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \lambda^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2(1 - \lambda) = \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{1 + \lambda^2} \text{ ή } 2(1 - \lambda) = 2\sqrt{1 + \lambda^2} \text{ ή } 1 - \lambda = \sqrt{1 + \lambda^2} \text{ ή } (1 - \lambda)^2 = (\sqrt{1 + \lambda^2})^2$$

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 = 1 + \lambda^2 \text{ ή } \lambda = 0.$$

Έξυπνα & Εύκολα!

32. Θέμα 18237

Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$, $\Gamma(1, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 7)

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$.

γ) Να βρείτε σημείο Κ στην μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ που ισαπέχει από τα Α, Β.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\overline{AB} = (4, 0) \text{ και } \overline{A\Gamma} = (2, 2)$$

και επειδή $\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά, οπότε

σχηματίζουν τρίγωνο.

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Η πλευρά ΒΓ έχει μέσο το σημείο $M\left(\frac{3+1}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$ δηλαδή το $M(2, 3)$ και συντελεστή

διεύθυνσης $\lambda_{\text{BG}} = \frac{4-2}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$, οπότε η μεσοκάθετη (ϵ) της ΒΓ διέρχεται από το Μ και έχει

συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$. Επομένως, η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι $y - 3 = x - 2$

δηλαδή $y = x + 1$.

γ) Έστω $K(x, y)$ το σημείο της μεσοκάθετης που ισαπέχει από τα σημεία Α, Β. Με $y = x + 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (KA) = (KB) &\Leftrightarrow (KA)^2 = (KB)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x-1)^2 = (x-3)^2 + (x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow 8x = 8 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

οπότε $y = 2$. Άρα, $K(1, 2)$.

δ) Το σημείο Κ από τον τρόπο προσδιορισμού του ισαπέχει από τις κορυφές Α, Β, Γ του τριγώνου, άρα είναι το περίκεντρό του. Σε ότι αφορά στην ακτίνα ρ του περιγεγραμμένου κύκλου ισχύει

$$\rho = (KA) = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Επομένως, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ έχει εξίσωση $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

33. Θέμα 18247

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$, όπου $\alpha, \beta > 0$.

α) Να βρείτε συναρτήσει των α, β

i. τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 5)

ii. την απόσταση (ΟΜ).

(Μονάδες 5)

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Αν $(OM) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $(OM) = \frac{(AB)}{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί.

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου OAB .

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α)

i. Οι συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB είναι $M\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$.

ii. Η απόσταση (OM) είναι

$$(OM) = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}} = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}.$$

β)

i. $(AB) = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (0 - \beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2 \cdot (OM)$ ή $(OM) = \frac{(AB)}{2}$.

ii. Η πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί είναι η εξής:

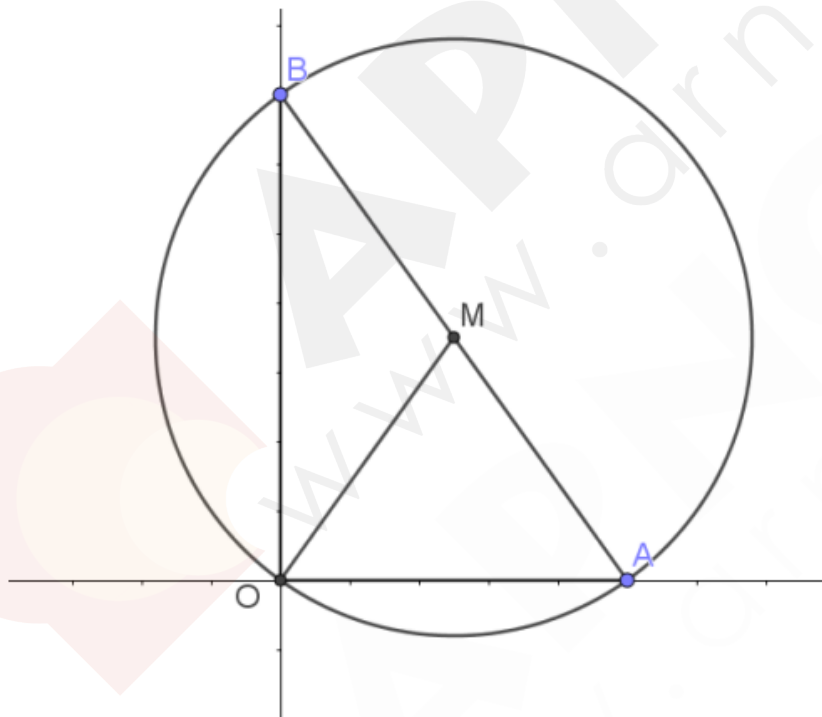
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Αφού $(OM) = \frac{(AB)}{2} = (AM) = (BM)$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο M ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου OAB και επομένως είναι το κέντρο του ζητούμενου περιγεγραμμένου κύκλου. Επίσης η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου είναι η

$(OM) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$. Συνεπώς ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}.$$



Έξυπνα & Εύκολα!

34. Θέμα 18415

Δίνεται η εξίσωση $(x-3\lambda)^2 + (y+2\lambda)^2 = 1$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon : 2x+3y=0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε .

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε .

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3\lambda, -2\lambda)$ που ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 2x+3y=0$, αφού $2 \cdot 3\lambda + 3(-2\lambda) = 6\lambda - 6\lambda = 0$.

β) Αν $M(x, y)$ τυχαίο σημείο μιας εκ των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, τότε

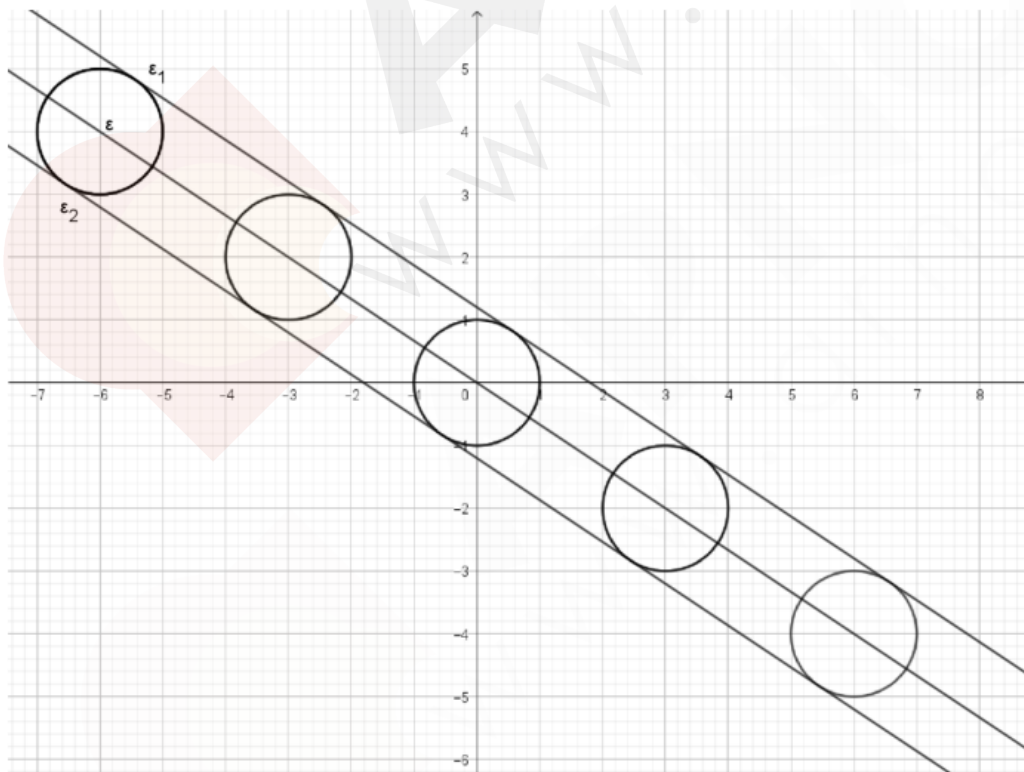
$$d(M, \varepsilon) = 1 \Leftrightarrow \frac{|2x+3y|}{\sqrt{2^2+3^2}} = 1 \Leftrightarrow |2x+3y| = \sqrt{13} \text{ οπότε } 2x+3y = \sqrt{13} \text{ ή}$$

$2x+3y = -\sqrt{13}$ που είναι οι ζητούμενες εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Αφού τα κέντρα $K(3\lambda, -2\lambda)$ όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1), ανήκουν στην $\varepsilon: 2x+3y=0$, δηλαδή στη μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, έχουμε ότι $d(K, \varepsilon_1) = d(K, \varepsilon_2) = 1 = \rho$. Συνεπώς όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

δ) Ένα τετράγωνο του οποίου οι δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, θα έχει μήκος πλευράς ίσο με την απόσταση των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, δηλαδή 2. Συνεπώς το εμβαδόν του θα είναι ίσο με 4.



Έξυπνα & Εύκολα!

