Προσδοκώμενοι Στόχοι Ενότητας:

→ Ο/Η μαθητής/τρια θα πρέπει στο πέρας της ενότητας να έχει κατανοήσει σε βάθος:

- την έννοια των καρτεσιανών συντεταγμένων,
- την έννοια της συμμετρίας των σημείων,
- την έννοια της απόστασης σημείων,
- την έννοια της γραφικής παράστασης,
- την εύρεση της απόστασης δύο σημείων,
- το χειρισμό μιας γραφικής παράστασης.

Συμπλήρωση Κενών:

Σε αυτό το κομμάτι της ενότητας ο/η μαθητής/τρια θα βρει τις παρατηρήσεις, τα κόλπα και τις έξυπνες μεθόδους που χρειάζεται για να καταλάβει πλήρως όλα όσα έμαθε και να καλύψει τυχόντα κενά.

Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

Κάθε πραγματικός αριθμός που υπάρχει έχει μία θέση πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Ωστόσο, τι συμβαίνει, όταν πρόκειται για το επίπεδο ή για τον τρισδιάστατο χώρο; Ανάλογα με το πού δουλεύουμε κάθε φορά, οι αριθμοί αντιπροσωπεύουν κάτι διαφορετικό. Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το επίπεδο.

Κάθε στοιχείο του **επιπέδου** αναπαρίσταται ως ένα σημείο με δύο συντεταγμένες, οι οποίες μας επιτρέπουν να το εντοπίζουμε. Προκειμένου να γίνει αυτό, σχεδιάζουμε δύο **κάθετους** άξονες, τους $x'x$ *και* $y'y$, με κοινή αρχή ένα σημείο O. O άξονας $x'x$ είναι ο οριζόντιος άξονας του συστήματος και ο άξονας $y'y$ είναι ο κάθετος άξονας. Κάθε στοιχείο του επιπέδου έχει δύο συντεταγμένες, όπου η μία βρίσκεται στον οριζόντιο άξονα και η άλλη στον κάθετο.

Ορισμός:

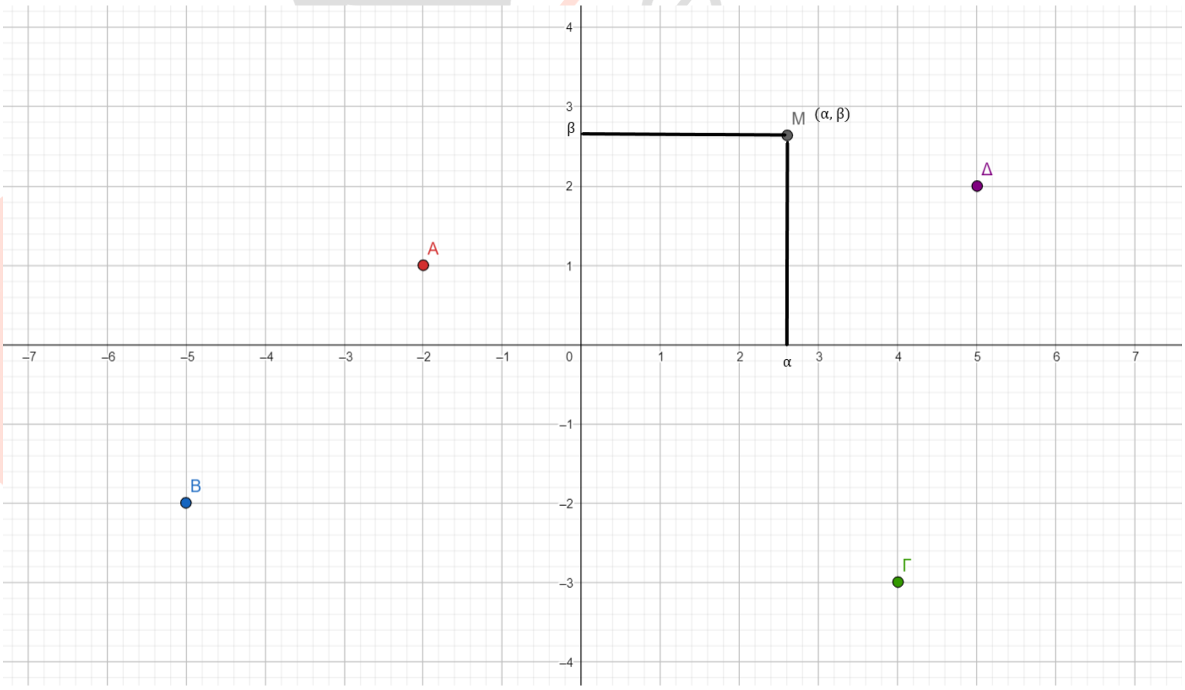
«Καρτεσιανές συντεταγμένες» ονομάζονται οι δύο συντεταγμένες που έχει κάθε σημείο του καρτεσιανού επιπέδου.

- Το σύστημα των δύο κάθετων αξόνων ονομάζεται «καρτεσιανό σύστημα» και οφείλει το όνομά του στο μαθηματικό Καρτέσιο. Στην πραγματικότητα, με τον όρο καρτεσιανό επίπεδο εννοούμε το επίπεδο.

Ορισμοί:

«Τετμημένη» ονομάζεται η πρώτη από τις δύο καρτεσιανές συντεταγμένες του επιπέδου και εντοπίζεται στον οριζόντιο άξονα $x'x$. Επίσης, ο άξονας $x'x$ ονομάζεται και **«άξονας των τετμημένων ή άξονας των x»**.

«Τεταγμένη» ονομάζεται η δεύτερη από τις δύο καρτεσιανές συντεταγμένες του επιπέδου και εντοπίζεται στον κάθετο άξονα $y'y$. Επίσης, ο άξονας $y'y$ ονομάζεται και **«άξονας των τεταγμένων ή άξονας των y»**.



