Προσδοκώμενοι Στόχοι Ενότητας:

→ Ο/Η μαθητής/τρια θα πρέπει στο πέρας της ενότητας να έχει κατανοήσει σε βάθος:

- την έννοια της ευθείας,
- την έννοια της κλίσης της ευθείας,
- τη γραφική παράσταση μια ευθείας,
- τις σχετικές θέσεις δύο ευθειών,
- την εύρεση του τύπου μιας ευθείας.

Συμπλήρωση Κενών:

Σε αυτό το κομμάτι της ενότητας ο/η μαθητής/τρια θα βρει τις παρατηρήσεις, τα κόλπα και τις έξυπνες μεθόδους που χρειάζεται για να καταλάβει πλήρως όλα όσα έμαθε και να καλύψει τυχόντα κενά.

Η Ευθεία:

Ορισμός:

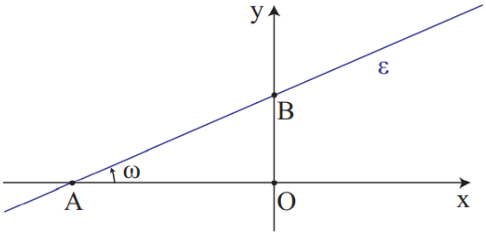
«Ευθεία» καλείται η απόλυτα ίσια γραμμή που συνίσταται από άπειρα το πλήθος διαδοχικά σημεία. Η ευθεία περιγράφεται από μια αλγεβρική σχέση που εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται αυτά τα άπειρα σημεία. Η αλγεβρική αυτή σχέση είναι στην πραγματικότητα μια **πρωτοβάθμια εξίσωση**. Μια ευθεία δεν έχει ούτε αρχή ούτε πέρας.

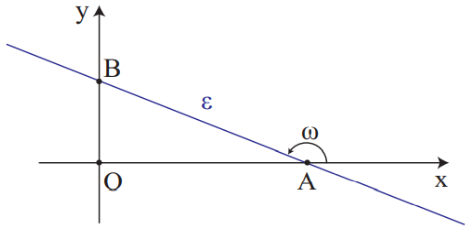
Μορφές Ευθείας:

- Σταθερή συνάρτηση
- Ευθεία της μορφής $f(x) = ax$
- Ευθεία της μορφής $f(x) = ax + \beta$

Γωνία Ευθείας (ε) με τον άξονα $x'x$:

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Α.





Ορισμός:

Η γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax, όταν στραφεί κατά τη **θετική φορά** γύρω από το σημείο Α, μέχρι να ταυτιστεί με την ευθεία ε, ονομάζεται **γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$**.

- Θετική φορά καλούμε τη αριστερόστροφη φορά, δηλαδή την αντίθετη φορά από αυτή των δεικτών του ρολογιού.

- Μια ευθεία σχηματίζει πάντα μια γωνία με τον άξονα των τετμημένων. Όποτε αναζητούμε γωνία ευθείας πρόκειται πάντα για τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία με το συγκεκριμένο άξονα.

- Η γωνία ω μπορεί να είναι το πολύ ευθεία, δηλαδή ισχύει $\mathbf{0^o \leq \omega < 180^o}$.

- Η γωνία ω μπορεί επομένως να είναι είτε **οξεία** είτε **αμβλεία** γωνία.

- Αν η ευθεία είναι **παράλληλη** προς τον άξονα $x'x$ ή ταυτίζεται με αυτόν, τότε η μεταξύ τους γωνία είναι ίση με 0^o. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, η σχηματιζόμενη γωνία κυμαίνεται στο παραπάνω διάστημα.

Συντελεστής Διεύθυνσης ή Κλίση Ευθείας:

Ορισμός:

«Συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση ευθείας» ονομάζεται η **εφαπτομένη** της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

- Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας συνήθως συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα λ είτε ως λ είτε ως λ_ε (ο δείκτης προσδιορίζει σε ποια ευθεία αφορά ο συντελεστής).

- Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε η κλίση είναι θετική. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε η κλίση είναι αρνητική. Τέλος, αν η γωνία ω είναι μηδέν, η κλίση είναι κι αυτή μηδέν.

- Στην περίπτωση που πρόκειται για ευθεία η οποία είναι κάθετη στον άξονα των x ή παράλληλη προς τον άξονα των y, επειδή η σχηματιζόμενη με τον άξονα των x γωνία είναι ορθή, δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για αυτήν την ευθεία. Μια τέτοια ευθεία έχει τη μορφή $\boldsymbol{x = a}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$.

- Μια ευθεία είναι **συνάρτηση**. Αυτό σημαίνει ότι ένα x οδηγεί σε ένα και μόνο y. Σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση, αν ορίσουμε ως ευθεία τη $x = a$, καταλαβαίνουμε ότι το x έχει πάντα την ίδια τιμή για όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω σε αυτήν, αλλά δεν έχουμε καμία πληροφορία για το y. Άρα, η συγκεκριμένη μορφή δεν ικανοποιεί ποτέ τον ορισμό της συνάρτησης.
  Για το λόγο αυτό, όταν αναφερόμαστε σε ευθεία δεν πρόκειται ποτέ για τη $x = a$, παρότι από γεωμετρικής οπτικής είναι και αυτή ευθεία.