35. Θέμα 18416

Δίνεται η εξίσωση $x(x-4)+y(y-2)=2(x+y-4)$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

(Μονάδες 6)

β) Δίνονται τα σημεία $A(4,4)$ και $B(2,0)$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y=\lambda x+4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta)=\sqrt{20}$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα γράφεται $x^2-4x+y^2-2y=2x+2y-8 \Leftrightarrow x^2-6x+y^2-4y=-8 \Leftrightarrow$
 $x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2+y^2-2\cdot 2\cdot y+2^2=3^2+2^2-8 \Leftrightarrow$
 $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ (1).

Άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$.

β)

i. Η (1) για $x=4$ και $y=4$ δίνει $(4-3)^2+(4-2)^2=5 \Leftrightarrow 1^2+2^2=5$ που ισχύει. Επίσης η

(1) για $x=2$ και $y=0$ δίνει $(2-3)^2+(0-2)^2=5 \Leftrightarrow 1^2+2^2=5$ που ισχύει.

Έξυπνα & Εύκολα!

Συνεπώς τα σημεία A και B είναι πάνω στον κύκλο. Για να είναι αντιδιαμετρικά αρκεί το

κέντρο K να είναι το μέσο του τμήματος AB. Πράγματι $x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \Leftrightarrow 3 = \frac{4+2}{2} \Leftrightarrow 3=3$

ισχύει και $y_K = \frac{y_A + y_B}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{4+0}{2} \Leftrightarrow 2=2$ ισχύει.

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέτρου AB είναι $\lambda = \frac{0-4}{2-4} = 2$.

Άρα και οι ζητούμενες εφαπτόμενες έχουν κλίση 2.

Έστω $\varepsilon: y = 2x + \beta \Leftrightarrow 2x - y + \beta = 0$ η εξίσωση της εφαπτόμενης του κύκλου.

Για να εφάπτεται στον κύκλο αρκεί $d(K, \varepsilon) = \rho \Rightarrow \frac{|2 \cdot 3 - 2 + \beta|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow |\beta + 4| = 5$, οπότε

$\beta + 4 = 5$ ή $\beta + 4 = -5$ δηλαδή $\beta = 1$ ή $\beta = -9$. Επομένως οι εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1: y = 2x + 1$ και $\varepsilon_2: y = 2x - 9$.

γ) Ισχύει $(\Gamma\Delta) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = 2\rho$. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά δηλαδή η ευθεία (η) πρέπει να διέρχεται από το κέντρο K του κύκλου. Άρα αντικαθιστώντας στην εξίσωση της (η) τις συντεταγμένες του κέντρου $x=3$ και $y=2$

έχουμε : $2 = 3\lambda + 4 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$.

36. Θέμα 18521

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,4)$ και $\Gamma(3,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\eta \hat{B}\hat{\Gamma} = 90^\circ$.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου c , ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ .

(Μονάδες 09)

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Αν ο κύκλος c έχει εξίσωση $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{5}{2}$, τότε να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (2 - 1, 4 - 2) = (1, 2)$ και $\overrightarrow{AG} = (3 - 1, 1 - 2) = (2, -1)$.

Τότε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$. Επομένως τα διανύσματα είναι κάθετα και ως εκ τούτου $\widehat{BAG} = 90^\circ$.

Εναλλακτική λύση: $\lambda_{AB} = \frac{4-2}{2-1} = 2$, $\lambda_{AG} = \frac{1-2}{3-1} = -\frac{1}{2}$ και $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{AG} = -1$.

β) Αφού το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο στο A , ο κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A, B και G έχει διάμετρο την υποτείνουσα BG του τριγώνου και κέντρο το μέσο K της BG .

Αλλά $x_K = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$, $y_K = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$, οπότε $K(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$.

Για την ακτίνα του, είναι: $\rho = \frac{(BG)}{2} = \frac{\sqrt{(3-2)^2 + (1-4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Ως γνωστόν, η εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι η

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Επομένως, η εξίσωση του κύκλου c είναι η $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{5}{2}$.

γ) Έστω $\varepsilon: y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$ εξίσωση ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία ισούται με την ακτίνα του ρ . Είναι λοιπόν:

Έξυπνα & Εύκολα!

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot \frac{5}{2} - 1 \cdot \frac{5}{2} + 0|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot |\lambda - 1| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow$$

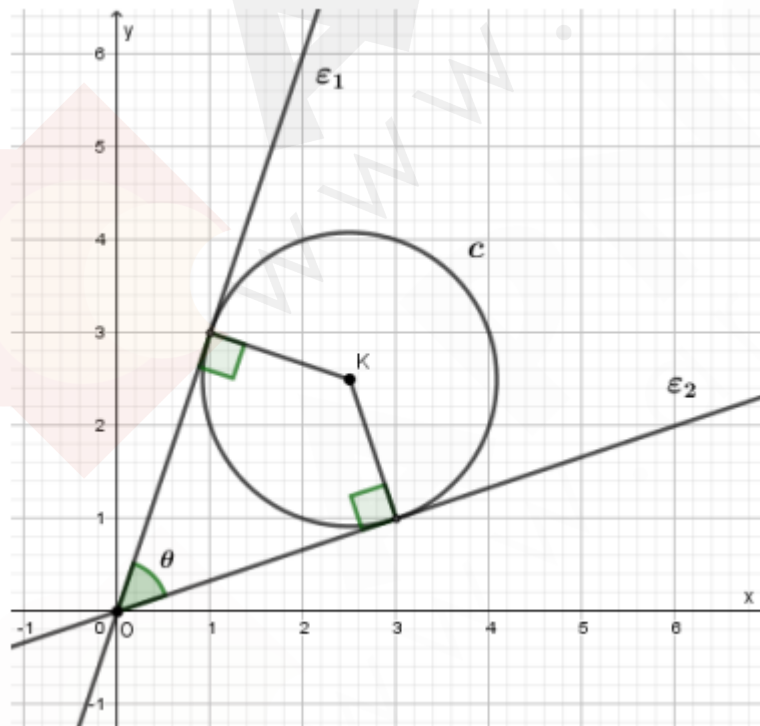
$$25(\lambda - 1)^2 = 10(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 3\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64 > 0$ και οι λύσεις της δευτέρου βαθμού

εξίσωσης που έχει προκύψει είναι οι $\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} \Leftrightarrow \lambda_1 = 3$ ή $\lambda_2 = \frac{1}{3}$.

Επειδή από ένα σημείο εκτός κύκλου φέρονται δύο ακριβώς εφαπτόμενες προς αυτόν, οι ζητούμενες ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο έχουν εξισώσεις:

$$\varepsilon_1: y = 3x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = \frac{1}{3}x$$



Έξυπνα & Εύκολα!

37. Θέμα 18567

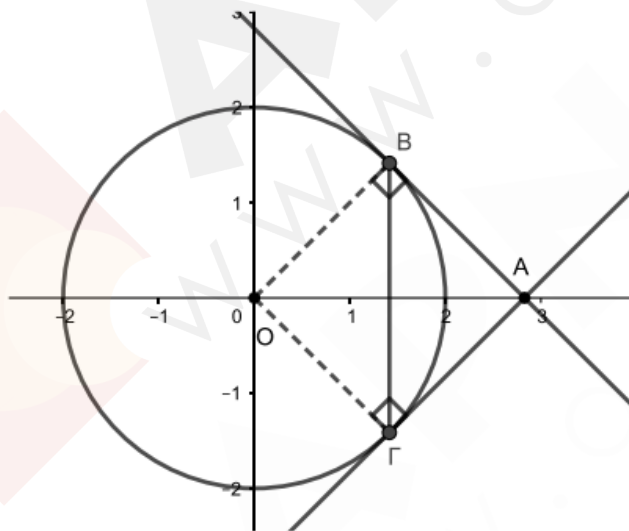
Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο $A(2\sqrt{2}, 0)$.

α)

- i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου C . (Μονάδες 05)
- ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο A και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 12)

β) Αν B, Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο A , να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου $ΑΒΟΓ$. (Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ



α)

- i. Το σημείο $A(2\sqrt{2}, 0)$ είναι εξωτερικό του κύκλου C γιατί είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Ox με $(OA) = 2\sqrt{2} > 2$ με 2 η ακτίνα του κύκλου.

Έξυπνα & Εύκολα!

ii. Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(2\sqrt{2}, 0)$ είναι:

- Η κατακόρυφη $x = 2\sqrt{2}$ που δεν είναι εφαπτομένη του κύκλου C γιατί $d(O, \varepsilon) = 2\sqrt{2}$
- Οι ευθείες με εξίσωση $(\varepsilon): y - 0 = \lambda(x - 2\sqrt{2})$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $\lambda x - y - 2\lambda\sqrt{2} = 0$

Η (ε) είναι εφαπτομένη του C αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του O ισούται

με την ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή $d(O, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 0 - 2\lambda\sqrt{2}|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow$

$$2\sqrt{2} |\lambda| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow 8\lambda^2 = 4\lambda^2 + 4 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Για $\lambda = 1$, $(\varepsilon_1): y = x - 2\sqrt{2}$ και για $\lambda = -1$, $(\varepsilon_2): y = -x + 2\sqrt{2}$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι 1 και -1 αντίστοιχα και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. Άρα οι εφαπτόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 του κύκλου από το σημείο A είναι μεταξύ τους κάθετες.