Παρατηρήσεις:

- Για να βρούμε την τετμημένη και την τεταγμένη ενός σημείου πάνω στο (καρτεσιανό) επίπεδο, φέρουμε μία κάθετη γραμμή **παράλληλη** προς τον κάθετο άξονα και η τιμή που συναντά η γραμμή στον οριζόντιο άξονα είναι το x του σημείου. Αντίστοιχα, για την τεταγμένη φέρουμε μια γραμμή **παράλληλη** προς τον οριζόντιο αυτή τη φορά άξονα και η τιμή που συναντά στον κάθετο άξονα είναι το y του σημείου.

- Κάθε σημείο του επιπέδου έχει μοναδική τετμημένη και μοναδική τεταγμένη.

- Ουσιαστικά, ο άξονας $x'x$ παριστάνει το «μήκος» του επιπέδου και ο άξονας $y'y$ παριστάνει το «πλάτος» του επιπέδου.

- **Όλα** τα σημεία του άξονα $x'x$ έχουν τεταγμένη $\boldsymbol{y = 0}$. Πρακτικά, αφού βρίσκονται **πάνω** στον άξονα που περιγράφει το μήκος, δεν έχουν πλάτος. Αντίστοιχα, **όλα** τα σημεία του άξονα $y'y$ έχουν τετμημένη $\boldsymbol{x = 0}$. Πρακτικά, αφού βρίσκονται **πάνω** στον άξονα που περιγράφει το πλάτος, δεν έχουν μήκος.

- Οι δύο άξονες του καρτεσιανού επιπέδου **τέμνονται κάθετα σε ένα μοναδικό σημείο, το $\mathbf{O(0,\ 0)}$**, το οποίο ονομάζεται **«αρχή του συστήματος/αρχή των αξόνων».**

- Οι δύο άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα κομμάτια, το οποία ονομάζονται **«τεταρτημόρια ή τεταρτοκύκλια»**. Σε κάθε τεταρτημόριο υπάρχει συγκεκριμένο πρόσημο που έχουν οι τετμημένες και οι τεταγμένες.

  → 1ο τεταρτημόριο : Θετική Τετμημένη και Θετική Τεταγμένη

  → 2ο τεταρτημόριο : Αρνητική Τετμημένη και Θετική Τεταγμένη

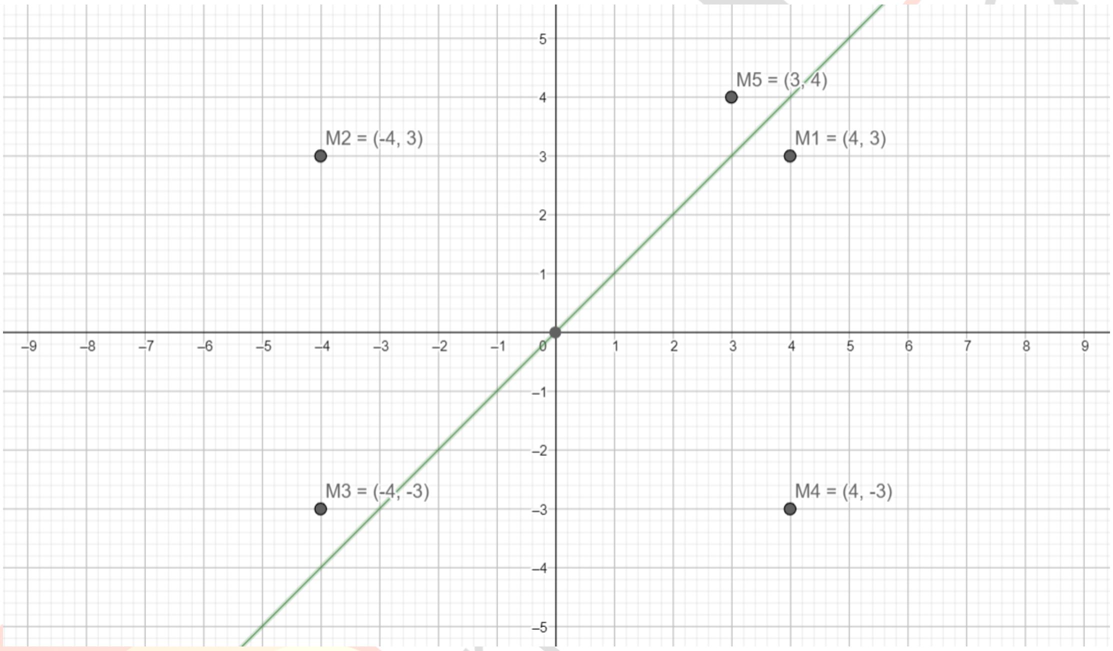
  → 3ο τεταρτημόριο : Αρνητική Τετμημένη και Αρνητική Τεταγμένη

  → 4ο τεταρτημόριο : Θετική Τετμημένη και Αρνητική Τεταγμένη

- Για κάθε σημείο του επιπέδου μπορούμε να βρούμε ένα συμμετρικό του. Εξαρτάται κάθε φορά ως προς τι αναζητούμε συμμετρικότητα. Ένα σημείο έχει πολλά συμμετρικά σημεία, αλλά αναλόγως ως προς την ιδιότητά του, ένα συμμετρικό σημείο είναι πάντα μοναδικό. Δηλαδή, ένα σημείο έχει συμμετρικό και ως προς τον άξονα των x και ως προς τον άξονα των y. Ωστόσο, το κάθε συμμετρικό σημείο ως προς τον κάθε άξονα είναι μοναδικό.