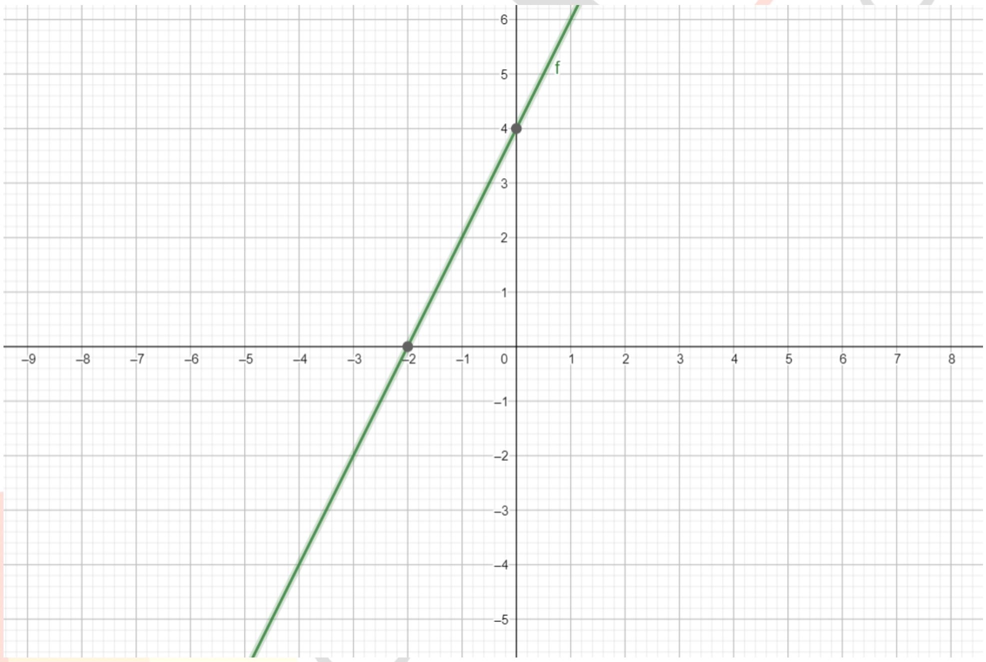
Η Γραφική Παράσταση της Συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$:

Μια ευθεία τέμνει πάντα και τους δύο άξονες σε ένα μοναδικό σημείο τον καθένα. Για να το βρούμε, μηδενίζουμε κάθε φορά την αντίστοιχη συντεταγμένη πάνω στον τύπο της ευθείας.

Παράδειγμα:

Έστω η ευθεία $y = 2x + 4$. Θέλουμε να βρούμε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες. Καθώς ψάχνουμε σημεία πάνω στους άξονες, ξέρουμε εκ των προτέρων ότι το σημείο πάνω στον άξονα $x'x$ θα έχει τεταγμένη μηδέν και αντίστοιχα, το σημείο πάνω στον άξονα $y'y$ θα έχει τετμημένη μηδέν. Επομένως:

- για το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$, μηδενίζουμε το y:
  $2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, 0)$
- για το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$, μηδενίζουμε το x:
  $2 * 0 + 4 = y \Rightarrow y = 4 \ \Rightarrow B(0, 4)$



Στο σχήμα φαίνονται ακριβώς τα σημεία τομής με τους άξονες. Για οποιαδήποτε ευθεία που θέλουμε να βρούμε τα σημεία τομής της με τους άξονες, ακολουθούμε πάντα την ίδια ακριβώς διαδικασία.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι ο συντελεστής της ανεξάρτητης μεταβλητής στον τύπο της ευθείας, δηλαδή, ο συντελεστής πολλαπλασιασμού του x στην εξίσωση της ευθείας. Πρόκειται λοιπόν για το **α.** Όσο μεγαλύτερη τιμή λαμβάνει το α, τόσο περισσότερο πλησιάζει η ευθεία τον άξονα των y.

- Στην περίπτωση που $\boldsymbol{\alpha = 0}$, τότε πρόκειται για τη **«σταθερή συνάρτηση»**, δηλαδή ευθεία της μορφής $\boldsymbol{y = \beta}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$. Είναι σταθερή, γιατί ο συντελεστής του x μηδενίζει επιτόπου κάθε τιμή, οπότε το y στην ουσία εξαρτάται μόνο από την τιμή του συντελεστή β, με τον οποίο και είναι ίση.

- **Όταν ένα σημείο ανήκει πάνω σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν πάντα τον τύπο της ευθείας.**

- Ο συντελεστής διεύθυνσης είναι μοναδικός για κάθε ευθεία.

- Μια ευθεία έχει συγκεκριμένο τύπο. Αυτό σημαίνει ότι οι τιμές των α και β δεν αλλάζουν, αλλά είναι ίδιες για όλα τα σημεία της ευθείας.

Εύρεση του Συντελεστή Διεύθυνσης:

Έστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ που ανήκουν στην ίδια ευθεία. Αφού ανήκουν στην ευθεία, οι συντεταγμένες τους θα επαληθεύουν τον τύπο της. Έστω ευθεία $y = ax + \beta$.

- $y = ax + \beta \xRightarrow{A(x_1,y_1)} y_1 = \alpha x_1 + \beta \qquad (1)$
- $y = ax + \beta \xRightarrow{B(x_2,y_2)} y_2 = \alpha x_2 + \beta \qquad (2)$

$\xRightarrow{(2)-(1)} y_2 - y_1 = \alpha x_2 + \beta - (\alpha x_1 + \beta) = \alpha(x_2 - x_1) \overset{x_1 \neq x_2}{\Longleftrightarrow}$