β) Αν Β, Γ τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων ευθειών ε_1 και ε_2 με τον κύκλο C, τότε οι ακτίνες του κύκλου στα σημεία αυτά είναι κάθετες στις αντίστοιχες εφαπτόμενες. Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΟΓ έχει 3 ορθές γωνίες, οπότε είναι ορθογώνιο. Επειδή $OA = OB = 2$ ως ακτίνες του κύκλου, άρα είναι ρόμβος. Επομένως το ΑΒΟΓ είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή 2. Συνεπώς $(ΑΒΟΓ) = 2^2 = 4$ τ.μ.

38. Θέμα 18569

Δίνεται ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 1$.

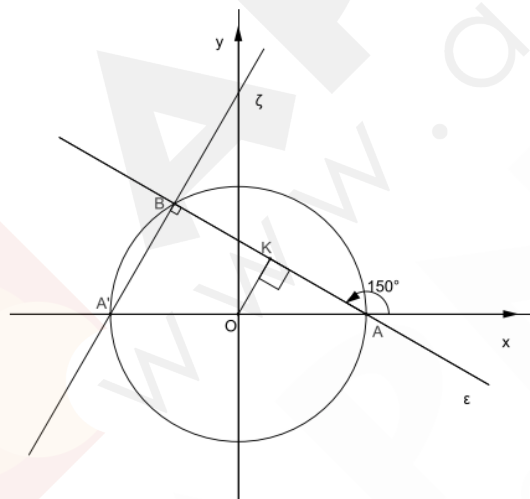
α) Αν Α και Α' είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Ox και Ox' αντίστοιχα, τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Α' είναι $A(1, 0)$ και $A'(-1, 0)$.

(Μονάδες 05)

Έξυπνα & Εύκολα!

- ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που διέρχεται από το A και σχηματίζει με τον άξονα x' γωνία 150° . (Μονάδες 06)
- β) Αν η ευθεία ϵ τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο B , να αποδείξετε ότι η χορδή AB έχει μήκος $\sqrt{3}$. (Μονάδες 08)
- γ) Αν η ευθεία ϵ έχει εξίσωση $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από τα σημεία A' και B . (Μονάδες 06)

ΛΥΣΗ


- α)
- i. Τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Ox και Ox' έχουν τεταγμένη μηδέν. Επομένως, για $y=0$ έχουμε: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Άρα $A'(-1,0)$ και $A(1,0)$.
- ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ϵ που διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$, είναι $\lambda_\epsilon = \epsilon\varphi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- Οπότε η εξίσωση της ϵ είναι: $y-0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β)

i. Αν OK το απόστημα της χορδής AB, τότε

$$OK = d(O, \varepsilon) = \frac{\left| \frac{-\sqrt{3}}{3} \cdot 0 - 0 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 1^2}} = \frac{\left| \frac{\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{\frac{12}{9}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2}$$

 Αν $AK = \mu = \frac{AB}{2}$, με Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAK έχουμε:

$$OK^2 + \mu^2 = OA^2 \Leftrightarrow \mu^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \mu^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \mu = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Άρα } AB = 2\mu = \sqrt{3}.$$

 ii. Η γωνία A'BA είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικόκλιο, άρα $A'B \perp BA$ δηλαδή

$$\zeta \perp \varepsilon, \text{ οπότε } \lambda_{\zeta} = -\frac{1}{\lambda_{\varepsilon}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ και } (\zeta): y - 0 = \sqrt{3}(x + 1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}(x + 1).$$

39. Θέμα 20091

Τα σημεία $A(-7, -1)$ και $B(3, -5)$ είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου K. Το σημείο M είναι το μέσο της χορδής AB και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία K και M.

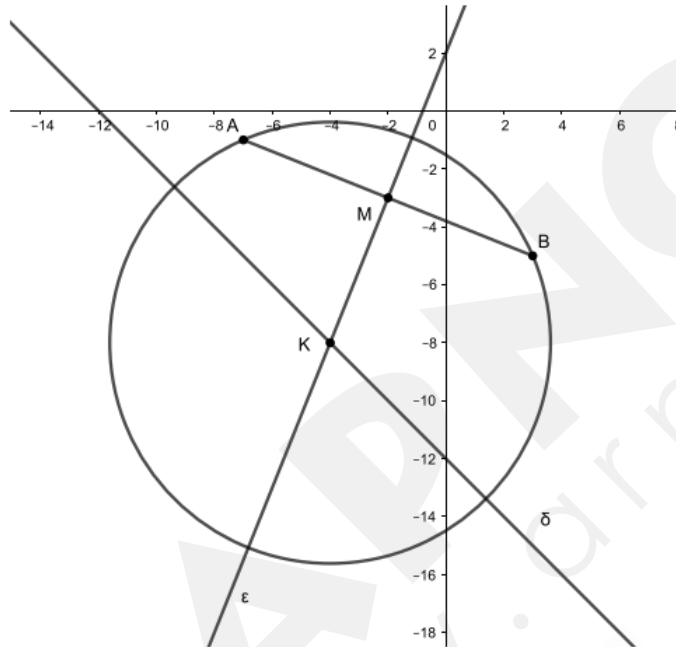
α) Να βρείτε:

- i. Τις συντεταγμένες του σημείου M. (Μονάδες 04)
- ii. Την εξίσωση της ευθείας KM. (Μονάδες 08)

 β) Αν από το κέντρο K του κύκλου διέρχεται η ευθεία (δ): $x+y = -12$, τότε:

- i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου K. (Μονάδες 07)
- ii. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C. (Μονάδες 06)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ


α)

- i. Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{-7+3}{2}, \frac{-1-5}{2}\right) = (-2, -3)$.
- ii. Το τμήμα KM ενώνει το κέντρο του κύκλου με το μέσο M της χορδής AB, οπότε είναι το απόστημα της χορδής και $KM \perp AB$. Οπότε $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{KM} = -1$.

Είναι $\lambda_{AB} = \frac{-5+1}{3+7} = -\frac{2}{5}$, επομένως $\lambda_{KM} = \frac{5}{2}$. Η εξίσωση της ευθείας KM είναι

$$(KM): y - y_M = \frac{5}{2}(x - x_M) \Leftrightarrow y + 3 = \frac{5}{2}(x + 2) \Leftrightarrow 2y + 6 = 5x + 10 \Leftrightarrow 5x - 2y + 4 = 0$$

β)

- i. Το κέντρο K του κύκλου ανήκει στην ευθεία δ και στην ευθεία KM. Άρα η τομή των δύο ευθειών, δηλαδή η λύση του συστήματος των δύο εξισώσεών τους, θα είναι οι συντεταγμένες του σημείου K.

Έξυπνα & Εύκολα!

$$(\Sigma) \begin{cases} 5x - 2y = -4 \\ x + y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2y = -4 \\ 2x + 2y = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -28 \\ x + y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -8 \end{cases}$$

Άρα $K(-4, -8)$.

- ii. Αρκεί να βρούμε την ακτίνα του κύκλου που είναι το μήκος του τμήματος ΚΑ.

$$(KA) = \sqrt{(-4 + 7)^2 + (-8 + 1)^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}.$$

Η εξίσωση του κύκλου είναι $C: (x+4)^2 + (y+8)^2 = 58$.

40. Θέμα 20229

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbf{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbf{R}$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν. (Μονάδες 7)

δ) Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για $\lambda=0$. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία:

$$A = -(\lambda + 8), B = \lambda \text{ και } \Gamma = 7, \text{ οπότε } A^2 + B^2 - 4\Gamma = [-(\lambda + 8)]^2 + \lambda^2 - 4 \cdot 7 = (\lambda + 8)^2 + \lambda^2 - 28 =$$

$$\lambda^2 + 16\lambda + 64 + \lambda^2 - 28 = 2\lambda^2 + 16\lambda + 36 = 2(\lambda^2 + 8\lambda + 18) > 0, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R},$$

εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = -8 < 0$.

Άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επίσης το κέντρο των κύκλων που ορίζονται από την (1) είναι το

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(-\frac{-(\lambda + 8)}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right) = \left(\frac{\lambda + 8}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R} \text{ και ακτίνα } \eta$$

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} = \frac{1}{2} \sqrt{2(\lambda^2 + 8\lambda + 18)}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

β) Λόγω του ερωτήματος (α), τα κέντρα των κύκλων που εκφράζει η εξίσωση (1) είναι

$$\text{τα } K\left(\frac{\lambda + 8}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right), \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Αν } K(x, y), \text{ τότε:}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda + 8}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2y + 8}{2} \\ \lambda = -2y \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 4 \\ \lambda = -2y \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ \lambda = -2y \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}. \text{ Άρα τα κέντρα των}$$

κύκλων της εξίσωσης (1), κινούνται στην ευθεία $\epsilon: x + y - 4 = 0$.