Η Έννοια της Συμμετρίας των Σημείων:

Κάθε σημείο μπορεί να έχει ένα συμμετρικό σημείο ως προς κάτι συγκεκριμένο, λόγου χάριν ως προς την αρχή των αξόνων. Συμμετρικό σημείο σημαίνει ότι τα δύο σημεία μοιράζονται μια κοινή ιδιότητα, ότι για παράδειγμα απέχουν το ίδιο από κάποιον άξονα. Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε ότι δύο σημεία είναι συμμετρικά μεταξύ τους ως προς μια ευθεία, όταν, διπλώνοντας το επίπεδο σύμφωνα με τον άξονα που ορίζει η ευθεία, τα δύο σημεία να ταυτίζονται. Η έννοια της συμμετρίας μας είναι ήδη γνώριμη από προγενέστερες τάξεις. Αυτό που θα μελετήσουμε τώρα είναι η συμμετρία των σημείων ως προς τους άξονες του επιπέδου και πώς συνδέεται η συμμετρία με τα τέσσερα τεταρτημόρια.



Έστω το σημείο $M1 = (4, 3)$. Αυτό συνεπάγεται ότι το σημείο έχει τετμημένη ίση με 4 και τεταγμένη ίση με 3. Το M1 έχει **συμμετρικό**:

- ως προς τον **άξονα $y'y$** το σημείο M2, δηλαδή εκείνο το σημείο με το οποίο έχει **ίση τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη**,
- ως προς τον **άξονα $x'x$** το σημείο M4, δηλαδή εκείνο το σημείο με το οποίο έχει **ίση τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη**,
- ως προς την **αρχή των αξόνων** το σημείο M3, δηλαδή εκείνο το σημείο με το οποίο έχει **και αντίθετη τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη**,

- ως προς τη **διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου**, δηλαδή την ευθεία $\boldsymbol{y = x}$, το σημείο M5, δηλαδή εκείνο το σημείου με το οποίο έχει **αντίστροφα τις συντεταγμένες**.

Η Έννοια της Απόστασης Σημείων

Ορισμός:

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων και έστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του επιπέδου. **«Απόσταση»** των δύο σημείων ορίζεται ως το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο σημεία και δίδεται από τον τύπο

$$\boldsymbol{(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

Παρατηρήσεις:

- Προφανώς η απόσταση από το σημείο A στο σημείο B είναι ίση με την απόσταση από το σημείο B στο σημείο A. Άλλωστε, όπως και να γίνει η αφαίρεση, η διαφορά υψώνεται στο τετράγωνο.

- Όταν πρόκειται για απόσταση πρόκειται πάντα για ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει είτε δύο σημεία μεταξύ τους είτε σημείο με κάποια ευθεία. Στη δεύτερη περίπτωση, μιλάμε πάντα για ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο με την ευθεία **κάθετα**.

- Επειδή η απόσταση στην ουσία εκφράζει μήκος, είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός. Στην περίπτωση που τα δύο σημεία ταυτίζονται μεταξύ τους, η απόσταση ισούται με μηδέν. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, η απόσταση δύο σημείων είναι πάντα θετικός αριθμός.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Έστω δύο σημεία $A(1,-2)$ και $B(3,4)$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα Α και Β.

β) Να ορίσετε τα συμμετρικά σημεία του Α ως προς τους δύο άξονες, την αρχή των αξόνων και ως προς τη διχοτόμο του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου.

Λύση:

α) Εφόσον αναζητούμε μήκος ευθυγράμμου τμήματος, αναζητούμε απόσταση.

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2} \Leftrightarrow$$

$$(AB) = \sqrt{(3-1)^2 + (4-(-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$(AB) = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

β) $A(1,-2):\left\{\begin{matrix} A1(1,2): συμμετρικό\ ως\ προς\ τον\ άξονα\ των\ x \\ A2(-1,-2): συμμετρικό\ ως\ προς\ τον\ άξονα\ των\ y \\ A3(-1,2): συμμετρικό\ ως\ προς\ την\ αρχή\ των\ αξόνων \\ A4(-2,1): συμμετρικό\ ως\ προς\ τη\ διχοτόμο \end{matrix}\right\}$

Άσκηση 2:

Έστω δύο σημεία $A(8,2)$ και $B(4,-1)$.

α) Να υπολογίσετε τη μεταξύ τους απόσταση.

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες ενός σημείου Γ, το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο $A\hat{\Gamma}B$ να είναι ισοσκελές.

Λύση:

α) $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2} \Leftrightarrow$

$$(AB) = \sqrt{(4-8)^2 + (-1-2)^2} \Leftrightarrow$$

$$(AB) = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

β) Εφόσον θέλουμε το τρίγωνο $A\hat{\Gamma}B$ να είναι ισοσκελές, σημαίνει ότι οι πλευρές (ΓΑ) και (ΓΒ) έχουν το ίδιο μήκος.

Αφού το σημείο Γ ανήκει στον άξονα $y'y$, συνεπάγεται ότι θα έχει τετμημένη ίση με μηδέν. Άρα: $\Gamma(0, y) \Rightarrow$

$(\Gamma A) = (\Gamma B) \;\; \Leftrightarrow$

$\sqrt{(8-0)^2 + \; (2-y)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + \; (-1-y)^2} \;\; \Leftrightarrow$

$\sqrt{64 + 4 - 4y + y^2} = \; \sqrt{16 + 1 + 2y + y^2} \;\; \Leftrightarrow$

$y^2 - 4y + 68 \; = \; y^2 + 2y + 17 \;\Leftrightarrow$

$6y = 51 \;\Leftrightarrow y = 8{,}5 \;\; \Leftrightarrow \Gamma(0, 8{,}5)$

Άσκηση 3:

Έστω δύο σημεία $A(-3,-5)$ και $B(1,-6)$.

α) Να βρείτε τα συμμετρικά τους σημεία ως προς τον άξονα $x'x$.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των συμμετρικών τους σημείων.