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}}$$

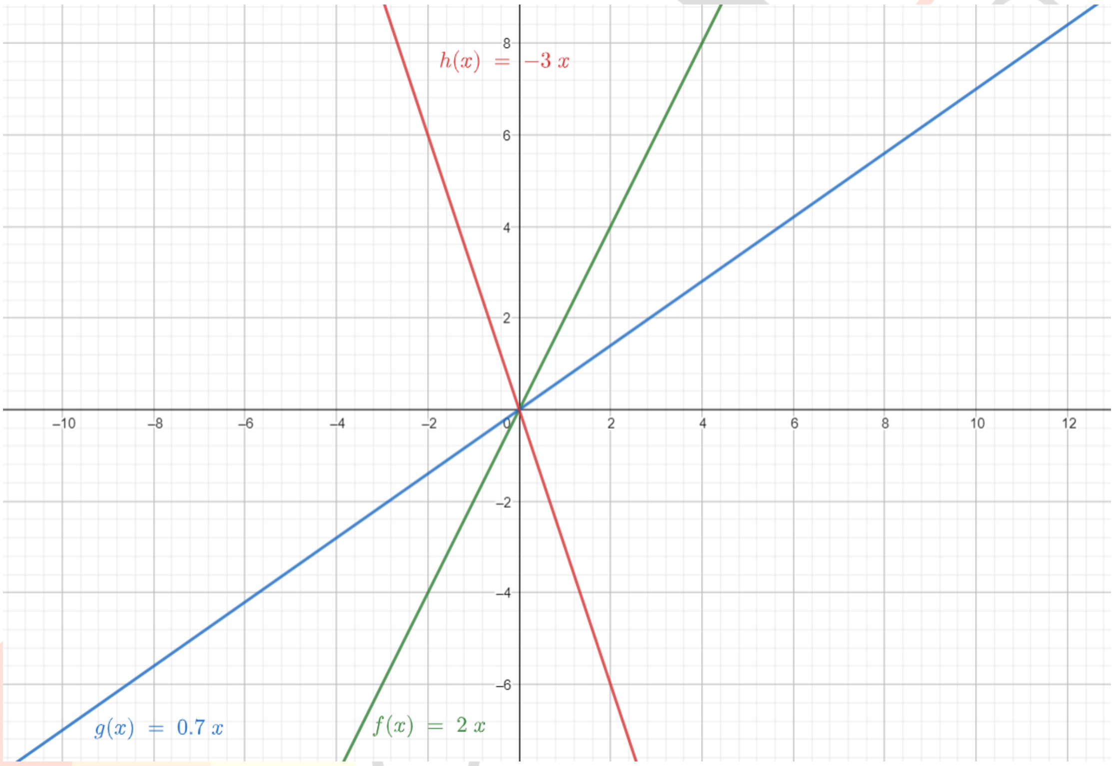
Δύο διαφορετικά σημεία της ίδιας ευθείας έχουν πάντα διαφορετικές συντεταγμένες, οπότε ο παρονομαστής του παραπάνω κλάσματος δε μηδενίζει. Το αποτέλεσμα θα είναι πάντα το ίδιο για οποιαδήποτε επιλογή σημείων της ίδιας ευθείας φυσικά.

Έξυπνη Παρατήρηση:

Όπως για να ορίσουμε μια ευθεία χρειαζόμαστε ακριβώς δύο σημεία, το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση εύρεσης της κλίσης της.

Η Συνάρτηση $f(x) = ax$:

Όπως γίνεται αντιληπτό εξαρχής πρόκειται για ευθεία της οποίας ο συντελεστής **β είναι ίσος με μηδέν**. Το βασικό χαρακτηριστικό που έχουν οι ευθείες αυτής της μορφής είναι ότι **διέρχονται πάντα από την αρχή των αξόνων**.



Όπως παρατηρούμε και στο σχήμα, ανεξαρτήτως της τιμής που έχει η κλίση της κάθε συνάρτησης, όλες διέρχονται από την αρχή τον αξόνων. Αυτό διαπιστώνεται εύκολα, μηδενίζοντας τη μία από τις δύο μεταβλητές. Καταλαβαίνουμε ότι η αρχή των αξόνων ως σημείο επαληθεύει την εξίσωση, άρα αναγκαστικά οι ευθείες διέρχονται πάντα από εκεί. Αυτή η συνθήκη **δεν** ισχύει για μια ευθεία της μορφής $y = ax + \beta$.

Ειδικές Περιπτώσεις:

- Όταν $\alpha = 1$, τότε έχουμε την ευθεία $y = x$, δηλαδή τη διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου. Σχηματίζει με τον άξονα των $x'x$ γωνία 45^o, για αυτό προκύπτει κλίση ίση με 1.

- Όταν $\alpha = -1$, τότε έχουμε την ευθεία $y = -x$, δηλαδή τη διχοτόμο του 2ου και 4ου τεταρτημορίου. Σχηματίζει με τον άξονα των $x'x$ γωνία 135^o, για αυτό προκύπτει κλίση ίση με – 1.

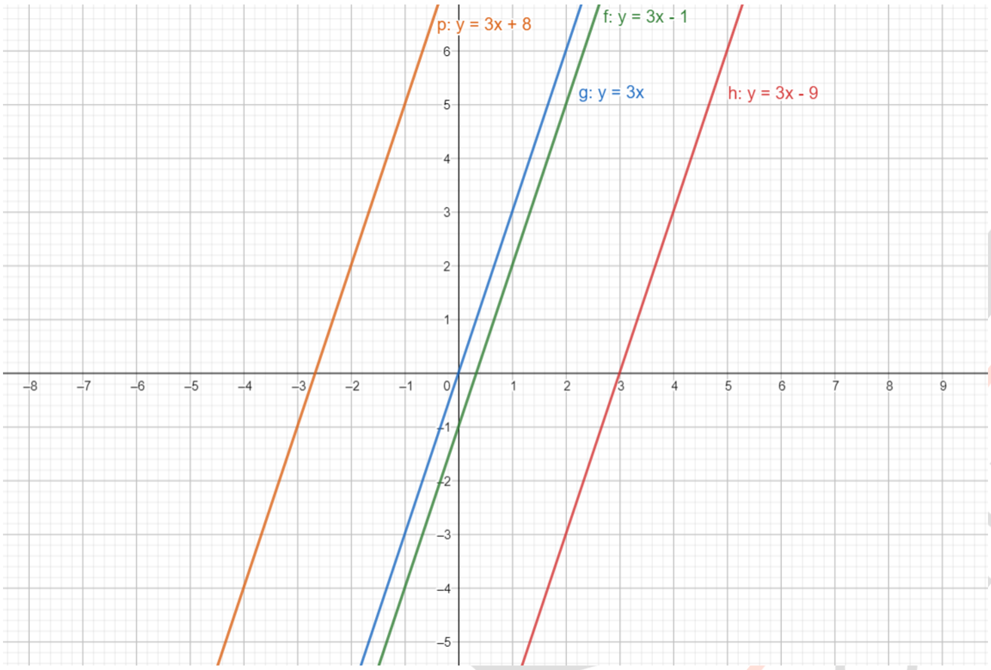
Σχετικές Θέσεις Δύο Ευθειών:

Καθώς κάνουμε λόγο για ευθείες, για το επίπεδο, για συντεταγμένες και για όλα όσα έχουμε μάθει στο έκτο κεφάλαιο μέχρι στιγμής, αυτό που πρέπει να μελετήσουμε είναι η απάντηση σε μερικά ερωτήματα, όπως:

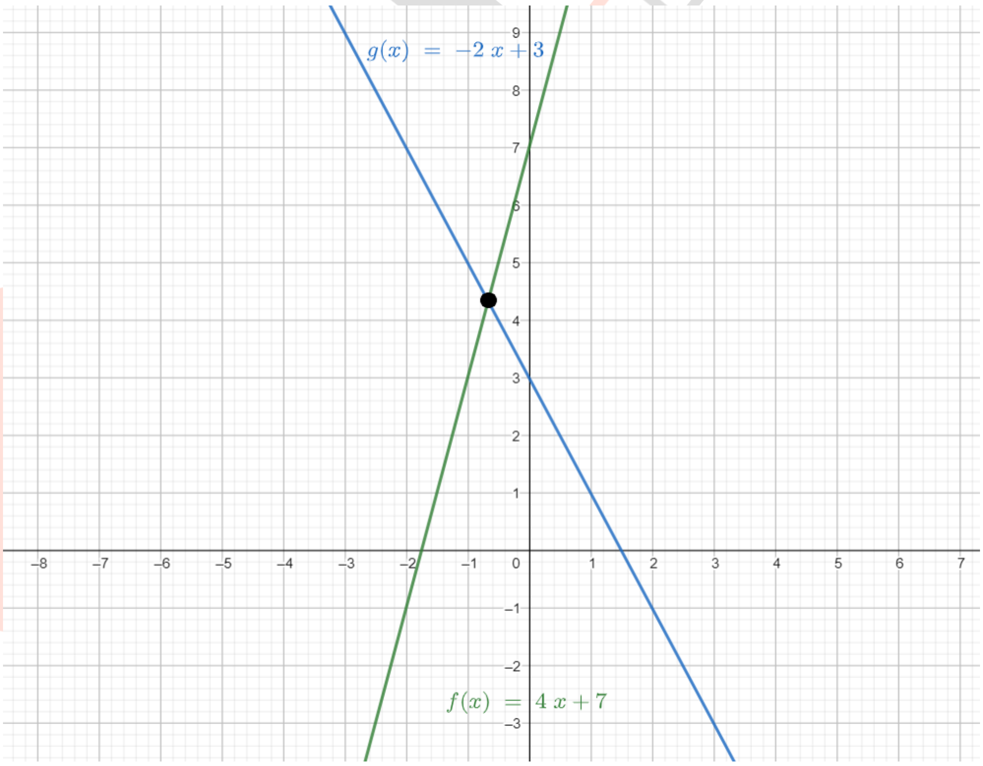
- γιατί μας ενδιαφέρει η κλίση μιας ευθείας;
- γιατί μας ενδιαφέρουν οι συντελεστές μιας ευθείας;
- τι συμβαίνει, όταν δύο ευθείες έχουν την ίδια ακριβώς κλίση;
- ποιες θέσεις μπορούν να έχουν δύο ευθείες στο χώρο;

Θεωρούμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $y = a_1x + \beta_1$ και $y = a_2x + \beta_2$ αντίστοιχα. Επίσης, υποθέτουμε ότι η ε_1 σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω_1 και η ε_2 γωνία ω_2 αντίστοιχα. Διακρίνουμε δύο βασικές περιπτώσεις.

- Αν ισχύει $\varepsilon\varphi\omega_1 = \varepsilon\varphi\omega_2$, δηλαδή, αν ισχύει $\boldsymbol{a_1 = a_2}$, τότε οι ευθείες έχουν την **ίδια κλίση**.
  → Αν ισχύει ταυτόχρονα $\boldsymbol{\beta_1 = \beta_2}$, τότε οι δύο ευθείες **ταυτίζονται.**
  → Αν ισχύει $\boldsymbol{\beta_1 \neq \beta_2}$, τότε οι δύο ευθείες είναι μεταξύ τους **παράλληλες**.



➢ Αν ισχύει $\varepsilon\varphi\omega_1 \neq \varepsilon\varphi\omega_2$, δηλαδή, αν ισχύει $\boldsymbol{a_1} \neq \boldsymbol{a_2}$, τότε οι ευθείες **τέμνονται** μεταξύ τους σε ένα και μόνο σημείο. Ο συντελεστής β σε αυτήν την περίπτωση δεν επηρεάζει.