γ) Η εξίσωση (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ γράφεται:

$$x^2 + y^2 - \lambda x - 8x + \lambda y + 7 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 8x + 7) + \lambda(y - x) = 0, \text{ οπότε:}$$

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + x^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

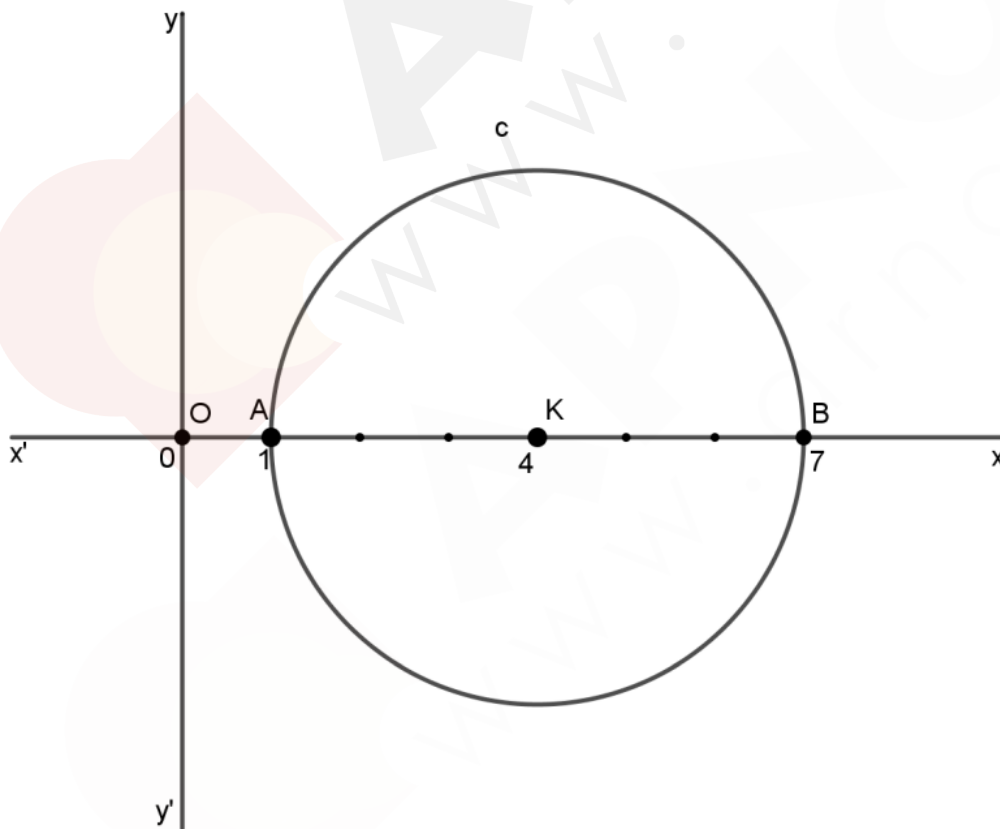
$$\begin{cases} y = x \\ x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ άρα } x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} = y \text{ ή } x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = y.$$

Έξυπνα & Εύκολα!

Επομένως για κάθε $\lambda \in \mathfrak{R}$, όλοι οι κύκλοι (1), διέρχονται από τα σταθερά σημεία

$$M\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ και } N\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

δ) Λόγω του ερωτήματος (α), για $\lambda = 0$ η εξίσωση (1), εκφράζει κύκλο με κέντρο το $K(4, 0)$ και ακτίνα $\rho = 3$. Ο κύκλος αυτός φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία του κύκλου που απέχουν την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων βρίσκονται πάνω στην OK . Οπότε το σημείο του που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $O(0, 0)$, είναι το $A(1, 0)$ και το σημείο του που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση είναι το $B(7, 0)$.



Έξυπνα & Εύκολα!

41. Θέμα 20700

Δίνεται το τετράγωνο MM_1OM_2 με $M(4,4), M_1(4,0), M_2(0,4)$. Αν O η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, τότε:

α) Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου MM_1OM_2 έχει εξίσωση $C: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y = 8$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου C

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας ε με τον κύκλο C .

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η πλευρά του τετραγώνου είναι $(MM_1) = 4$. Η διαγώνιος OM είναι η διάμετρος του ζητούμενου κύκλου.

Έχουμε $(OM) = \sqrt{(OM_1)^2 + (MM_1)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, δηλαδή $\rho = 2\sqrt{2}$

Το μέσον της OM έχει συντεταγμένες $K(2,2)$.

Άρα ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου (περιγεγραμμένος κύκλος) έχει εξίσωση $C: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$.

β) Για να είναι η ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου θα πρέπει η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία να είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

Έχουμε:

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 + 2 - 8|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = \rho.$$

Άρα η ευθεία ε είναι εφαπτομένη του κύκλου.

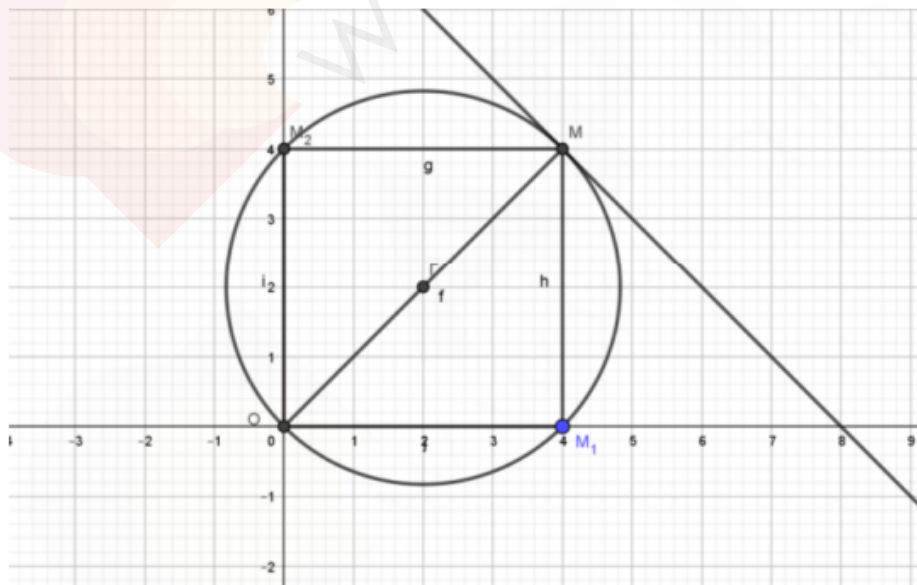
Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Έστω $N(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Τότε οι συντεταγμένες του σημείου θα πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας και του κύκλου.

Έχουμε:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 8 \\ (x_1 - 2)^2 + (y_1 - 2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ (8 - y_1 - 2)^2 + (y_1 - 2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ (6 - y_1)^2 + (y_1 - 2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ 36 - 12y_1 + y_1^2 + y_1^2 - 4y_1 + 4 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ 2y_1^2 - 16y_1 + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ y_1^2 - 8y_1 + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - y_1 \\ (y_1 - 4)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 4 \end{cases}$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $M(4,4)$.



Έξυπνα & Εύκολα!

42. Θέμα 20863

Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

(Μονάδες 07)

β) Αν K είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας (ζ), να βρείτε την εξίσωση (c) όλων των κύκλων, οι οποίοι έχουν κέντρο K και διέρχονται από τα σημεία A και B , συναρτήσει μιας παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 08)

γ) Αν η εξίσωση $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει όλους τους κύκλους (c) του ερωτήματος β), τότε:

i. Να σχεδιάσετε τον κύκλο, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB .

(Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $x + \lambda y - 1 = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους (c) στο σημείο $A(1,0)$.

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι το σημείο $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, δηλαδή το $M(2,0)$. Επιπλέον, το ευθύγραμμο τμήμα AB βρίσκεται πάνω στον άξονα x' . Επομένως, η μεσοκάθετη ευθεία του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι η κατακόρυφη ευθεία (ζ) που διέρχεται από το σημείο M και έχει εξίσωση $x = 2$.

Έξυπνα & Εύκολα!

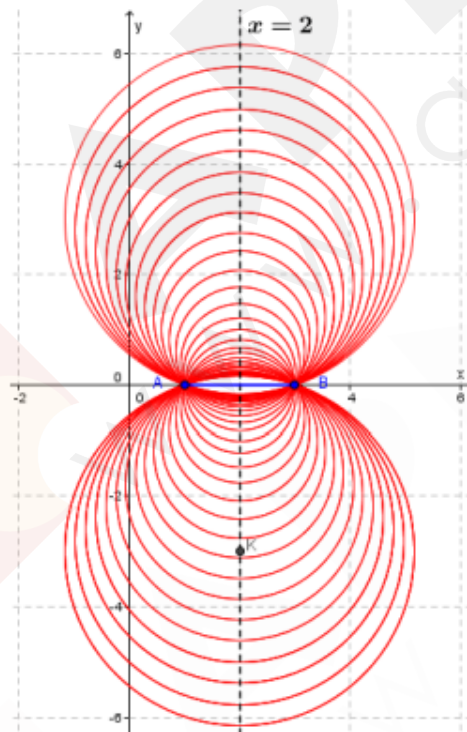
β) Η εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ είναι η $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.