γ) Μπορείτε να βρείτε την απόσταση των Α και Β χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον τύπο της απόστασης;

Λύση:

α) Εφόσον θέλουμε συμμετρικά σημεία ως προς τον άξονα $x'x$, συνεπάγεται ότι τα σημεία θα έχουν ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη. Δηλαδή:

$A(-3,-5) \;\Rightarrow A'(-3, 5)$

$B(1,-6) \;\;\Rightarrow\;\; B'(1, 6)$

β) $(A'B') = \; \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \; (y_1 - y_2)^2} \;\; \Leftrightarrow$

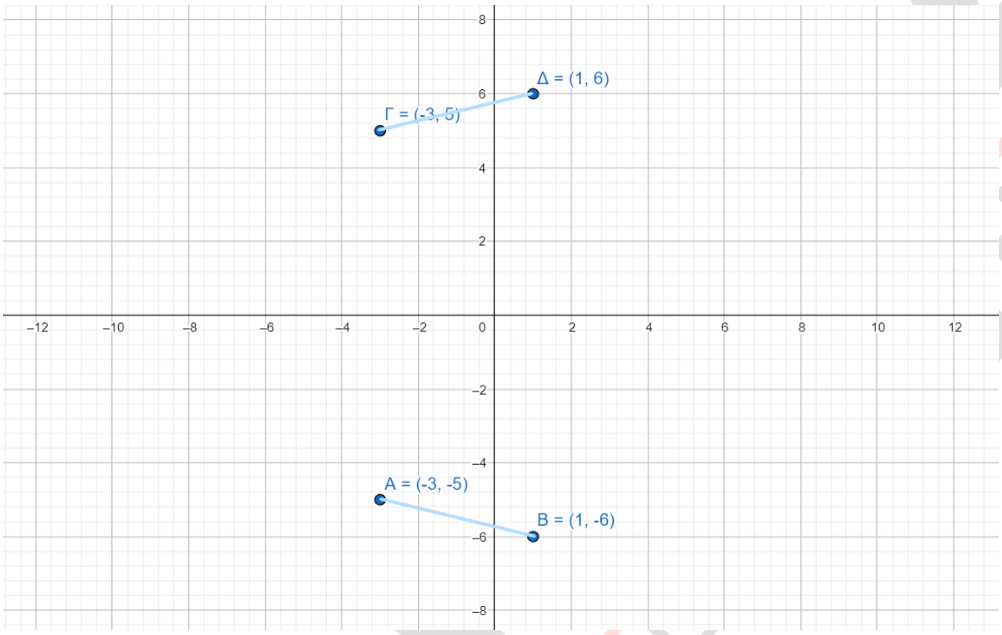
$(A'B') = \; \sqrt{(1-(-3))^2 + \; (6-5)^2} \;\;\; \Leftrightarrow$

$(A'B') = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$

γ) Εφόσον ξέρουμε την απόσταση των Α′ και Β′, ξέρουμε και αυτή των Α και Β.

Αφού τα Α′ και Β′ είναι τα συμμετρικά τους ως προς τον άξονα, είναι σαν να έχουμε «μεταφέρει» το ευθύγραμμο τμήμα πάνω από τον άξονα των x.

Άρα, $(AB) = (A'B') = \sqrt{17}$.



Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α και έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού της η συνάρτηση μας επιστρέφει μια τιμή. Το σύνολο επομένως των $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο που συνίσταται από όλα τα σημεία $M(x, f(x))$ καλείται **«γραφική παράσταση»** της συνάρτησης και συμβολίζεται ως $\boldsymbol{C_f}$. Η εξίσωση λοιπόν $y = f(x)$ επαληθεύεται από όλα τα σημεία που ανήκουν πάνω στη $\boldsymbol{C_f}$ και μόνο από αυτά.

Η συνάρτηση λειτουργεί σαν ένα δρόμο που οδηγεί το κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού σε κάποιο άλλο στοιχείο του συνόλου τιμών. Συνεπώς, η γραφική παράσταση στην ουσία είναι ο τρόπος να «παραστήσουμε» την εικόνα της συνάρτησης.

Στην προηγούμενη ενότητα παραθέσαμε τις γραφικές παραστάσεις κάποιων πολύ σημαντικών συναρτήσεων. Μέσω της γραφικής παράστασης εξάγουμε πολλά συμπεράσματα όσον αφορά μια συνάρτηση. Η γραφική παράσταση αποτελεί μια οπτικοποίηση της συνάρτησης.

Σημαντικές Ιδιότητες

- Για όλα τα σημεία $M(x, y)$ που βρίσκονται πάνω στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ισχύει $y = f(x)$. Μάλιστα, ισχύει ότι το σημείο $M(x_0, y_0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης αν και μόνον εάν ισχύει $f(x_0) = y_0$.

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από τον άξονα των τετμημένων αν και μόνον εάν η συνάρτηση επιστρέφει θετικές τιμές. Δηλαδή:
Η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x $\Leftrightarrow f(x) > 0$.

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται κάτω από τον άξονα των τετμημένων αν και μόνον εάν η συνάρτηση επιστρέφει αρνητικές τιμές. Δηλαδή:
Η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x $\Leftrightarrow f(x) < 0$.

- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση μιας άλλης συνάρτησης g αν και μόνον εάν η συνάρτηση της f επιστρέφει μεγαλύτερες τιμές από αυτή της g. Δηλαδή:
Η C_f βρίσκεται πάνω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση μιας άλλης συνάρτησης g αν και μόνον εάν η συνάρτηση της f επιστρέφει μικρότερες τιμές από αυτή της g. Δηλαδή:
Η C_f βρίσκεται κάτω από τη $C_g \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

Σημεία Τομής με τους Άξονες:

Οι άξονες έχουν το χαρακτηριστικό ότι η μία εκ των δύο συντεταγμένων των σημείων που ανήκουν σε αυτούς είναι πάντα μηδέν. Τα σημεία του άξονα $x'x$ έχουν όλα τεταγμένη μηδέν, ενώ τα σημεία του άξονα του $y'y$ έχουν όλα τετμημένη μηδέν. Συνεπώς, εάν θέλουμε να βρούμε το/τα σημείο/α τομής μιας συνάρτησης με κάποιον άξονα, αρκεί να μηδενίζουμε την κατάλληλη συντεταγμένη.