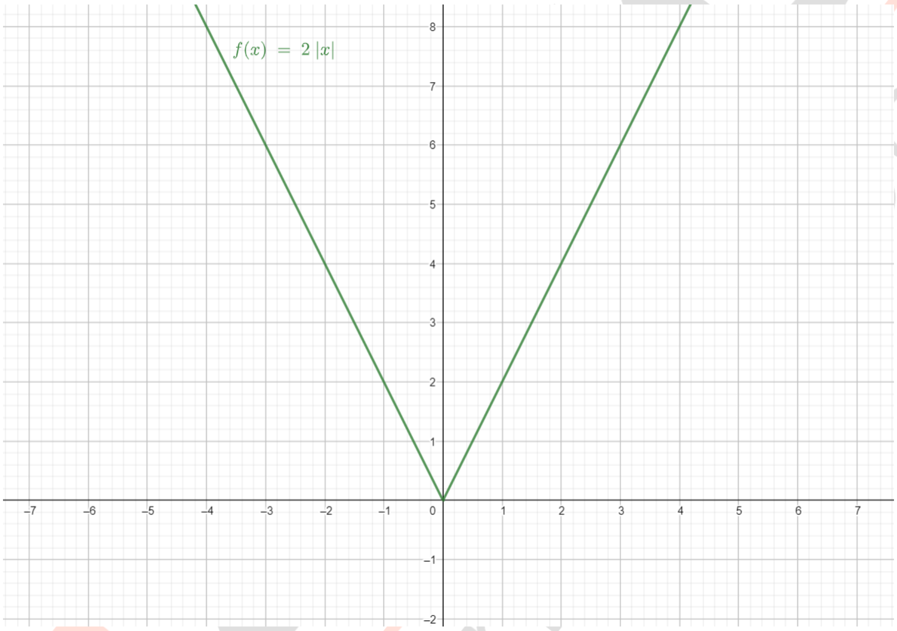


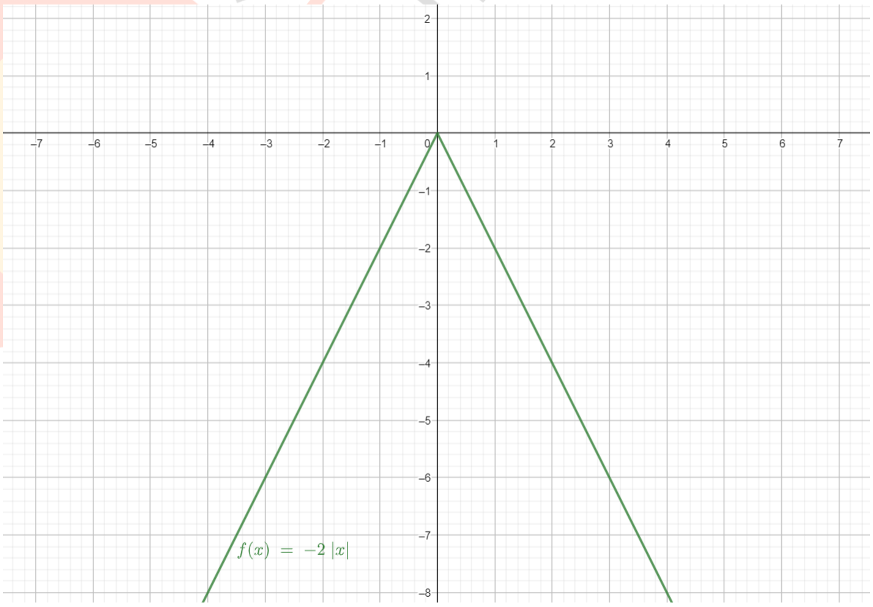
Η Συνάρτηση $f(x) = \alpha|x|$:

Έχει τη μορφή $f(x) = \begin{Bmatrix} ax, & x \geq 0 \\ -ax, & x < 0 \end{Bmatrix}$. Αν ισχύει:

- $\boldsymbol{\alpha > 0}$, τότε η γραφική της παράσταση βρίσκεται **εξολοκλήρου πάνω** από τον άξονα $x'x$.

- $\boldsymbol{\alpha < 0}$, τότε η γραφική της παράσταση βρίσκεται **εξολοκλήρου κάτω** από τον άξονα $x'x$.





Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να βρείτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα δοθέντα σημεία σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

α) $A(-1,2)$ και $B(2,-4)$

β) $A(3,5)$ και $B(-6,-6)$

γ) $A(-4,0)$ και $B(0,8)$

Λύση:

Για να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας, αρκεί να γνωρίζουμε δύο σημεία αυτής.

α) $A(-1,2)$ και $B(2,-4)$ $\Rightarrow$

$$\alpha = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \alpha = \frac{-4-2}{2-(-1)} = \frac{-6}{3} \Leftrightarrow \alpha = -2$$

β) $A(3,5)$ και $B(-6,-6)$ $\Rightarrow$

$$\alpha = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \alpha = \frac{-6-5}{-6-3} = \frac{-11}{-9} \Leftrightarrow \alpha = \frac{11}{9}$$

γ) $A(-4,0)$ και $B(0,8)$ $\Rightarrow$

$$\alpha = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \alpha = \frac{8-0}{0-(-4)} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow \alpha = 2$$

Άσκηση 2

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:

α) έχει κλίση $\alpha = 4$ και διέρχεται από το σημείο $\Delta(3,9)$.

β) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 60^o και τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη $\sqrt[3]{125}$.

γ) είναι παράλληλη με την ευθεία $y = -3x + 8$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση:

α) Έστω ευθεία με τύπο $y = ax + \beta$. Αφού έχει κλίση ίση με 4, αρκεί να βρούμε το συντελεστή β.

$y = 4x + \beta \xRightarrow{\Delta(3,9)} 9 = 12 + \beta \ \Rightarrow \beta = -3 \Rightarrow$

Επομένως, πρόκειται για την ευθεία $y = 4x - 3$.

β) Έστω ευθεία με τύπο $y = ax + \beta$. Αφού σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με 60^o, συμπεραίνουμε ότι θα έχει κλίση ίση την εφαπτομένη της γωνίας.

$\alpha = \varepsilon\varphi 60^o \ \Rightarrow \alpha = \sqrt{3}$

Η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη $\sqrt[3]{125}$. Συνεπώς, το σημείο έχει τετμημένη ίση με μηδέν και πρόκειται για το $M(0,5)$. Άρα:

$y = \sqrt{3}x + \beta \xRightarrow{M(0,5)} 5 = 0 + \beta \ \Rightarrow \beta = 5 \Rightarrow$

Επομένως, πρόκειται για την ευθεία $y = \sqrt{3}x + 5$.

γ) Έστω ευθεία με τύπο $y = ax + \beta$. Αφού είναι παράλληλη με την ευθεία $y = -3x + 8$, σημαίνει ότι οι δύο ευθείες έχουν την ίδια κλίση. Συνεπώς, η ευθεία έχει κλίση ίση με – 3. Επιπλέον, διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο $O(0,0)$ επαληθεύει τον τύπο της. Ή, μπορούμε να αποφανθούμε και απευθείας ότι πρόκειται για ευθεία της μορφής $y = ax$, καθώς μόνο αυτές διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Άρα, $\beta = 0$ και επομένως, πρόκειται για την ευθεία $y = -3x$.

Άσκηση 3

Δίδονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = x + 4$ και $\varepsilon_2 : y = -2x + 7$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής των δύο ευθειών.