Αφού το σημείο K ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $x = 2$, τότε θα είναι της μορφής $K(2, \lambda)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Το κέντρο των κύκλων λοιπόν είναι το σημείο $K(2, \lambda)$.

Αφού οι κύκλοι διέρχονται από τα σημεία A και B , τότε η ακτίνα τους είναι:

$$\rho = (KB) = (KA) = \sqrt{(2-1)^2 + (\lambda-0)^2} = \sqrt{1 + \lambda^2}.$$

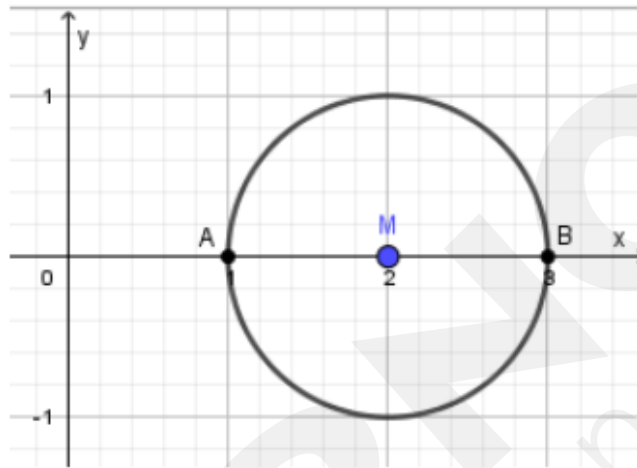
Επομένως, η εξίσωσή τους είναι η $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1, \lambda \in \mathbb{R}$ (1).



γ)

- i. Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το μέσον $M(2,0)$ της διαμέτρου AB , επομένως το $\lambda = 0$. Έτσι η εξίσωσή του είναι η $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

Έξυπνα & Εύκολα!



ii. Το σημείο $A(1,0)$ ανήκει στην ευθεία (ε) και σε όλους τους κύκλους.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $d(K, \varepsilon) = \rho$. Πραγματικά είναι

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|1 \cdot 2 + \lambda \cdot \lambda - 1|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \frac{|1 + \lambda^2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \frac{1 + \lambda^2}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \frac{(1 + \lambda^2)\sqrt{1 + \lambda^2}}{(1 + \lambda^2)} = \sqrt{1 + \lambda^2}$$

43. Θέμα 21154

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 4ax - 4ay = 0 \quad (1)$$

όπου a είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε το κέντρο K και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του a .

(Μονάδες 6)

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του α του ερωτήματος (α).

(Μονάδες 5)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

με $A = -4\alpha$, $B = -4\alpha$ και $\Gamma = 0$.

Για να παριστάνει κύκλο θα πρέπει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$. Είναι:

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16\alpha^2 + 16\alpha^2 = 32\alpha^2$$

Επομένως, θα πρέπει

$$\alpha^2 > 0$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται αν και μόνο αν $\alpha \neq 0$.

β) Τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η εξίσωση (1) για $\alpha \neq 0$, είναι

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (2\alpha, 2\alpha)$$

και η ακτίνα

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{32\alpha^2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}|\alpha|}{2} = 2\sqrt{2}|\alpha|$$

Έξυπνα & Εύκολα!

γ) Για τα κέντρα των κύκλων έχουμε:

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 2\alpha \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Επομένως, τα κέντρα των κύκλων κινούνται πάνω στην ευθεία $y = x$ με εξαίρεση το σημείο $O(0,0)$, αφού είναι $x \neq 0$ και $y \neq 0$.

δ) Για να εφάπτεται κάποιος από τους κύκλους που ορίζονται από την εξίσωση (1) στον άξονα $x'x$, θα πρέπει να ισχύει:

$$|y_k| = R$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$|2\alpha| = 2\sqrt{2}|\alpha| \quad \text{ή} \quad |\alpha| = \sqrt{2}|\alpha| \quad \text{ή} \quad |\alpha|(1 - \sqrt{2}) = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha = 0$$

Όμως, $\alpha \neq 0$, οπότε δεν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται του άξονα $x'x$.

44. Θέμα 21159

Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$ με $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων με διάμετρο την AB , για κάθε τιμή των α και β είναι $x^2 + y^2 - \alpha x - (10 - \alpha)y = 0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με διάμετρο την AB , για τις διάφορες τιμές των α και β διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή O των αξόνων και ένα σημείο P του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την AB για τις διάφορες τιμές των α και β . (Μονάδες 8)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Το κέντρο των κύκλων με διάμετρο την AB, είναι το μέσο της M, επομένως

$$M\left(\frac{\alpha+0}{2}, \frac{\beta+0}{2}\right) \text{ ή } M\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$$

και η ακτίνα τους είναι

$$\rho = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(0-\alpha)^2 + (\beta-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}.$$

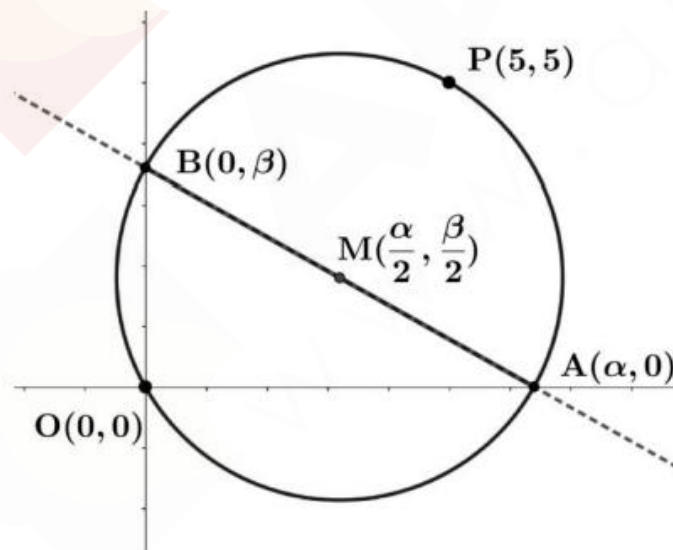
επομένως η εξίσωση των κύκλων είναι:

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} + y^2 - 2y \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{4} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0. \quad (1)$$

Είναι όμως $\alpha + \beta = 10$, τότε $\beta = 10 - \alpha$ και η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 + y^2 - \alpha x - (10 - \alpha)y = 0.$$



Έξυπνα & Εύκολα!

β) Για $\alpha = 1$ έχουμε τον κύκλο $C_1: x^2 + y^2 - x - 9y = 0$. (1)

Για $\alpha = 9$ έχουμε τον κύκλο $C_2: x^2 + y^2 - 9x - y = 0$. (2)

Θα βρούμε τα κοινά σημεία των δύο παραπάνω κύκλων, αν υπάρχουν.

Η αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις των παραπάνω κύκλων έχουμε:

$$8x - 8y = 0 \Rightarrow x = y$$

τότε από την εξίσωση (2) έχουμε:

$$x^2 + x^2 - 9x - x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 5$$

Για $x = 0$ έχουμε $y = 0$ και για $x = 5$ έχουμε $y = 5$, άρα οι δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία $O(0,0)$ και $P(5,5)$.

Όλοι οι κύκλοι διέρχονται από το σημείο $P(5,5)$ αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση των κύκλων $x^2 + y^2 - \alpha x - (10 - \alpha)y = 0$.

Πράγματι αντικαθιστώντας τις τιμές $x = 5$ και $y = 5$ έχουμε:

$$0^2 + 0^2 - \alpha \cdot 0 - (10 - \alpha) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Ομοίως, όλοι οι κύκλοι διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

γ) Έστω τυχαίο σημείο $M(x, y)$ είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, αν και μόνο αν

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\alpha}{2} \\ y = \frac{\beta}{2} \\ \alpha + \beta = 10, \alpha > 0, \beta > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2x \\ \beta = 2y \\ \alpha + \beta = 10, \alpha > 0, \beta > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 2x + 2y = 10 \Leftrightarrow x + y = 5. \text{ (ε)}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

Η παραπάνω ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία (5,0) και (0,5). Επειδή $\alpha, \beta > 0$ έχουμε:

$$\alpha > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και}$$

$$\beta > 0 \Leftrightarrow y > 0.$$

Συνεπώς ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB, που ορίζεται από την ευθεία $x + y = 5$ με $x > 0$ και $y > 0$ εκτός από τα άκρα του A(5,0) και B(0,5).

45. Θέμα 21276

Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

- τη γραμμή γ_1 , κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: $A(\lambda-1, 2\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- τη γραμμή γ_2 , που περνάει από το σταθμό $\Sigma(-4, 2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-1, 3)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές γ_1 και γ_2 . (Μονάδες 10)

β) Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο $K(1, 1)$ του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές γ_1 και γ_2 . Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές. (Μονάδες 9)

γ) Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο K και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής γ_1 . (Μονάδες 6)

Έξυπνα & Εύκολα!

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $A(\lambda-1, 2\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, οπότε αν $A(x, y)$ τότε:

$$\begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x + 1 \\ y = 2(x + 1) + 1 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ \lambda = x + 1 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}, \text{ οπότε } \gamma_1: 2x - y + 3 = 0,$$

η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκετε η γραμμή γ_1 .

