

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Στόχοι της παραγράφου:

- Πώς εξετάζουμε αν μία καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;
- Εύρεση σημείων τομής γραφικής παράστασης με άξονες.
- Σχετική θέση γραφικής παράστασης και άξονα $x'x$.
- Εύρεση κοινών σημείων γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων.
- Σχετική θέση γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων.
- Σχεδιασμός γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $-f(x)$, $|f(x)|$ και $f(-x)$.

Συνοπτική θεωρία:

Συμμετρίες σημείων

Συμμετρία ως προς:	Συμμετρικό σημείο του (x, y)	Σχήμα
Άξονα $x'x$	$(x, -y)$	
Άξονα $y'y$	$(-x, y)$	
$O(0, 0)$	$(-x, -y)$	
Διχοτόμο 1ου και 3ου τεταρτημορίου	(y, x)	

Ορισμός γραφικής παράστασης

Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ αποτελείται από τα σημεία $M(x, f(x))$, $x \in A$. Δηλαδή,

$$M(x, y) \in C_f \Leftrightarrow y = f(x)$$

Απόσταση σημείων

Η απόσταση δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Σημεία τομής C_f με τους άξονες

Σημεία τομής με:	Διαδικασία
Άξονα $x'x$	Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0.$ Τα $(\rho, 0)$, όπου ρ κάποια λύση της εξίσωσης, είναι τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.
Άξονα $y'y$	Αν το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τότε έχει ένα σημείο τομής με τον άξονα $y'y$, το $(0, f(0))$. Αν το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, τότε η C_f δεν τέμνει τον άξονα $y'y$.

Σχετικές θέσεις C_f με τον άξονα x'

Η C_f είναι **πάνω** από τον άξονα x' στο σημείο με τετμημένη x $\Leftrightarrow f(x) > 0$

Η C_f είναι **κάτω** από τον άξονα x' στο σημείο με τετμημένη x $\Leftrightarrow f(x) < 0$

Η C_f **τέμνει** τον άξονα x' στο σημείο με τετμημένη x $\Leftrightarrow f(x) = 0$

Σχετικές θέσεις C_f και C_g

Η C_f είναι **πάνω** από την C_g στο σημείο με τετμημένη x $\Leftrightarrow f(x) > g(x)$

Η C_f είναι **κάτω** από την C_g στο σημείο με τετμημένη x $\Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Η C_f και η C_g **τέμνονται** στο σημείο με τετμημένη x $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Οπτικοποίηση με Geogebra

Εφαρμογή 1: Προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου στο καρτεσιανό επίπεδο συντεταγμένων.



Εφαρμογή 2: Βρίσκουμε το συμμετρικό ενός σημείου ως προς τον άξονα x' , τον άξονα y' , ως προς την αρχή O των αξόνων και ως προς τη διχοτόμο ευθεία $y = x$.



Εφαρμογή 3: Υπολογίζουμε την απόσταση δύο σημείων στο καρτεσιανό επίπεδο συντεταγμένων.



Εφαρμογή 4: Προσδιορισμός της θέσης σημείων στο καρτεσιανό επίπεδο, με δοθείσες τις ανισοτικές σχέσεις που αποκαλύπτουν την απόσταση καθενός από την αρχή των αξόνων.



Εφαρμογή 5: Κατανοώντας τι εκφράζει μία συνάρτηση ως προς τη σχέση μεταξύ των μεταβλητών x , y . Πώς αυτή η σχέση αποτυπώνεται γραφικά στο καρτεσιανό επίπεδο συντεταγμένων;



Εφαρμογή 6: Προσδιορίζουμε τον τύπο μίας συνάρτησης μέσα από δύο απολαυστικά γεωμετρικά προβλήματα του λογισμικού Geogebra. Ποια είναι η μέγιστη και ελάχιστη τιμή που μπορεί να λάβει η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης;

Πρόβλημα 1



Πρόβλημα 2



Εφαρμογή 7: Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, προσδιορίζουμε τις ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης, καθώς επίσης και το πρόσημο του τριωνύμου. Ποιο είναι το Πεδίο Ορισμού και το Σύνολο Τιμών της;



Εφαρμογή 8: Πώς ελέγχουμε εάν ένα δοθέν σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης;



Εφαρμογή 9: Βρίσκουμε την αριθμητική τιμή της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής μίας δίκλαδης συνάρτησης, με γνωστό το γράφημά της.



Εφαρμογή 10: Προσδιορίζουμε τη σχετική θέση γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων. Για ποιες τιμές του x είναι η μία πάνω ή κάτω από την άλλη; Για ποιες τιμές του x , οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται;



Εφαρμογή 11: Επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, με δοθέν το γράφημα της αντίστοιχης συνάρτησης.



Εφαρμογή 12: Επίλυση ανίσωσης δευτέρου βαθμού σε πρόβλημα Φαρμακευτικής, οπτικοποιώντας το γράφημα της αντίστοιχης συνάρτησης.