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Λύση:

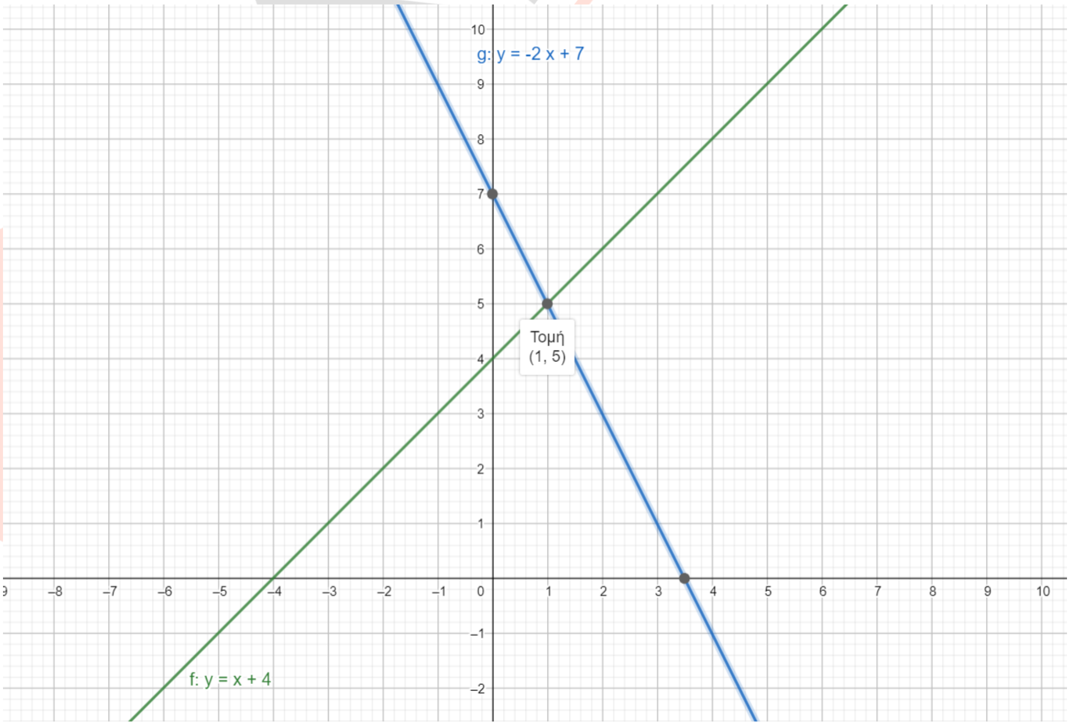
α) Αφού οι δύο ευθείες έχουν σημείο τομής· έστω το $M(x, y)$, τότε, το σημείο αυτό θα επαληθεύει συγχρόνως και τις δύο εξισώσεις.

$$\begin{Bmatrix} y = x + 4 \\ y = -2x + 7 \end{Bmatrix} \overset{M(x,y)}{\Longleftrightarrow} x + 4 = -2x + 7 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$$

$$y = 1 + 4 \Leftrightarrow y = 5 \Rightarrow$$

Επομένως, τέμνονται στο σημείο $A(1, 5)$.

β)



Παρατήρηση:

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, αρκεί να ξέρουμε δύο σημεία αυτής. Τα εντοπίζουμε με τη βοήθεια των αξόνων και των συντεταγμένων τους στο επίπεδο και τα ενώνουμε. Προεκτείνοντας και από τις δύο πλευρές, προκύπτει η ευθεία. Για περισσότερη ευκολία, συνήθως επιλέγουμε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες, επειδή είναι πιο εύκολο και πιο γρήγορο τόσο να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες τους όσο και να τα εντοπίσουμε στο επίπεδο.

Άσκηση 4

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-2\lambda}{4}$ διέρχεται από το σημείο $A(4,-1)$.

α) Να υπολογίσετε τον αριθμό λ.

β) Να υπολογίσετε το $f(3)$.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

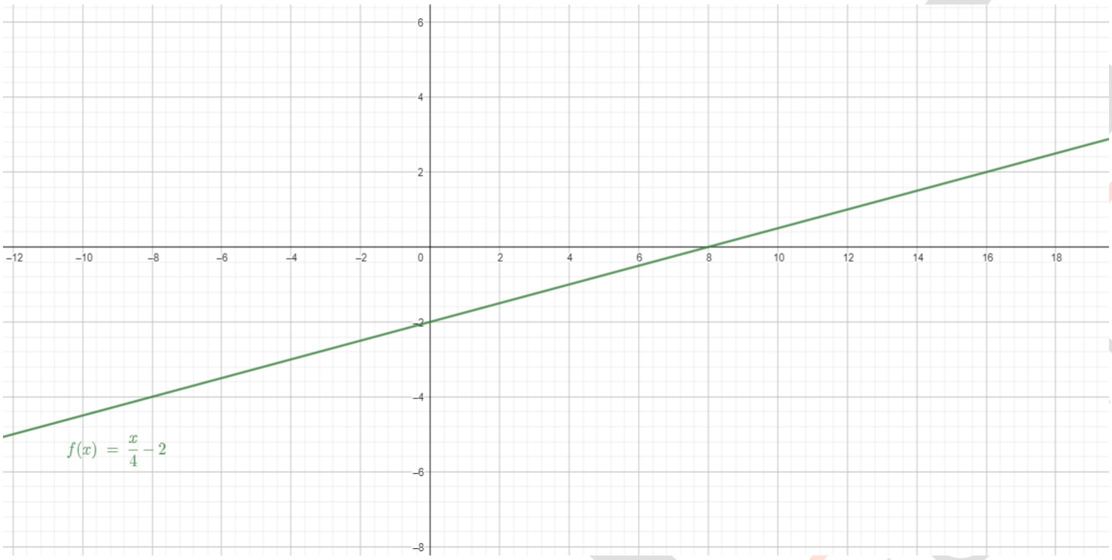
Λύση:

α) $f(x) = \frac{x-2\lambda}{4} \xRightarrow{A(4,-1)} f(4) = -1 \Rightarrow$

$\frac{4-2\lambda}{4} = -1 \Rightarrow 4 - 2\lambda = -4 \Rightarrow -2\lambda = -8 \Rightarrow \lambda = 4$

β) $f(x) = \frac{x-2*4}{4} = \frac{x-8}{4} \xRightarrow{x=3} f(3) = \frac{3-8}{4} = -\frac{5}{4}$

γ) $f(x) = \frac{x-8}{4} = \frac{x}{4} - 2 \;\Rightarrow$



Άσκηση 5

Η ευθεία $y = (3-\lambda)x + 4\lambda - 1$ σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία ίση με 45^o.

α) Να υπολογίσετε τον αριθμό λ.

β) Να γράψετε τρεις ευθείες παράλληλες προς τη δοθείσα ευθεία.