Επίσης ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{u} = (-1, 3)$ είναι:

$$\lambda = \frac{y}{x} = \frac{3}{-1} = -3 = \lambda_{\gamma_2}, \text{ οπότε}$$

$$\gamma_2: y - y_{\Sigma} = \lambda_{\gamma_2}(x - x_{\Sigma}) \text{ ή } \gamma_2: y - 2 = -3(x + 4) \text{ ή } \gamma_2: y - 2 = -3x - 12 \text{ ή } \gamma_2: 3x + y + 10 = 0,$$

η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκετε η γραμμή γ_2 .

β) Είναι $K(1, 1)$, οπότε λόγω του ερωτήματος (α) είναι:

$$d(K, \gamma_1) = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ και}$$

$$d(K, \gamma_2) = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 10|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|14|}{\sqrt{10}} = \frac{14}{\sqrt{10}} = \frac{14\sqrt{10}}{10} = \frac{7\sqrt{10}}{5}.$$

Εφόσον $\frac{4\sqrt{5}}{5} < \frac{7\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow d(K, \gamma_1) < d(K, \gamma_2)$, προφανώς συμφέρει η σύνδεση του

σταδίου με τη γραμμή γ_1 .

γ) Το κέντρο του ζητούμενου κύκλου που ορίζει το κυκλικό πάρκο γύρω από το στάδιο, είναι το σημείο $K(1, 1)$. Εφόσον ο κύκλος αυτός εφάπτεται στη γραμμή γ_1 , η

ακτίνα του λόγω του ερωτήματος (β), είναι $\rho = d(K, \gamma_1) = \frac{4}{\sqrt{5}}$. Επομένως:

$$C: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 \text{ ή } C: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{16}{5}, \text{ είναι η εξίσωσή του.}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

46. Θέμα 21349

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο O θεωρούμε κύκλο (C) και ευθεία (ϵ) με εξισώσεις $x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$ (1) και $4x + 3y - 10 = 0$ (2) αντίστοιχα.

α)

i. Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα R του κύκλου (C) .

(Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου K από την ευθεία (ϵ) και να αποδείξετε ότι η ευθεία (ϵ) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία.

(Μονάδες 4)

iii. Να προσδιορίσετε τα σημεία A και B στα οποία η ευθεία (ϵ) τέμνει τον κύκλο (C) .

(Μονάδες 5)

β) Αν είναι $A(1,2)$ και $B(4, -2)$, τότε:

i. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο AB διέρχεται από το σημείο O .

(Μονάδες 6)

ΛΥΣ

Η

α) i. Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A = -9$,

$$B = -3, \Gamma = 10 \text{ και } A^2 + B^2 - 4\Gamma = 81 + 9 - 40 = 50 > 0.$$

Επομένως, το κέντρο του κύκλου είναι

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Έξυπνα & Εύκολα!

και η ακτίνα του

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Εναλλακτική λύση (με συμπλήρωση τετραγώνου)

Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$$

$$\left[x^2 - 2 \cdot \frac{9}{2}x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 \right] + \left[y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} + \frac{9}{4} - \frac{40}{4}$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{50}{4}$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

ii. Η απόσταση του κέντρου Κ από την ευθεία (ε) είναι

$$d(K, \varepsilon) = \frac{\left| 4 \cdot \frac{9}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2} - 10 \right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{\left| \frac{25}{2} \right|}{5} = \frac{5}{2} < \frac{5\sqrt{2}}{2} = R$$

Άρα, η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία Α και Β.

ii. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2). Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$3y = 10 - 4x \Leftrightarrow y = \frac{10 - 4x}{3}$$

Έξυπνα & Εύκολα!

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1), οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$x^2 + \left(\frac{10-4x}{3}\right)^2 - 9x - 3\left(\frac{10-4x}{3}\right) + 10 = 0$$

$$x^2 + \frac{(10-4x)^2}{9} - 9x - (10-4x) + 10 = 0$$

$$x^2 + \frac{(10-4x)^2}{9} - 9x + 4x = 0$$

$$x^2 + \frac{(10-4x)^2}{9} - 5x = 0$$

$$9x^2 + (100 - 80x + 16x^2) - 45x = 0$$

$$25x^2 - 125x + 100 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad (3)$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (3) είναι $x = 1$, $x = 4$.

Για $x = 1$ είναι $y = 2$.

Για $x = 4$ είναι $y = -2$.

Άρα, τα σημεία τομής της ευθείας (ϵ) και του κύκλου (C) είναι A(1,2) και B(4, -2).

β) i. Είναι:

$$\vec{OA} = (x_A - x_O, y_A - y_O) = (1, 2)$$

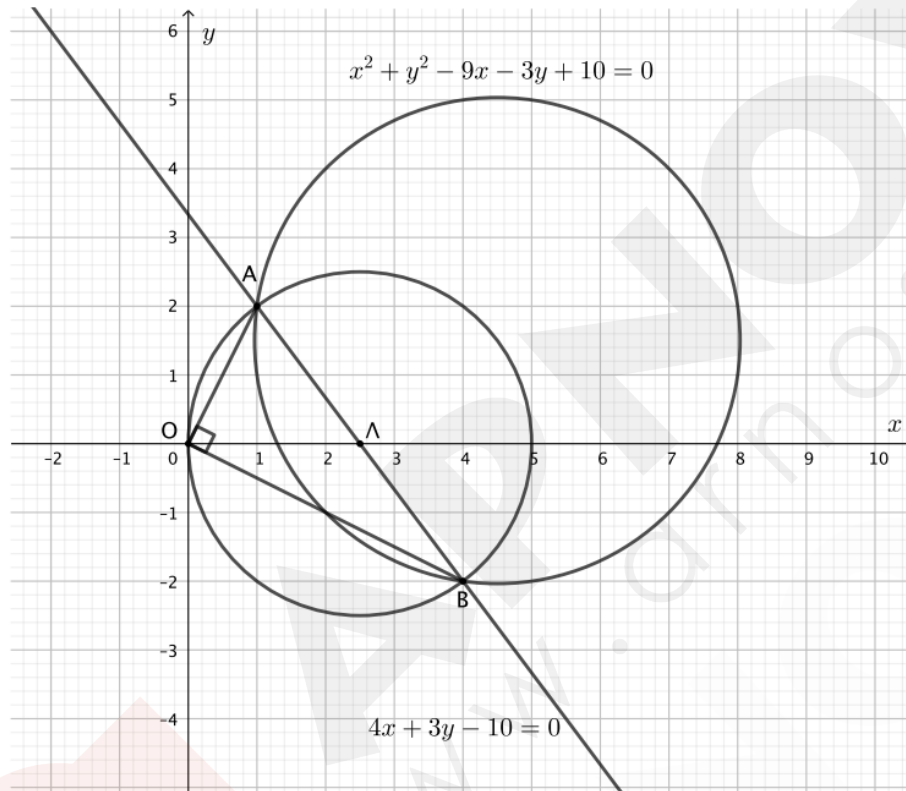
$$\vec{OB} = (x_B - x_O, y_B - y_O) = (4, -2)$$

Οπότε:

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) = 0$$

Έξυπνα & Εύκολα!

ii.



Αφού είναι $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, η γωνία \widehat{AOB} θα είναι ορθή. Επομένως, ο κύκλος με διάμετρο AB είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του ορθογωνίου τριγώνου OAB . Συνεπώς, διέρχεται από το σημείο O .

Έξυπνα & Εύκολα!

47. Θέμα 22214

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία $M(x,y)$, $A(-1,0)$, $B(1,0)$ για τα οποία ισχύει $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 9|\overline{AB}|$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος με εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 8. \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

β) Έστω Γ και Δ δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $\Gamma\Delta^2 = 32$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία.

(Μονάδες 08)

ii. Αν το σημείο M κινείται στον κύκλο, να υπολογίσετε το $\overrightarrow{M\Gamma} \cdot \overrightarrow{M\Delta}$

(Μονάδες 07)

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \overrightarrow{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A) = (x - (-1), y - 0) = (x + 1, y). \quad |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$$

$$\overrightarrow{BM} = (x_M - x_B, y_M - y_B) = (x - 1, y - 0) = (x - 1, y). \quad |\overrightarrow{BM}| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{2^2 + 0} = 2.$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 9|\overline{AB}|, \quad \text{άρα } |\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{BM}|^2 = 9 \cdot 2 \quad \text{ή} \quad \left(\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}\right)^2 = 18 \quad \text{ή}$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 = 18 \quad \text{ή} \quad 2x^2 + 2y^2 + 2 = 18 \quad \text{ή} \quad x^2 + y^2 = 8$$

Έξυπνα & Εύκολα!

