Προσδοκώμενοι Στόχοι Ενότητας:

→ Ο/Η μαθητής/τρια θα πρέπει στο πέρας της ενότητας να έχει θυμηθεί τις έννοιες του ρητού και του άρρητου αριθμού.

→ Ο/Η μαθητής/τρια θα πρέπει στο πέρας της ενότητας να έχει κατανοήσει σε βάθος:

- τις ιδιότητες των δύο βασικών πράξεων· της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού,
- τον νόμο διαγραφής όρων στις πράξεις της πρόσθεσης(αφαίρεσης) και του πολλαπλασιασμού(διαίρεσης),
- τις αξιοσημείωτες ταυτότητες,
- τις δύο βασικές μεθόδους απόδειξης των μαθηματικών· της Ευθείας Απόδειξης και της Απαγωγής σε Άτοπο.

Συμπλήρωση Κενών:

Σε αυτό το κομμάτι της ενότητας ο/η μαθητής/τρια θα βρει τις παρατηρήσεις, τα κόλπα και τις έξυπνες μεθόδους που χρειάζεται για να καταλάβει πλήρως όλα όσα έμαθε και να καλύψει τυχόντα κενά.

Ρητοί και Άρρητοι Αριθμοί:

Υπενθύμιση:

Κάθε **ρητός αριθμός** μπορεί να γραφεί με τη μορφή κλάσματος, δηλαδή ως $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, δηλαδή είναι ακέραιοι αριθμοί και φυσικά $\beta \neq 0$.

Έξυπνες Παρατηρήσεις:

- Οι φυσικοί και οι ακέραιοι αριθμοί είναι προφανώς ρητοί, αφού γράφονται ως κλάσματα με παρονομαστή τη μονάδα.
  <u>Π.χ.</u>: $3 = \frac{3}{1} \in \mathbb{Q}$, $-7 = \frac{-7}{1} \in \mathbb{Q}$

- Ο αριθμός $\frac{\sqrt{3}}{4} \notin \mathbb{Q}$, διότι ο $\sqrt{3}$ δεν είναι ακέραιος αριθμός. Συνεπώς, προσέχουμε, διότι δεν αρκεί μόνο η κλασματική μορφή για να είναι ρητός ένας αριθμός. Πρέπει και ο αριθμητής και ο παρονομαστής να είναι ακέραιοι αριθμοί.

Άρρητος ονομάζεται κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός.

Σημείωση :

Τόσο οι ρητοί όσο και οι άρρητοι αριθμοί είναι άπειροι στο πλήθος.

Μάθε και αυτό:

Οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να διαταχθούν στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Καθώς οι άρρητοι αριθμοί έχουν πάντα δεκαδικό μέρος με άπειρα το πλήθος ψηφία, είναι αδύνατον να μπορέσουμε να τους συγκρίνουμε μεταξύ τους και επομένως να τους διατάξουμε, αφού ποτέ δεν περατώνονται. Άρα, δεν ξέρουμε ποιος είναι μεγαλύτερος και ποιος μικρότερος από ποιον ούτε και μπορούμε να τους προσδιορίσουμε πλήρως, μολονότι αποδεχόμαστε την ύπαρξή τους.

Ιδιότητες των Βασικών Πράξεων:

Έξυπνη Παρατήρηση:

Τα μαθηματικά βασίζονται κατά κόρον στην ύπαρξη των τεσσάρων πράξεων˙ της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Στην πραγματικότητα, οι βασικές πράξεις είναι μόνο δύο˙ **η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός**. Ουσιαστικά, η **αφαίρεση** δεν είναι παρά η **πρόσθεση του αντιθέτου** και η **διαίρεση** δεν είναι παρά ο **πολλαπλασιασμός του αντιστρόφου**.

- Το ουδέτερο στοιχείο σε κάθε μία από τις δύο πράξεις δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα, δηλαδή δε μεταβάλλει τον αριθμό στον οποίο προστίθεται ή με τον οποίο πολλαπλασιάζεται αντίστοιχα.