γ) Να σχεδιάσετε και τις τέσσερις ευθείες στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Λύση:

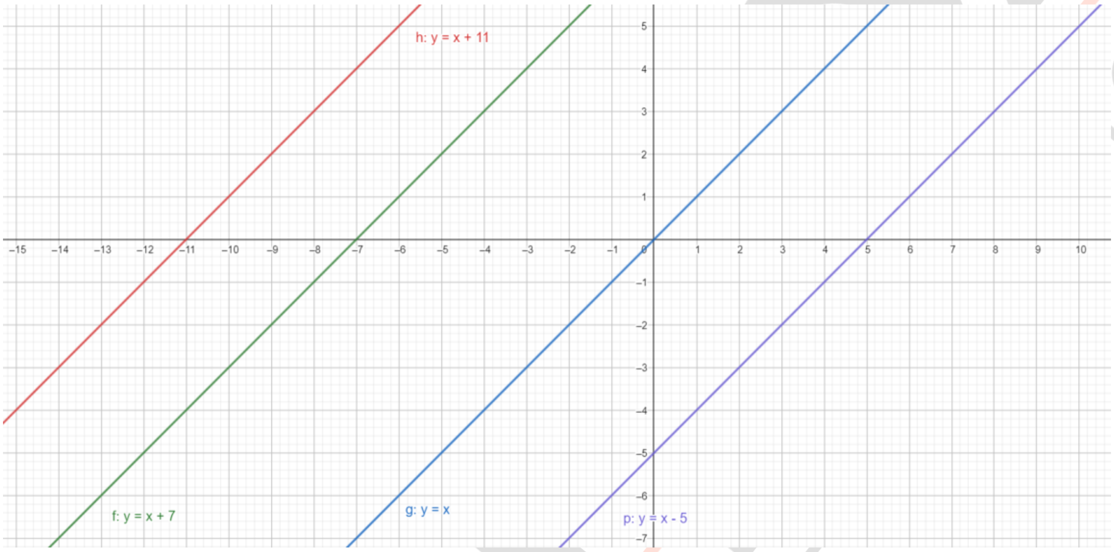
α) Αφού η ευθεία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με 45^o, συμπεραίνουμε ότι θα έχει κλίση ίση την εφαπτομένη της γωνίας.

$\alpha = \varepsilon\varphi 45^o \;\Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow 3 - \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 2$

Επομένως, πρόκειται για την ευθεία $y = x + 7$.

β) Για να είναι δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, πρέπει να έχουν την ίδια ακριβώς κλίση. Ο συντελεστής β δεν παίζει ρόλο, οπότε τρεις παράλληλες με τη δοθείσα ευθεία είναι οι $\begin{Bmatrix} y=x \\ y=x-5 \\ y=x+11 \end{Bmatrix}$.

γ)



Άσκηση 6

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x-2|+\lambda x-3\mu$ τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 8 και τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη -4. Να υπολογίσετε τα λ και μ.

Λύση:

Αφού η συνάρτηση τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 8 και τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη -4, σημαίνει ότι διέρχεται από τα σημεία $A(0,8)$ και $B(-4,0)$. Συνεπώς, τα δύο σημεία την επαληθεύουν.

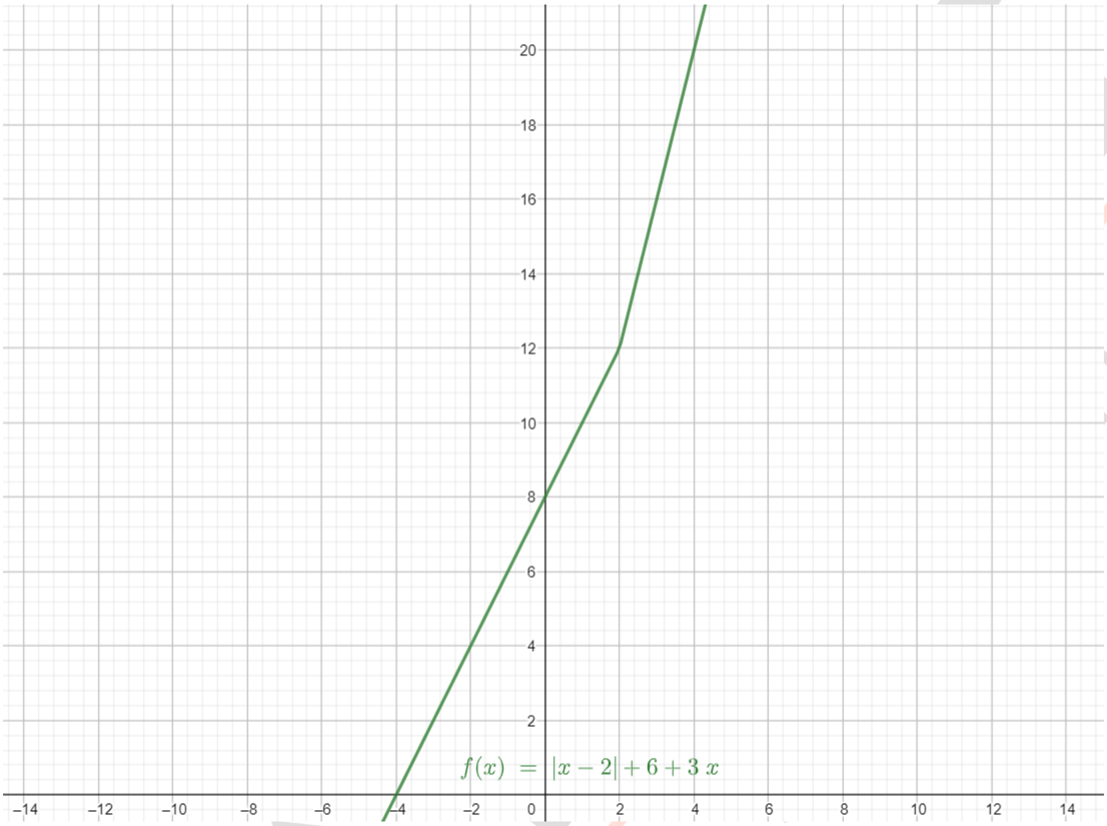
$$f(x)=|x-2|+\lambda x-3\mu \xRightarrow{A(0,8)} |0-2|+0-3\mu=8 \Rightarrow$$

$$2-3\mu=8 \Rightarrow -3\mu=6 \Rightarrow \mu=-2$$

$$f(x)=|x-2|+\lambda x+6 \xRightarrow{B(-4,0)} |-4-2|-4\lambda+6=0 \Rightarrow$$

$$6-4\lambda+6=0 \Rightarrow -4\lambda=-12 \Rightarrow \lambda=3$$

Επομένως, πρόκειται για την ευθεία $f(x) = |x-2| + 3x + 6$.