β)

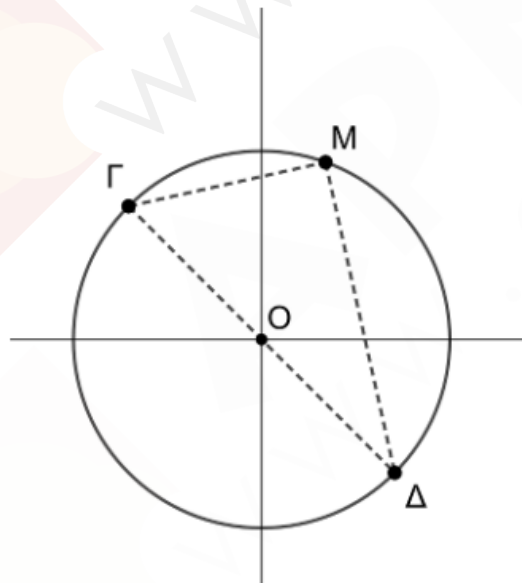
 i. Για τα σημεία Γ και Δ του κύκλου ισχύει $\Gamma\Delta^2 = 32$

$$\text{δηλαδή } \Gamma\Delta = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}.$$

Η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2 + y^2 = 8$, οπότε η ακτίνα του ρ είναι $\rho = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ και το κέντρο του το $O(0,0)$.

Παρατηρούμε ότι $\Gamma\Delta = 2\rho$, οπότε τα σημεία Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά και επομένως η διάμετρος ΓΔ θα διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου.

ii. Αφού η ΓΔ είναι διάμετρος και το σημείο M είναι σημείο του κύκλου, τότε η γωνία $\widehat{\Gamma M \Delta} = 90^\circ$ γιατί είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Επειδή τα διανύσματα $\vec{M\Gamma}$ και $\vec{M\Delta}$ είναι κάθετα, το εσωτερικό τους γινόμενο θα ισούται με μηδέν.



Έξυπνα & Εύκολα!

48. Θέμα 22223

Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\overline{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$, $\overline{AG} = (3\lambda, \lambda - 1)$ και το σημείο M είναι το μέσο της BΓ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overline{AM} = (2\lambda, \lambda)$ (Μονάδες 08)

β) Δίνεται επιπλέον ότι η γωνία $\widehat{BAG} = 90^\circ$.

i. Να υπολογίσετε το λ . (Μονάδες 08)

ii. Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ και $A(2, \frac{3}{2})$ να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 09)

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \alpha) \text{ Το διάνυσμα της διαμέσου } \overline{AM} &= \frac{\overline{AB} + \overline{AG}}{2} = \frac{(\lambda, \lambda + 1) + (3\lambda, \lambda - 1)}{2} = \\ &= \frac{(\lambda + 3\lambda, \lambda + 1 + \lambda - 1)}{2} = \frac{(4\lambda, 2\lambda)}{2} = (2\lambda, \lambda). \end{aligned}$$

β)

i. Αφού $\widehat{BAG} = 90^\circ$ θα είναι $\overline{AB} \perp \overline{AG}$ ή $\overline{AB} \cdot \overline{AG} = 0$ ή $(\lambda, \lambda + 1) \cdot (3\lambda, \lambda - 1) = 0$

$$\text{ή } 3\lambda^2 + (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \text{ ή } 3\lambda^2 + \lambda^2 - 1 = 0 \text{ ή } 4\lambda^2 = 1 \text{ ή } \lambda = \pm \frac{1}{2}.$$

ii. Ο ζητούμενος κύκλος διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου A,B,Γ. Επειδή όμως η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{BAG} = 90^\circ$ η απέναντί πλευρά BΓ θα είναι διάμετρος του κύκλου. Το κέντρο του θα βρίσκεται στο μέσο M(x,y) της διαμέτρου BΓ.

Έξυπνα & Εύκολα!

Από το (α) ερώτημα έχουμε ότι $\overline{AM} = (2\lambda, \lambda) = \left(2 \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ και $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

Όμως $\overline{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A)$ ή $\left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(x_M - 2, y_M - \frac{3}{2}\right)$ ή $\begin{cases} x_M - 2 = 1 \\ y_M - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

ή $\begin{cases} x_M = 3 \\ y_M = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \end{cases}$. Επομένως το κέντρο M είναι το (3,2).

Η ακτίνα θα είναι η απόσταση $(AM) = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} =$

$$\sqrt{(3-2)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα ρ δίνεται από την εξίσωση

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$. Για κέντρο το (3,2) και ακτίνα $\frac{\sqrt{5}}{2}$ έχουμε

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \text{ ή } (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{5}{4}.$$

49. Θέμα 22239

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy η εξίσωση $3x + 4y = 25$ περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το O(0,0) και ακτίνα 2.

α)

i. Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού;

(Μονάδες 04)

Έξυπνα & Εύκολα!

- ii. Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό. (Μονάδες 05)
- iii. Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή; (Μονάδες 08)
- β) Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x + y + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \neq 0$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού; (Μονάδες 08)

ΛΥΣΗ

α)

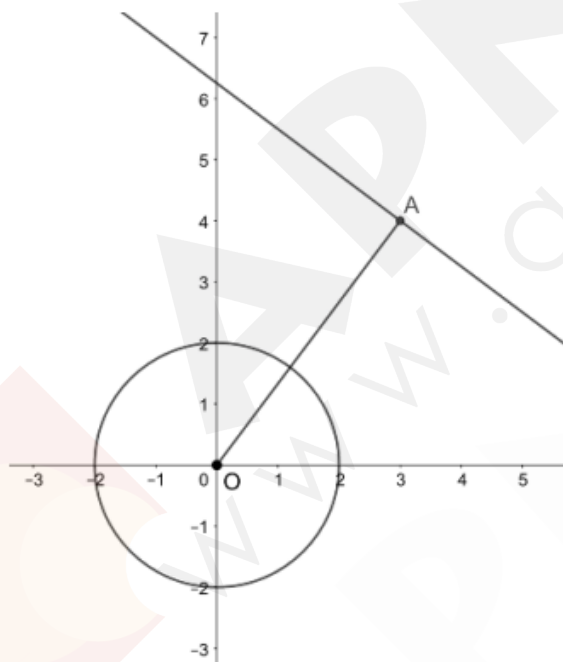
- i. Ο κύκλος έχει κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$. Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το $O(0,0)$ είναι της μορφής $x^2 + y^2 = \rho^2$. Επομένως η εξίσωση γίνεται $x^2 + y^2 = 4$.
- ii. Για να διέρχεται ο αγωγός από το κέντρο O θα πρέπει οι συντεταγμένες του να επαληθεύουν την εξίσωση $3x+4y = 25$, δηλαδή $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$, που δεν είναι ίσο με 25. Επομένως, ο αγωγός δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού.
- iii. Για να έχουμε την ελάχιστη δυνατή απόσταση θα πρέπει να φέρουμε την κάθετη OA από το κέντρο O προς την ευθεία του αγωγού. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας του αγωγού είναι $\lambda_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{4}$. Για να είναι η AO κάθετη στον αγωγό πρέπει $\lambda_1 \lambda_{AO} = -1$ ή $-\frac{3}{4} \lambda_{AO} = -1$ ή $\lambda_{AO} = \frac{4}{3}$. Η εξίσωση της AO θα είναι:
- $$y - y_0 = \lambda_{AO} (x - x_0) \quad \text{ή} \quad y - 0 = \frac{4}{3} (x - 0) \quad \text{ή} \quad y = \frac{4}{3} x.$$
- Το σημείο A είναι το σημείο τομής της AO και της ευθείας του αγωγού. Για να βρεθεί λύνουμε το σύστημά τους.

Έξυπνα & Εύκολα!

$$\begin{cases} 3x + 4y = 25 & (1) \\ y = \frac{4}{3}x & (2) \end{cases}$$

Η (1) γίνεται $3x + 4 \cdot \frac{4}{3}x = 25$ ή $9x + 16x = 75$ ή $25x = 75$, δηλαδή $x = 3$. Η (2) γίνεται

$y = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4$. Επομένως το σημείο A είναι το (3,4).



β) Για να εφάπτεται ο δρόμος του κυκλικού σιντριβανιού πρέπει η απόσταση του κέντρου O από την ευθεία του δρόμου να ισούται με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή $d(O,\epsilon) = \rho$.

$$d(O,\rho) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\lambda \cdot 0 + 0 + \lambda - 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \quad \text{ή} \quad \frac{|\lambda - 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \quad \text{ή} \quad |\lambda - 2| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1}$$

$$|\lambda - 2|^2 = (2\sqrt{\lambda^2 + 1})^2 \quad \text{ή} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 4(\lambda^2 + 1) \quad \text{ή} \quad 3\lambda^2 + 4\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda(3\lambda + 4) = 0.$$

Έχουμε $\lambda = 0$ που απορρίπτεται λόγω της υπόθεσης ($\lambda \neq 0$) ή $\lambda = -\frac{4}{3}$.

Έξυπνα & Εύκολα!