- **Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο της μορφής $M(x_0, 0)$. Για να το βρούμε, λύνουμε την εξίσωση $f(x_0) = 0$.**

- **Η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο της μορφής $M(0, y_0)$. Για να το βρούμε, λύνουμε την εξίσωση $f(0) = y_0$.**

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Να υπολογίσετε για ποιες τιμές του x βρίσκονται οι παρακάτω συναρτήσεις πάνω από τον άξονα των τετμημένων.

α) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

β) $g(x) = \frac{3+x}{x-4}$

Λύση:

α) $f(x) = -x^2 + 3x - 2 \Rightarrow$

Καταρχάς, η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, επομένως έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$. Αφού θέλουμε η συνάρτηση να βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, ψάχνουμε τα x εκείνα για τα οποία θα ισχύει $f(x) > 0$.

$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 8 = 1 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \Rightarrow x_1 = 1 \;\; και \;\; x_2 = 2 \Rightarrow$

Επειδή το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και αρνητικό συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου, συμπεραίνουμε ότι θα είναι θετικό στο διάστημα εντός των ριζών του. Οπότε: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, 2)$.

β) $g(x) = \frac{3+x}{x-4} \Rightarrow$

Καταρχάς, θα βρούμε το πεδίο ορισμού. Η συνάρτηση είναι κλασματική, συνεπώς, θα πρέπει να εξαιρέσουμε τις ρίζες του παρονομαστή από το πεδίο ορισμού της.

Πρέπει: $x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4 \Leftrightarrow A_g = \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

Αφού θέλουμε η συνάρτηση να βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, ψάχνουμε τα x εκείνα για τα οποία θα ισχύει $g(x) > 0$.

$g(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{3+x}{x-4} > 0 \Leftrightarrow (3+x)(x-4) > 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{Bmatrix} 3+x>0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x-4>0 \\ ή \\ 3+x<0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x-4<0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x>-3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x>4 \\ ή \\ x<-3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x<4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x>4 \\ ή \\ x<-3 \end{Bmatrix} \overset{x\neq 4}{\Longleftrightarrow} g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$$

Άσκηση 2:

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 7x + 10$ και $g(x) = x - 5$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής τους με τους άξονες.

β) Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

Λύση:

α) Πρώτα θα βρούμε τα σημεία τομής της f με τους άξονες.

Η συνάρτηση θα τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τεταγμένη ίση με μηδέν.

Δηλαδή, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow \Delta = 49 - 40 = 9 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 5 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = 2 \Rightarrow$

Η συνάρτηση θα τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τετμημένη ίση με μηδέν.

Δηλαδή: $f(0) = 10$.

Επομένως, η f έχει δύο σημεία τομής με τον άξονα $x'x$, τα $A(2,0)$ και $B(5,0)$ και ένα με τον άξονα $y'y$, το $\Gamma(0,10)$.

Η συνάρτηση g θα τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τεταγμένη ίση με μηδέν.

Δηλαδή, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Η συνάρτηση θα τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τετμημένη ίση με μηδέν.

Δηλαδή: $g(0) = 0 - 5 = -5$.

Επομένως, η g έχει ένα σημείο τομής με τον άξονα $x'x$, το $\Delta(5,0)$ και ένα με τον άξονα $y'y$, το $E(0,-5)$.

β) Θέλουμε η γραφική παράσταση της f να βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g. Δηλαδή: $f(x) < g(x)$.

$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 < x - 5 \Leftrightarrow$

$x^2 - 8x + 15 < 0 \Rightarrow \quad \Delta = 64 - 60 = 4 > 0 \Rightarrow$

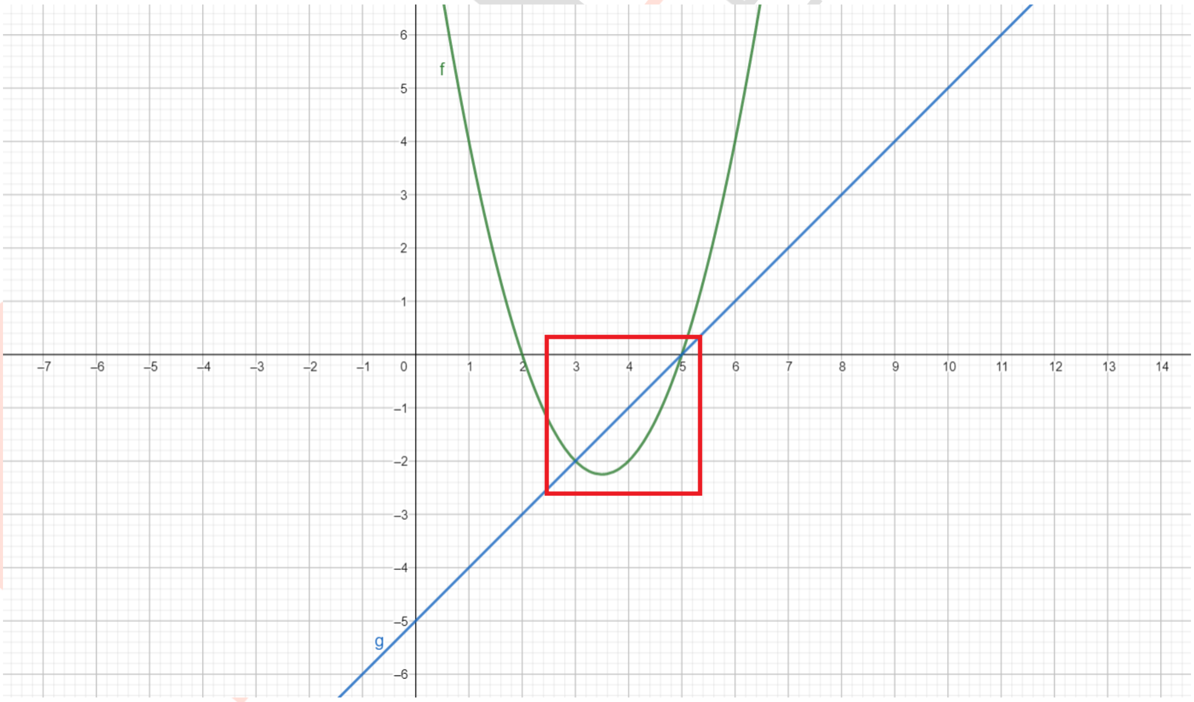
$x_{1,2} = \frac{8 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 5 \quad \kappa\alpha\iota \quad x_2 = 3 \quad \Rightarrow$

Το τριώνυμο θα έχει αρνητικό πρόσημο εντός του διαστήματος των ριζών του.

