## Προσδοκώμενοι Στόχοι Ενότητας:

→ Ο/Η μαθητής/τρια θα πρέπει στο πέρας της ενότητας να έχει κατανοήσει σε βάθος:

- την έννοια της συνάρτησης,
- την έννοια του πεδίου ορισμού συνάρτησης,
- την έννοια της κλαδωτής συνάρτησης,
- την εύρεση του πεδίου ορισμού συνάρτησης,
- την επίλυση στοιχειωδών ασκήσεων στις συναρτήσεις.

## Συμπλήρωση Κενών:

Σε αυτό το κομμάτι της ενότητας ο/η μαθητής/τρια θα βρει τις παρατηρήσεις, τα κόλπα και τις έξυπνες μεθόδους που χρειάζεται για να καταλάβει πλήρως όλα όσα έμαθε και να καλύψει τυχόντα κενά.

## Η έννοια της Συνάρτησης:

**Ορισμός:**

**«Συνάρτηση»** καλείται μια/ένας διαδικασία/κανόνας που ορίζεται από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β, με την/τον οποία/ο κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε **ένα ακριβώς** στοιχείο του συνόλου Β.

- Το σύνολο Α ονομάζεται **«πεδίο ορισμού ή σύνολο ορισμού»** της συνάρτησης.

  Συνήθως χρησιμοποιούμε τον όρο πεδίο ορισμού.

- Το σύνολο Β ονομάζεται **«σύνολο τιμών ή πεδίο αφίξεως»** της συνάρτησης.

  Συνήθως χρησιμοποιούμε τον όρο σύνολο τιμών.

## Παρατηρήσεις:

- Μια συνάρτηση έχει έναν τύπο, ο οποίος συνίσταται από πραγματικούς αριθμούς και μια μεταβλητή, την οποία συνήθως συμβολίζουμε με x.

- Μια συνάρτηση συνήθως την παριστάνουμε με μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, όπως τα f, g, και h.

- Ο τρόπος που συμβολίζεται η συνολική διαδικασία είναι ο εξής:
$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$, όπου A το πεδίο ορισμού και B το σύνολο τιμών.

- Για κάθε τιμή του πεδίου ορισμού η συνάρτηση μας επιστρέφει μία τιμή η οποία βρίσκεται στο σύνολο τιμών. Μια τιμή του συνόλου τιμών συμβολίζεται ως $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

- Με τη μεταβλητή x συμβολίζουμε τις τιμές από το πεδίο ορισμού. Επειδή η συνάρτηση χρειάζεται το x για να επιστρέψει το y, το y εξαρτάται **πάντα** από το x που δίνουμε στη συνάρτηση. Επομένως, το **x** ονομάζεται **«ανεξάρτητη μεταβλητή»** και το **y** ονομάζεται **«εξαρτημένη μεταβλητή».**

- Για να λύσουμε μια άσκηση με συναρτήσεις, το πρώτο και σημαντικότερο πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι να βρούμε το πεδίο ορισμού της. Αν ξέρουμε το πεδίο ορισμού της και τον τύπο της, τότε μπορούμε να επιλύσουμε ό,τι μας ζητηθεί. Το πεδίο ορισμού είναι απαραίτητο, καθώς χωρίς αυτό δεν μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο τιμών, δηλαδή να χειριστούμε τη συνάρτηση.

- Δεν ορίζονται όλες οι συναρτήσεις για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Υπάρχουν συναρτήσεις, όπως οι κλασματικές, όπου δεν μπορούμε να τις ορίσουμε για οποιαδήποτε τιμή. Για αυτό το λόγο είναι πολύ σημαντικό να έχουμε ορίσει το πεδίο ορισμού συνάρτησης, προκειμένου να μη συμπεριληφθεί και δοθεί στη συνάρτηση τιμή, για την οποία η συνάρτηση δεν μπορεί να λειτουργήσει.

- Κάθε συνάρτηση έχει μια γραφική παράσταση, η οποία «αναπαριστά» τη συνάρτηση και της δίνει μια μορφή. Στην πραγματικότητα, μια συνάρτηση είναι ο αλγεβρικός τρόπος να εκφράσουμε μια γραφική παράσταση, η οποία εκ πρώτης όψεως δε μας επιτρέπει να τη χειριστούμε.

- Όταν μία συνάρτηση έχει ως πεδίο ορισμού και ως σύνολο τιμών είτε ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών είτε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, δηλαδή για την f ισχύει $f : A \rightarrow B$, όπου $A, B \subseteq \mathbb{R}$, τότε η f καλείται **«πραγματική συνάρτηση».**

## Βασικές Συναρτήσεις:

| Όνομα | Τύπος Συνάρτησης |
|---|---|
| **Πολυωνυμική** | $f(x) = a_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ |
| **Κλασματική/Ρητή** | $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ <br> $\mu\varepsilon$ $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα και $Q(x) \neq 0$ |
| **Σταθερή** | $f(x) = c,\ \ c \in \mathbb{R}$ |
| **Ευθεία** | $f(x) = ax + \beta,\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ |
| **Τριγωνομετρικές** | $f(x) = \eta\mu x$ : «Ημίτονο» <br> $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ : «Συνημίτονο» <br> $f(x) = \varepsilon\varphi x$ : «Εφαπτομένη» <br> $f(x) = \sigma\varphi x$ : «Συνεφαπτομένη» |