Άσκηση 7

Δίδονται οι ευθείες $\varepsilon_1:\ y = (a+1)x + 5a - 2$ και $\varepsilon_2:\ y = -(a-\beta)x - \beta + 2\alpha$. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από το σημείο $M(-2,-1)$ και οι δύο ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες.

α) Να βρείτε τα α και β.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν που σχηματίζει η ε_2 με τους άξονες.

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων και τις δύο ευθείες.

δ) Να βρείτε ευθεία ε_3 η οποία διέρχεται από το σημείο τομή της ε_2 με την ευθεία ε_4: $y = 3x - 2$ και έχει κλίση ίση με τη θετική ρίζα του τριωνύμου $x^2 - 3x - 4$.

Λύση:

α) Η ευθεία ε_1 διέρχεται από το σημείο $M(-2,-1)$, οπότε:

$$y = (a+1)x + 5a - 2 \xRightarrow{M(-2,-1)} -1 = -2\alpha - 2 + 5\alpha - 2 \Rightarrow$$

$$3\alpha - 4 = -1 \Rightarrow 3\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow$$

Αφού οι ευθείες είναι μεταξύ τους παράλληλες, θα έχουν την ίδια κλίση.

Άρα: $-(a-\beta) = \alpha + 1 \xRightarrow{\alpha=1} -(1-\beta) = 2 \Rightarrow \beta = 3$

Επομένως, πρόκειται για τις ευθείες $y = 2x + 3$ και $y = 2x - 1$.

β) Για να βρούμε το τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία με τους άξονες, αρκεί να βρούμε τα σημεία τομής της με αυτούς.

Τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τεταγμένη μηδέν. Άρα:

$$0 = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

Τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τετμημένη μηδέν. Άρα:

$$y = 2 * 0 - 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B(0,-1)$$

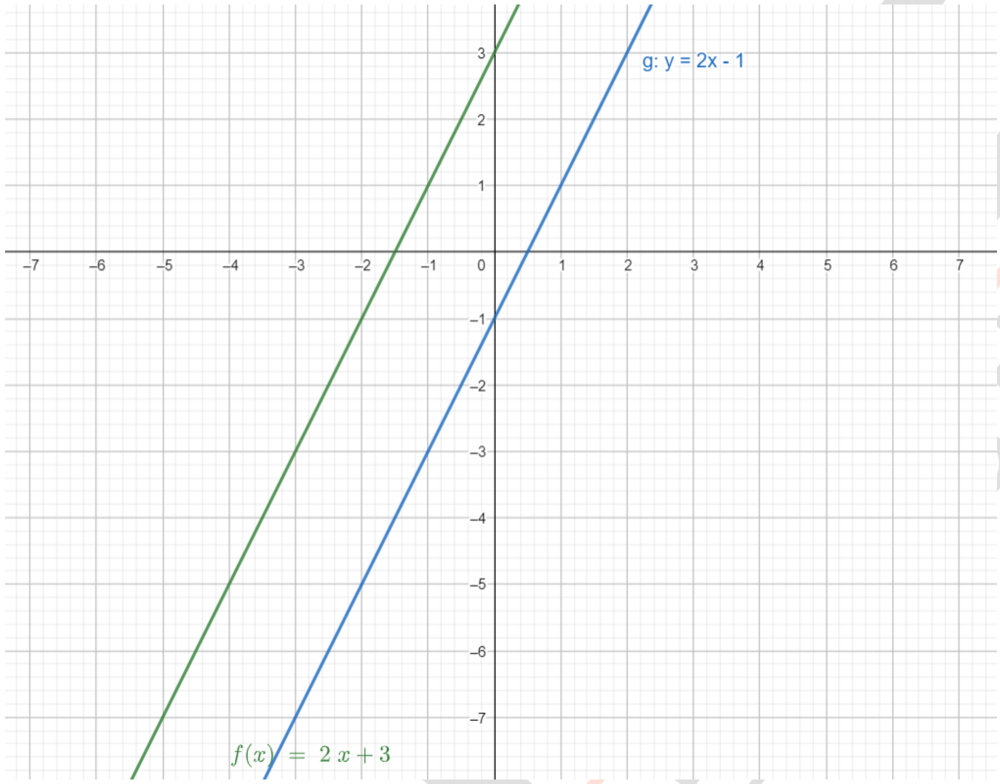
Άρα, αφού οι δύο άξονες τέμνονται κάθετα μεταξύ τους, το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο. Οπότε, η βάση είναι η τετμημένη του Α και το ύψος είναι η τεταγμένη του Β. Συνεπάγεται:

$$E = \frac{1}{2} * \beta * \upsilon = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{4}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Επειδή το σημείο Β έχει αρνητική τεταγμένη, αλλά το ύψος είναι πάντα θετική ποσότητα, πολλαπλασιάζουμε με την απόλυτη τιμή του.

γ)



δ) Αρχικά, θα βρούμε το σημείο τομής της ε_2 με την ευθεία ε_4: $y = 3x - 2$. Αφού είναι κοινό σημείο, τις επαληθεύει συγχρόνως.

$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \overset{M(x,y)}{\Longleftrightarrow} 2x - 1 = 3x - 2 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow$

$y = 2 - 1 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow$

Επομένως, τέμνονται στο σημείο $K(1, 1)$. Άρα, και η ε_3: $y = ax + \beta$ διέρχεται από το ίδιο σημείο. Οπότε έχουμε $\alpha + \beta = 1$.

Έχει κλίση ίση με τη θετική ρίζα του τριωνύμου $x^2 - 3x - 4$.

$\Delta = 9 + 16 = 25 > 0 \Rightarrow x = \frac{3+5}{2} = 4$

Άρα, έχουμε $\alpha + \beta = 1 \overset{\alpha=4}{\Longleftrightarrow} 4 + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = -3$.

Συνολικά: ε_3: $y = 4x - 3$.