Επομένως, $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in (3, 5)$.

Σημείωση

Παρατηρώντας και τις δύο γραφικές παραστάσεις στο ίδιο σύστημα, βλέπουμε ότι πράγματι η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f για εκείνα τα x που ανήκουν στο διάστημα $(3, 5)$. Δηλαδή, ακόμη και χωρίς την αλγεβρική επίλυση, έχοντας μόνο τις γραφικές παραστάσεις, μπορούμε να το συμπεράνουμε. Στο παρακάτω σχήμα είναι σχεδιασμένες οι γραφικές παραστάσεις και των δύο συναρτήσεων.



Άσκηση 3:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x+6}{x-4}$. Να εξετάσετε, αν τα σημεία $A(2,-4)$, $B(3,-7)$ και $\Gamma(4,6)$ ανήκουν στην καμπύλη της συνάρτησης.

Λύση:

Για να εξετάσουμε, αν ανήκουν τα τρία αυτά σημεία στην καμπύλη της συνάρτησης, θα ελέγξουμε, αν οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν τον τύπο της. Πρώτα όμως, θα ορίσουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Η f είναι κλασματική, επομένως θα εξαιρέσουμε τις ρίζες του παρονομαστή.

Πρέπει: $x-4\neq 0 \Rightarrow x\neq 4 \Rightarrow A_f=\mathbb{R}\backslash\{4\}$

$$f(x)=\frac{x+6}{x-4}\xRightarrow{A(2,-4)} f(2)=\frac{2+6}{2-4}=\frac{8}{-2}=-4$$

$$f(x)=\frac{x+6}{x-4}\xRightarrow{B(3,-7)} f(3)=\frac{3+6}{3-4}=\frac{9}{-1}=-9$$

Πράγματι, το σημείο Α ανήκει στην καμπύλη της f, αφού $f(2)=-4$, ενώ το Β δεν ανήκει, αφού $f(3)=-9\neq-7$. Τέλος, όσον αφορά το σημείο Γ δεν χρειάζεται έλεγχος, διότι είναι προφανές ότι δεν ανήκει στη συνάρτηση, αφού για την τετμημένη του δεν ορίζεται η συνάρτηση.

Άσκηση 4:

Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τέτοιων, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-ax+3\beta$ να διέρχεται από τα σημεία $A(2,-1)$ και $B(-1,17)$.

Λύση:

Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από τα δύο σημεία, οι συντεταγμένες τους θα επαληθεύουν τον τύπο της.

$$f(x)=x^2-ax+3\beta \xRightarrow{A(2,-1)} f(2)=-1\Rightarrow$$

$$4-2a+3\beta=-1 \Rightarrow -2\alpha+3\beta=-5 \qquad (1)$$

$$f(x)=x^2-ax+3\beta \xRightarrow{B(-1,17)} f(-1)=17\Rightarrow$$

$$1+a+3\beta=17 \Rightarrow \alpha+3\beta=16 \qquad (2)$$

$\xrightarrow{(1),(2)} \begin{cases} -2\alpha + 3\beta = -5 \\ \alpha + 3\beta = 16 \end{cases} \xrightarrow{(1)*(-1)} \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 5 \\ \alpha + 3\beta = 16 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 3\alpha = 21 \Rightarrow \alpha = 7 \Rightarrow$

$7 + 3\beta = 16 \Rightarrow 3\beta = 9 \Rightarrow \beta = 3 \Rightarrow$

Συνεπώς, πρόκειται για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + 9$.

Άσκηση 5:

Το σημείο $M(-2,6)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + 2\lambda x - 6$.

α) Να υπολογίσετε το λ.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης με τους άξονες.

Λύση:

α) Αφού η γραφική παράσταση διέρχεται από το Μ, το σημείο επαληθεύει τον τύπο της συνάρτησης.

$f(x) = x^2 + 2\lambda x - 6 \xrightarrow{M(-2,6)} f(-2) = 6 \Rightarrow$

$4 - 4\lambda - 6 = 6 \Rightarrow -4\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x - 6$.

β) Η συνάρτηση θα τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τεταγμένη ίση με μηδέν.