Παρατήρηση:

Η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα είναι εξαιρετικά λογικές ιδιότητες, αφού τόσο το άθροισμα όσο και το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι συγκεκριμένο. Δεν είναι εφικτό δύο αριθμοί να αθροίζουν ταυτόχρονα σε δύο διαφορετικά αθροίσματα και το αντίστοιχο ισχύει και για τον πολλαπλασιασμό. Συνεπώς, είναι λογικό η σειρά με την οποία προσθέτουμε οι πολλαπλασιάζουμε τους όρους να μην επηρεάζει το αποτέλεσμα.

Νόμος της Διαγραφής:

Στα δύο μέλη μιας ισότητας έχουμε τη δυνατότητα πάντα με μεθόδους που χρήζουν μαθηματικής υπόστασης να διαγράφουμε όρους που βρίσκονται και στα δύο μέλη. Όσον αφορά την πράξη της πρόσθεσης, από την ισότητα $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ μπορούμε να μεταβούμε απευθείας στην ισότητα $\alpha = \beta$, αφού ο όρος γ είναι ο ίδιος και στα δύο μέλη και άρα θα αυξομειώσει το αποτέλεσμα στον ίδιο ακριβώς βαθμό και στα δύο μέλη. Ο νόμος της διαγραφής ισχύει και για την πράξη του πολλαπλασιασμού, όμως εδώ απαιτείται μια επιπλέον προσοχή.

Προσοχή!

Στην πράξη του πολλαπλασιασμού πρέπει να «διαγράφουμε» προσεκτικά τους όρους των δύο μελών. Για παράδειγμα, από την ισότητα $\alpha\gamma = \beta\gamma$ μπορούμε να μεταβούμε στην ισότητα $\alpha = \beta$, με την προϋπόθεση ότι ο όρος $\gamma \neq 0$. Ειδάλλως, η ισότητα δεν ισχύει, καθώς $3 * 0 = 0 = 0 * 8$, όμως $3 \neq 8$.

***Σημείωση*:**

Για να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα και να το κάνουμε λιγότερο σύνθετο, αρχικά ελέγχουμε, αν μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή και ύστερα χρησιμοποιούμε το νόμο διαγραφής, για να διαγράψουμε τους ίδιους όρους.

παραδείγματα:

1) Να απλοποιήσετε τα κάτωθεν κλάσματα.

α) $\frac{\alpha^3-2\alpha^2+\alpha}{\alpha^2-\alpha}=\frac{\alpha(\alpha^2-2\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{\alpha(\alpha^2-2\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha-1}=\alpha-1$

β) $\frac{(x+5)(x-8)}{x^2-25}=\frac{(x+5)(x-8)}{(x-5)(x+5)}=\frac{x-8}{x-5}$

γ) $\frac{(\alpha+3)^3-(\alpha-3)^3}{18}=\frac{(\alpha+3-\alpha+3)[(\alpha+3)^2+(\alpha+3)(\alpha-3)+(\alpha-3)^2]}{18}=$

$$\frac{6(\alpha^2+6\alpha+9+\alpha^2-9+\alpha^2-6\alpha+9)}{18}=\frac{3\alpha^2+9}{3}=\alpha^2+3$$

δ) $\frac{\alpha^2-5\alpha+6}{\alpha^2-4}=\frac{\alpha^2-2\alpha-3\alpha+6}{(\alpha-2)(\alpha+2)}=\frac{\alpha(\alpha-2)-3(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\alpha+2)}=\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{(\alpha-2)(\alpha+2)}=\frac{\alpha-3}{\alpha+2}$

Άσκηση:

Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα, αφού πρώτα βρείτε τις τιμές για τις οποίες ορίζονται.