50. Θέμα 22264

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: x + y + 2 = 0$. (Μονάδες 9)

γ) Για $\lambda = 1$, στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1), να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του, που διέρχονται από το σημείο $M(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία:

$$A = \lambda, B = \lambda \text{ και } \Gamma = \lambda - 1, \text{ οπότε } A^2 + B^2 - 4\Gamma = \lambda^2 + \lambda^2 - 4(\lambda - 1) = 2\lambda^2 - 4\lambda + 4 =$$

$$2(\lambda^2 - 2\lambda + 2) > 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ εφόσον η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι } \Delta = -4 < 0.$$

Άρα η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Το κέντρο και η ακτίνα των κύκλων που ορίζονται από την (1), συναρτήσει του $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{είναι το } K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}) = (-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}) \text{ και η}$$

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} = \frac{1}{2} \sqrt{2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2} \text{ αντίστοιχα.}$$

Για να εφάπτεται ο κύκλος που ορίζεται από την (1), της ευθείας $\varepsilon: x + y + 2 = 0$, θα πρέπει $d(K, \varepsilon) = \rho$ (2).

Έξυπνα & Εύκολα!

Είναι: $d(K, \epsilon) = \frac{|\frac{-\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-\lambda + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|2 - \lambda|}{\sqrt{2}}$, οπότε από τη (2), ισοδύναμα παίρνουμε:

$$\frac{|2 - \lambda|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2} \Leftrightarrow |2 - \lambda| = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2} \text{ και υψώνουμε τα δύο μέλη}$$

της εξίσωσης στο τετράγωνο οπότε:

$$|2 - \lambda|^2 = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2}^2 \Leftrightarrow (2 - \lambda)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Leftrightarrow$$

$2\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1$ η λύση, που επαληθεύει την αρχική εξίσωση επομένως είναι δεκτή.

Για $\lambda = 1$, το κέντρο του εφαπτόμενου κύκλου στην ϵ είναι το $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) Για $\lambda = 1$, από την εξίσωση (1) παίρνουμε τον κύκλο $C: x^2 + y^2 + x + y = 0$, που λόγω

του ερωτήματος (β) έχει κέντρο το $K(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Από το σημείο $M(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ διέρχονται οι ευθείες $\zeta: y - y_M = \kappa(x - x_M)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$ ή

$\zeta: y + \frac{1}{2} = \kappa(x + \frac{3}{2})$ ή $\zeta: 2\kappa x - 2y + 3\kappa - 1 = 0$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

Η ευθεία ζ εφάπτεται του κύκλου $C \Leftrightarrow d(K, \zeta) = \rho \Leftrightarrow d(K, \zeta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (3).

Έξυπνα & Εύκολα!

$$\text{Όμως } d(K, \zeta) = \frac{|2\kappa(-\frac{1}{2}) - 2(-\frac{1}{2}) + 3\kappa - 1|}{\sqrt{(2\kappa)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-\kappa + 1 + 3\kappa - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|2\kappa|}{\sqrt{4\kappa^2 + 4}} = \frac{2|\kappa|}{2\sqrt{\kappa^2 + 1}} = \frac{|\kappa|}{\sqrt{\kappa^2 + 1}},$$

οπότε από τη (2), ισοδύναμα παίρνουμε:

$$\frac{|\kappa|}{\sqrt{\kappa^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και υψώνουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο οπότε:}$$

$$\frac{\kappa^2}{\kappa^2 + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\kappa^2 = \kappa^2 + 1 \Leftrightarrow \kappa^2 = 1 \Leftrightarrow \kappa = -1 \text{ ή } \kappa = 1 \text{ οι λύσεις, που επαληθεύουν}$$

την αρχική εξίσωση επομένως είναι δεκτές.

Για $\kappa = 1$ από την εξίσωση της ζ προκύπτει η $\zeta_1: 2x - 2y + 2 = 0$ ή $\zeta_1: x - y + 1 = 0$.

Για $\kappa = -1$ από την εξίσωση της ζ προκύπτει η $\zeta_2: -2x - 2y - 4 = 0$

ή $\zeta_2: x + y + 2 = 0$. Οι ζ_1, ζ_2 είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες του κύκλου C από το σημείο M . Παρατηρούμε ότι η ζ_2 είναι η ευθεία ϵ που δόθηκε στο ερώτημα (β), κάτι που ήταν αναμενόμενο εφόσον το σημείο M ανήκει στην ϵ (οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν).

51. Θέμα 22280

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο $O(0,0)$ θεωρούμε τους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με εξισώσεις

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \quad (1) \text{ και } x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \quad (2)$$

αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων.

(Μονάδες 12)

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.

(Μονάδες 08)

γ) Έστω M, N τυχαία σημεία των κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων M και N.

(Μονάδες 05)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A = -6$, $B = -8$, $\Gamma = 21$ και $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 36 + 64 - 84 = 16 > 0$.

Επομένως, το κέντρο K του κύκλου είναι

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (3, 4)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

Η εξίσωση (2) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A = 2$, $B = -2$, $\Gamma = 1$ και $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4 + 4 - 4 = 4 > 0$.

Επομένως, το κέντρο Λ του κύκλου είναι

$$\Lambda\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (-1, 1)$$

και η ακτίνα του ισούται με

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Η απόσταση των κέντρων των δύο κύκλων είναι

$$(ΚΛ) = \sqrt{(x_{\Lambda} - x_K)^2 + (y_{\Lambda} - y_K)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Επίσης, $R + \rho = 3$.

Αφού $(ΚΛ) > R + \rho$, συμπεραίνουμε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου.

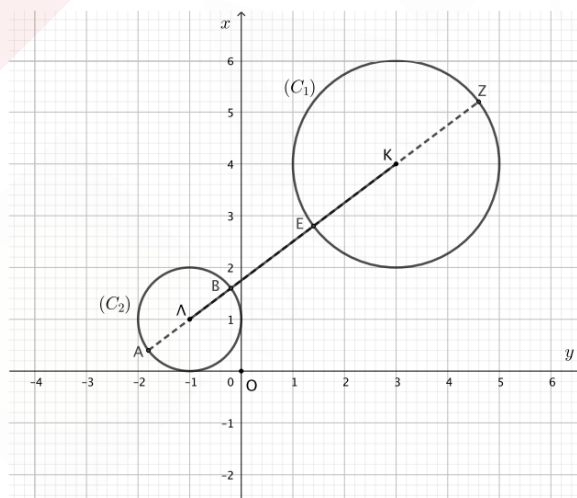
γ) Φέρουμε τη διακεντρική ευθεία ΚΛ, η οποία τέμνει τον κύκλο (Κ, R) στα σημεία Ε και Ζ και τον κύκλο (Λ, ρ) στα σημεία Α και Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η ελάχιστη απόσταση του τυχαίου σημείου Μ του κύκλου (Κ, R) από το τυχαίο σημείο Ν του κύκλου (Λ, ρ) ισούται με (ΒΕ), οπότε:

$$(ΒΕ) = (ΚΛ) - (ΕΚ) - (ΛΒ) = (ΚΛ) - R - \rho = 5 - 2 - 1 = 2$$

Η μέγιστη απόσταση του τυχαίου σημείου Μ του κύκλου (Κ, R) από το τυχαίο σημείο Ν του κύκλου (Λ, ρ) ισούται με (ΑΖ), οπότε:

$$(ΑΖ) = (ΚΛ) + (ΑΛ) + (ΚΖ) = (ΚΛ) + R + \rho = 5 + 2 + 1 = 8$$



Έξυπνα & Εύκολα!

52. Θέμα 22508

Οι κορυφές A , Γ ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι τα σημεία $(1,4)$ και $(3,0)$ αντιστοίχως.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$ γράφεται στη μορφή $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$ γράφεται στη μορφή $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών B, Δ του τετραγώνου. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το μέσο K του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$ έχει συντεταγμένες

$$x_K = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ και } y_K = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{4+0}{2} = 2.$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$ είναι ίσος με $\lambda_1 = \frac{4-0}{1-3} = -2$, κατά

συνέπεια η μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Άρα η εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος $A\Gamma$ είναι $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$.

Έξυπνα & Εύκολα!

β) Το κέντρο του κύκλου διαμέτρου AG είναι το σημείο $K(2, 2)$ και η ακτίνα είναι ίση με $\rho = (AK) = \sqrt{(1-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$.

Επομένως η εξίσωση του κύκλου διαμέτρου AG είναι $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$.

γ) Οι ζητούμενες κορυφές B, Δ του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ ισαπέχουν από τα σημεία A, Γ και βλέπουν το AG υπό ορθή γωνία, άρα είναι τα σημεία τομής της μεσοκαθέτου του τμήματος AG και του κύκλου διαμέτρου AG .

Λύνουμε το σύστημα :

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2) \quad (1)$$

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5 \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) με τη βοήθεια της (1) γράφεται

$$(x - 2)^2 + \frac{1}{4}(x - 2)^2 = 5 \Leftrightarrow 4(x - 2)^2 + (x - 2)^2 = 20 \Leftrightarrow 5(x - 2)^2 = 20 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 2 = 2 \text{ ή } x - 2 = -2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = 0.$$

Για $x = 4$ βρίσκουμε $y = 3$ και για $x = 0$ βρίσκουμε $y = 1$.

Επομένως οι ζητούμενες κορυφές είναι τα σημεία $(4, 3)$ και $(0, 1)$.

Έξυπνα & Εύκολα!