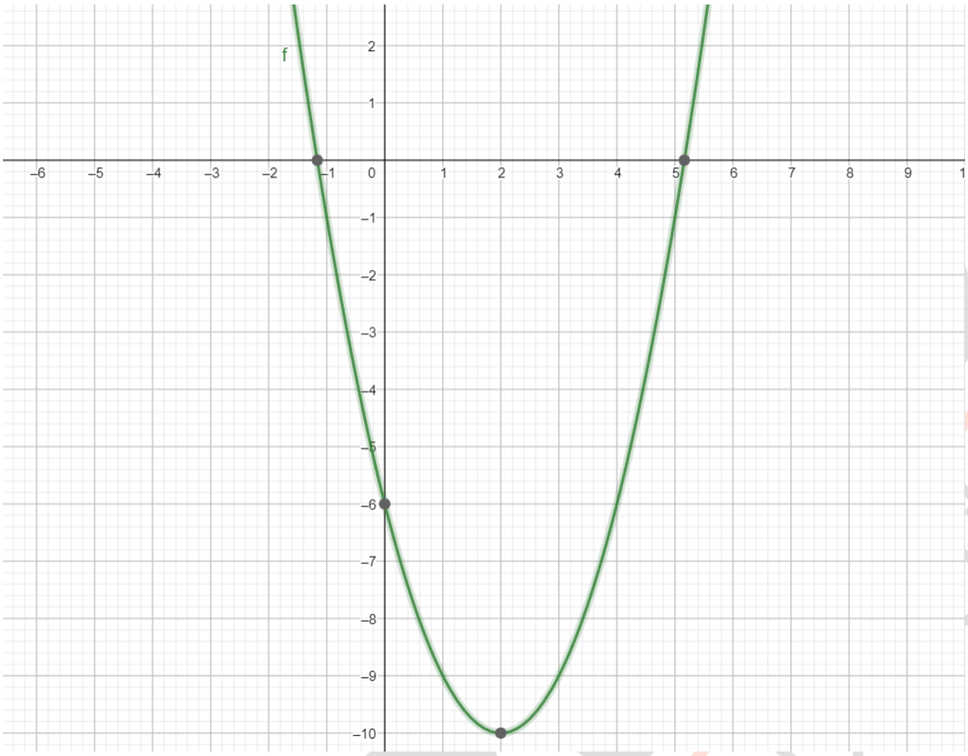
Δηλαδή, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 + 24 = 40 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{10}$ $\;\; και \;\;$ $x_2 = 2 - \sqrt{10} \Rightarrow$

Η συνάρτηση θα τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τετμημένη ίση με μηδέν.

Δηλαδή: $f(0) = 0 - 4 * 0 - 6 = -6$

Επομένως, η f έχει δύο σημεία τομής με τον άξονα $x'x$, τα $A\left(2 + \sqrt{10}, 0\right)$ και $B(2 - \sqrt{10}, 0)$ και ένα με τον άξονα $y'y$, το $\Gamma(0, -6)$.



Άσκηση 6:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1} - 2$ και $g(x) = x^2 + \lambda x - 5$, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις τέμνουν τον άξονα των τετμημένων στο ίδιο σημείο.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό λ.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της g με τους άξονες.

Λύση:

α) $f(x) = \sqrt{x-1} - 2 \Rightarrow$

Η συνάρτηση έχει ριζικό. Άρα, η υπόριζη ποσότητα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητική.

$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow A_f = [1, +\infty)$

β) Οι δύο συναρτήσεις τέμνονται σε σημείο το οποίο ανήκει στον άξονα των τετμημένων. Άρα, το σημείο επαληθεύει συγχρόνως και τις δύο συναρτήσεις και επιπλέον, έχει τεταγμένη μηδέν. Άρα:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow$

$x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 5 \Leftrightarrow A(5,0) \Rightarrow$

Οι δύο συναρτήσεις τέμνονται στο σημείο $A(5,0)$, άρα:

$g(5) = 0 \Leftrightarrow 25 + 5\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow 5\lambda = -20 \Leftrightarrow \lambda = -4 \Rightarrow$

$g(x) = x^2 - 4x - 5$

γ) Το σημείο τομής της g με τον άξονα $x'x$ το έχουμε υπολογίσει από το (β) ερώτημα. Επειδή όμως δεν γνωρίζουμε, εάν είναι το μοναδικό, θα λύσουμε την εξίσωση $g(x) = 0$ για να το διαπιστώσουμε.

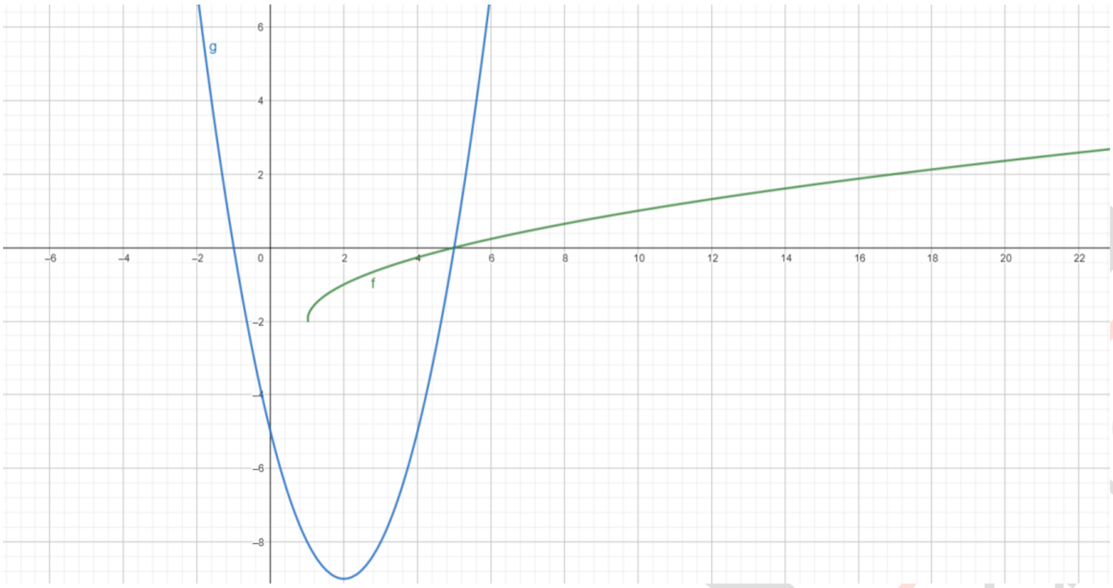
$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 + 20 = 36 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = 5 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = -1 \Rightarrow$

Η συνάρτηση θα τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τετμημένη ίση με μηδέν.

Δηλαδή: $g(0) = 0 - 4 * 0 - 5 = -5$

Επομένως, η g έχει δύο σημεία τομής με τον άξονα $x'x$, τα $A(5,0)$ και $B(-1,0)$ και ένα με τον άξονα $y'y$, το $\Gamma(0,-5)$.



Άσκηση 7:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-3| - 4$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Τα σημεία τομής της γραφικής τής παράστασης με τους άξονες.

γ) Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ και κάτω από αυτόν.