α) $\frac{x^2-x+5x-5}{x^2-1}$

β) $\frac{(x-4)(x+6)-(4-x)(x-2)}{x^2-16}$

γ) $\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)^3}$

Λύση:

α) $\frac{x^2-x+5x-5}{x^2-1}\Rightarrow$ Ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, εκτός αυτών που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

$x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 1 \;\&\; x\neq -1$

Άρα, το κλάσμα ορίζεται για $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

$\frac{x^2-x+5x-5}{x^2-1}=\frac{x(x-1)+5(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+5}{x+1}$

β) $\frac{(x-4)(x+6)-(4-x)(x-2)}{x^2-16} \Rightarrow$ Ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, εκτός αυτών που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

$x^2-16 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 16 \Leftrightarrow x \neq 4$ & $x \neq -4$

Άρα, το κλάσμα ορίζεται για $x \in \mathbb{R}\backslash\{-4,4\}$.

$$\frac{(x-4)(x+6)-(4-x)(x-2)}{x^2-16} = \frac{(x-4)(x+6)-[-(x-4)](x-2)}{(x-4)(x+4)} =$$

$$\frac{(x-4)(x+6)+(x-4)(x-2)}{(x-4)(x+4)} = \frac{(x-4)[(x+6)+(x-2)]}{(x-4)(x+4)} = \frac{x+6+x-2}{x+4} = \frac{2x+4}{x+4}$$

γ) $\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)^3} \Rightarrow$ Ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, εκτός αυτών που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

$(x-2)^3 \neq 0 \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

Άρα, το κλάσμα ορίζεται για $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

$$\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)^3} = \frac{x^2+2x+4}{(x-2)^2} = \frac{x^2+2x+4}{x^2-4x+4}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Για να ορίσουμε ένα κλάσμα, πρώτα ελέγχουμε τον παρονομαστή και βρίσκουμε τις ρίζες του, ώστε να της απορρίψουμε και μετά απλοποιούμε. Αν διαγράψουμε όρους και προσπαθήσουμε να ορίσουμε το κλάσμα μέσω της απλοποιημένης μορφής, τότε θα χάσουμε ρίζες.

Αξιοσημείωτες Ταυτότητες:

- $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- $\boldsymbol{\alpha}^2 - \boldsymbol{\beta}^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
- $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
- $(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- $\boldsymbol{\alpha}^3 + \boldsymbol{\beta}^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
- $\boldsymbol{\alpha}^3 - \boldsymbol{\beta}^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
- $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$

Παραδείγματα:

Εκτελέστε τις παρακάτω πράξεις:

1) $(\beta-3)^3 = \beta^3 - 3\beta^2 3 + 3\beta 3^2 - 3^3 = \beta^3 - 9\beta^2 + 27\beta - 27$

2) $\alpha^3 - 8 = \alpha^3 - 2^3 = (\alpha-2)(\alpha^2 + 2\alpha + 4)$

3) $(\alpha-4)^2 = \alpha^2 - 2\alpha 4 + 4^2 = \alpha^2 - 8\alpha + 16$

4) $\frac{(\lambda+1)(\lambda-1)-8}{(\lambda+3)(\lambda-9)} = \frac{\lambda^2-1-8}{(\lambda+3)(\lambda-9)} = \frac{\lambda^2-9}{(\lambda+3)(\lambda-9)} = \frac{(\lambda-3)(\lambda+3)}{(\lambda+3)(\lambda-9)} = \frac{\lambda-3}{\lambda-9}$

5) $\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha+1}\right) * \frac{\alpha^4-2\alpha^2+1}{\alpha^4-1} = \frac{\alpha(\alpha+1)-(\alpha-1)}{\alpha^2-1} * \frac{(\alpha^2-1)^2}{(\alpha^2+1)(\alpha^2-1)} = \frac{\alpha^2+\alpha-\alpha+1}{\alpha^2-1} * \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1} = 1$

Βασικές Μέθοδοι Απόδειξης:

➢ Μέθοδος της Ευθείας Απόδειξης:

Στις περισσότερες ασκήσεις που θα κληθούμε να λύσουμε θα χρειαστεί να αποδείξουμε την αλήθεια που κρύβει μια μαθηματική σχέση. Ο πιο συνήθης τρόπος για να αποδείξουμε αυτήν την αλήθεια είναι η μέθοδος της ευθείας απόδειξης, η οποία έχει δύο τρόπους χρήσης.

<u>1ος τρόπος</u>:
Χρησιμοποιούμε το πρώτο μέλος της δοθείσας σχέσης, η οποία κατά πάσα πιθανότητα θα είναι εξίσωση και μέσα από λογικά μαθηματικά βήματα καταλήγουμε στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης.

<u>2ος τρόπος</u>:
Παίρνουμε ολόκληρη την εξίσωση και μέσω σχέσεων συνεπαγωγής ή ισοδυναμίας προσπαθούμε να καταλήξουμε σε κάτι το οποίο ισχύει πάντα.

<u>παράδειγμα</u>:
Να αποδείξετε ότι ισχύει $(\alpha-2)^2-(\alpha+2)^2=-8\alpha$.

<u>1ος τρόπος</u>:
$(\alpha-2)^2-(\alpha+2)^2=\alpha^2-4\alpha+4-(\alpha^2+4\alpha+4)=$
$\alpha^2-4\alpha+4-\alpha^2-4\alpha-4=-8\alpha$, δηλαδή η αρχική σχέση είναι αληθής.

<u>2ος τρόπος</u>:
$(\alpha-2)^2-(\alpha+2)^2=-8\alpha \Leftrightarrow$
$[\alpha-2-(\alpha+2)][\alpha-2+\alpha+2]=-8\alpha \Leftrightarrow$
$(\alpha-2-\alpha-2)(2\alpha-0)=-8\alpha \Leftrightarrow$
$-8\alpha=-8\alpha$, που ισχύει πάντα $\forall\alpha$.

Άσκηση:
Να αποδείξετε τις παρακάτω μαθηματικές εξισώσεις.

α) $(\omega+2)^3-6(\omega+1)^2=\omega^3+2$

β) $\mu^3-27+(\mu+3)(\mu^2-3\mu+9)=2\mu^3$

Λύση:
α) $(\omega+2)^3-6(\omega+1)^2=\omega^3+2 \Leftrightarrow$

$\omega^3 + 3\omega^2 2 + 3\omega 2^2 + 2^3 - 6(\omega^2 + 2\omega + 1) = \omega^3 + 2 \Leftrightarrow$
$\omega^3 + 6\omega^2 + 12\omega + 8 - 6\omega^2 - 12\omega - 6 = \omega^3 + 2 \Leftrightarrow$
$\omega^3 + 2 = \omega^3 + 2$, το οποίο ισχύει για κάθε πραγματική τιμή του ω.

β) $\mu^3 - 27 + (\mu + 3)(\mu^2 - 3\mu + 9) = 2\mu^3 \Leftrightarrow$
$\mu^3 - 27 + \mu^3 + 27 = 2\mu^3 \Leftrightarrow$
$2\mu^3 = 2\mu^3$, το οποίο ισχύει για κάθε πραγματική τιμή του μ.

Έχουμε το άθροισμα κύβων έτοιμο και το συμπτύσσουμε!

Άσκηση:
Αν ισχύει ότι $(\alpha + 1)^2 - (\beta - 1)^2 - (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 6$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 3$.

Λύση:
$(\alpha + 1)^2 - (\beta - 1)^2 - (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 6 \Leftrightarrow$
$\alpha^2 + 2\alpha + 1 - (\beta^2 - 2\beta + 1) - (\alpha^2 - \beta^2) = 6 \Leftrightarrow$
$\alpha^2 + 2\alpha + 1 - \beta^2 + 2\beta - 1 - \alpha^2 + \beta^2 = 6 \Leftrightarrow$
$2\alpha + 2\beta = 6 \Leftrightarrow$
$\alpha + \beta = 3$

Σημείωση :

Εφόσον η αρχική σχέση ισχύει από την υπόθεση, ξεκινάμε την επίλυση της άσκησης, έχοντας ως βάση αυτήν την ισότητα.