Λύση:

α) $f(x) = |x-3| - 4 \;\; \Rightarrow$

Η συνάρτηση είναι πολυωνυμική, άρα ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση θα τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τεταγμένη ίση με μηδέν.

Δηλαδή, $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-3| - 4 = 0 \Leftrightarrow |x-3| = 4 \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{matrix} x-3=4 \\ \text{ή} \\ x-3=-4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=7 \\ \text{ή} \\ x=-1 \end{matrix}\right\}$$

Η συνάρτηση θα τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τετμημένη ίση με μηδέν.

Δηλαδή: $f(0) = |0-3| - 4 = 3 - 4 = -1 \;\; \Rightarrow$

Επομένως, η f έχει δύο σημεία τομής με τον άξονα $x'x$, τα $A(7,0)$ και $B(-1,0)$ και ένα με τον άξονα $y'y$, το $\Gamma(0,-1)$.

γ) Για να βρίσκεται η καμπύλη της συνάρτησης πάνω από τον άξονα $x'x$, θα πρέπει να ισχύει:

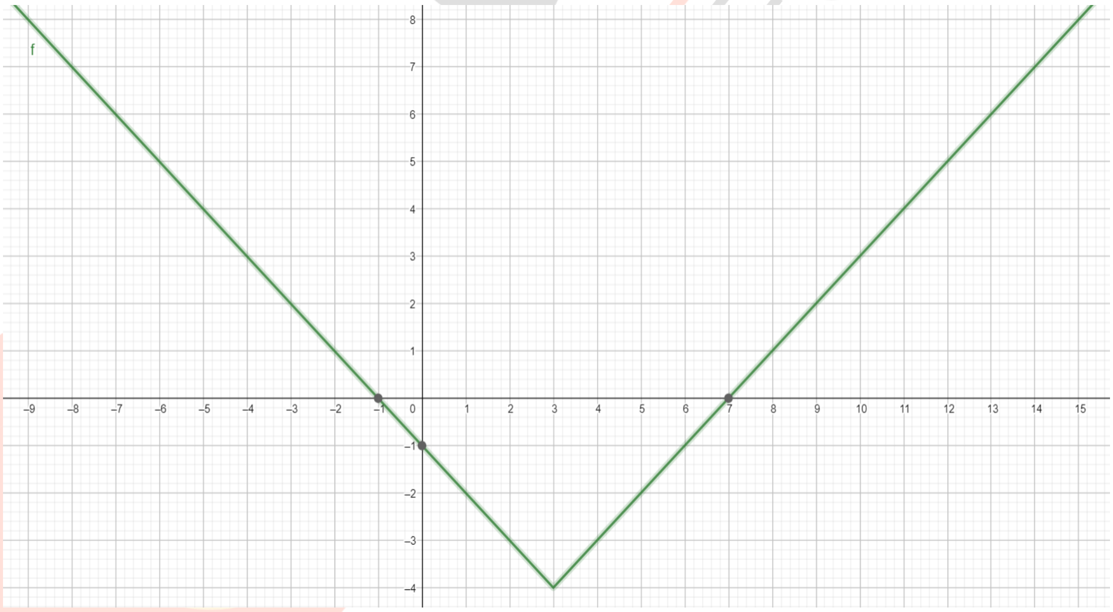
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow |x-3|-4>0 \Leftrightarrow |x-3|>4 \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} x-3>4 \\ \text{ή} \\ x-3<-4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x>7 \\ \text{ή} \\ x<-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (7,+\infty)$$

Για να βρίσκεται η καμπύλη της συνάρτησης κάτω από τον άξονα $x'x$, θα πρέπει να ισχύει:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow |x-3|-4<0 \Leftrightarrow |x-3|<4 \Leftrightarrow$$

$$-4 < x-3 < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 7 \Leftrightarrow x \in (-1,7)$$



Σημείωση

Δεν πρέπει να μας μπερδεύει η απόλυτη τιμή. Η απόλυτη τιμή μπορεί να οριστεί για οποιαδήποτε τιμή. Η όλη ουσία στην απόλυτη τιμή είναι οι τιμές τις οποίες επιστρέφει στο σύνολο τιμών της.

Άσκηση 8:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + x - 2$ και $g(x) = -x^2 + 4x + 1$. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία:

α) η C_f δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) η C_g δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ) η C_f δεν βρίσκεται πάνω από τη C_g.

Λύση:

α) Αφού θέλουμε η C_f να μην βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, στην ουσία μας ενδιαφέρει να βρίσκεται κάτω από αυτόν. Επομένως:

$f(x) < 0 \iff x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \;\; και \;\; x_2 = -2 \Rightarrow$

Άρα, το τριώνυμο θα έχει αρνητικό πρόσημο στο διάστημα εντός των ριζών του, οπότε $f(x) < 0 \iff x \in (-2, 1)$.

β) Αφού θέλουμε η C_g να μην βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, στην ουσία μας ενδιαφέρει να βρίσκεται πάνω από αυτόν. Επομένως:

$g(x) > 0 \iff -x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 + 4 = 20 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{-2} \Rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{5} \;\; και \;\; x_2 = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow$

Άρα, το τριώνυμο θα έχει θετικό πρόσημο στο διάστημα εντός των ριζών του, οπότε $g(x) > 0 \iff x \in \left(2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}\right)$.

γ) Αφού θέλουμε η C_f να μην βρίσκεται πάνω από τη C_g, στην ουσία μας ενδιαφέρει να βρίσκεται κάτω από αυτήν. Επομένως:

$f(x) < g(x) \iff x^2 + x - 2 < -x^2 + 4x + 1 \iff$

$2x^2 - 3x - 3 < 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 24 = 33 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \;\; και \;\; x_2 = \frac{3 - \sqrt{33}}{4} \Rightarrow$

Άρα, το τριώνυμο θα έχει αρνητικό πρόσημο στο διάστημα εντός των ριζών του, οπότε $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3-\sqrt{33}}{4}, \frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)$.