- **Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο:**

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η επίλυση μιας αποδεικτικής άσκησης δεν είναι εφικτή με την άνωθεν μέθοδο. Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι πιο εύχρηστο να υποθέσουμε ότι ισχύει η ακριβώς αντίθετη κατάσταση από αυτήν που επιθυμούμε να αποδείξουμε και μέσω λογικών βημάτων να καταλήξουμε σε άτοπο, οπότε άμεσα να ισχύει η αρχική μας υπόθεση.

παραδείγματα:
1) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι πάντα άρτιος αριθμός.

Σε μια τέτοια περίπτωση η χρήση της ευθείας απόδειξης δε μας πάει μακριά ως σκεπτικό. Για αυτό, ακολουθούμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

Έστω ότι ισχύει πάντα ότι το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι περιττός αριθμός. Υποθέτουμε δύο περιττούς αριθμούς α και β, όπου ισχύει $\alpha = 2\kappa + 1 \; \kappa\alpha\iota \; \beta = 2\lambda + 1$, με κ και λ ακεραίους. Αφού το άθροισμά τους είναι περιττός αριθμός ισχύει:
$\alpha + \beta = 2\kappa + 1 + 2\lambda + 1 = 2\kappa + 2\lambda + 2 = 2(\kappa + \lambda + 2) \Leftrightarrow$
Ο αριθμός $2(\kappa + \lambda + 2)$ είναι άρτιος, αφού διαιρείται με το 2. Επομένως, οδηγούμαστε σε άτοπο συμπέρασμα και άρα η αρχική μας υπόθεση είναι μη αληθής, οπότε το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι πάντα άρτιος.

2) Να αποδείξετε ότι αν ο α είναι ρητός και ο β είναι άρρητος, τότε και ο α + β είναι άρρητος αριθμός.

Έστω ότι ο α + β αριθμός είναι ρητός. Αφού ο αριθμός α είναι ρητός, θα γράφεται με τη μορφή κλάσματος ως $\alpha = \frac{\kappa}{\lambda} \; \mu\varepsilon \; \lambda \neq 0$ και αντίστοιχα για τον α + β θα ισχύει $\alpha + \beta = \frac{\mu}{\nu}, \mu\varepsilon \; \nu \neq 0$, όπου οι αριθμοί κ, λ, μ και ν είναι ακέραιοι αριθμοί.

$$\alpha + \beta = \frac{\kappa}{\lambda} + \beta = \frac{\kappa + \lambda\beta}{\lambda} \xRightarrow{\alpha+\beta=\frac{\mu}{\nu}} \frac{\kappa + \lambda\beta}{\lambda} = \frac{\mu}{\nu} \Leftrightarrow \nu(\kappa + \lambda\beta) = \lambda\mu \Leftrightarrow$$

$$\nu\kappa + \nu\lambda\beta = \lambda\mu \Leftrightarrow \nu\lambda\beta = \lambda\mu - \nu\kappa \Leftrightarrow \beta = \frac{\lambda\mu - \nu\kappa}{\nu\lambda}$$

Οι αριθμοί κ, λ, μ και ν είναι ακέραιοι, επομένως το κλάσμα $\frac{\lambda\mu-\nu\kappa}{\nu\lambda}$ είναι ρητός αριθμός, δηλαδή ο β είναι ρητός αριθμός, το οποίο είναι άτοπο, διότι εξαρχής ξέρουμε ότι ο β είναι άρρητος και άρα, δεν μπορεί να γραφεί με τη μορφή κλάσματος. Συνεπώς, η αρχική υπόθεση είναι μη αληθής και άρα το άθροισμα ενός ρητού και ενός αρρήτου είναι πάντα άρρητος.