## Πολύ Σημαντική Παρατήρηση!

Με τον όρο συνάρτηση εννοούμε μια διαδικασία στην οποία κάθε ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού αντιστοιχίζεται σε ακριβώς ένα στοιχείο του συνόλου τιμών. Ωστόσο, πρέπει να διευκρινίσουμε το εξής. Δύο στοιχεία του πεδίου ορισμού, δηλαδή δύο διαφορετικά x, μπορούν να αντιστοιχίζονται στο ίδιο y. Λόγου χάριν, έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, η οποία ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Η συνάρτηση και για την τιμή 2 και για την τιμή – 2 επιστρέφει την τιμή 4. Αυτό είναι κάτι που συμβαίνει σε αρκετές συναρτήσεις και επιτρέπεται. Εν αντιθέσει με αυτό, ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού δεν μπορεί να αντιστοιχίζεται ταυτόχρονα σε δύο διαφορετικά y. Σε μια τέτοια περίπτωση δεν πρόκειται για συνάρτηση. Η συνάρτηση είναι σαν ένας «δρόμος». Πρέπει το κάθε x να οδηγεί μόνο σε ένα y, ασχέτως του αν υπάρχει και κάποιο άλλο x που να οδηγεί και αυτό στο ίδιο y.

## Η Έννοια του Πεδίου Ορισμού:

**Ορισμός:**

**«Πεδίο ορισμού»** καλείται το σύνολο το οποίο περιέχει όλες τις τιμές για τις οποίες μια συνάρτηση ορίζεται.

**Ερώτημα:** Γιατί πρέπει να βρίσκουμε το πεδίο ορισμού;

- Δεν ορίζονται όλες οι συναρτήσεις για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες πρέπει να πάρουμε περιορισμούς, καθώς για λάθος τιμές οι συναρτήσεις δε λειτουργούν.

- Υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες συναρτήσεων για τις οποίες ξέρουμε το πεδίο ορισμού:

| **Συνάρτηση** | **Πεδίο Ορισμού** |
|---|---|
| $f(x) = a_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ | $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$ |
| $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ | $\boldsymbol{Q(x) \neq 0}$ |
| $f(x) = \sqrt[\nu]{P(x)}$ | $\boldsymbol{P(x) \geq 0}$ |

- Οι τιμές για τις οποίες δεν μπορεί να οριστεί μια συνάρτηση εξαιρούνται από το πεδίο ορισμού της και ονομάζονται **«περιορισμοί»**.

## Η Έννοια της Κλαδωτής Συνάρτησης:

**Ορισμός:**

**«Κλαδωτή»** ονομάζεται μια συνάρτηση η οποία περιγράφεται από έναν τύπο που συνίσταται από περισσότερους από έναν κλάδους.

Σε μια κλαδωτή συνάρτηση ο κάθε κλάδος έχει ξεχωριστό τύπο και τον χρησιμοποιούμε μόνο για εκείνες τις τιμές για τις οποίες ορίζεται. Αυτό είναι στην ουσία το νόημα ύπαρξης πολλών κλάδων, ότι δηλαδή έκαστος ορίζεται για συγκεκριμένες τιμές του συνολικού πεδίου ορισμού.

## Ασκήσεις για Επίλυση:

**Άσκηση 1:**

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x) = x^3 - 2x + 8$

β) $g(x) = \frac{2x^2-6x+5}{8x-1}$

γ) $h(x) = \sqrt{7-x} + 4x - 1$

δ) $t(x) = \frac{\sqrt{x-3}+4}{x^2-16}$

**Λύση:**

α) $f(x) = x^3 - 2x + 8 \Rightarrow$

Είναι πολυωνυμική συνάρτηση, επομένως δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός και άρα $A_f = \mathbb{R}$.

β) $g(x) = \frac{2x^2-6x+5}{8x-1} \Rightarrow$

Είναι ρητή συνάρτηση, επομένως πρέπει να λάβουμε περιορισμό, όσον αφορά τον παρονομαστή, αφού για παρονομαστή ίσο με το μηδέν, δεν υφίσταται διαίρεση, άρα αυτές οι τιμές πρέπει να εξαιρεθούν.

Πρέπει: $8x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{8} \Rightarrow$

$A_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{8}\right\}$ ή $A_g = \left(-\infty, \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{8}, +\infty\right)$.

γ) $h(x) = \sqrt{7 - x} + 4x - 1 \Rightarrow$

Η υπόριζη ποσότητα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός. Συνεπώς, πρέπει: $7 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 7 \Rightarrow A_h = (-\infty, 7]$.

δ) $t(x) = \frac{\sqrt{x-3}+4}{x^2-16} \Rightarrow$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε συγχρόνως ρητή συνάρτηση και ρίζα στον αριθμητή. Οπότε, πρέπει να λάβουμε υπόψιν δύο περιορισμούς.

Πρέπει: $\left\{\begin{matrix} x^2 - 16 \neq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ x - 3 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x \neq \pm 4 \\ \kappa\alpha\iota \\ x \geq 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$A_t = [3, +\infty) \setminus \{4\}$ ή $A_f = [3, 4) \cup (4, +\infty)$.

*Σημείωση*:

Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης γενικά το συμβολίζουμε με τα κεφαλαία γράμματα A και D του λατινικού αλφαβήτου.

**Άσκηση 2:**

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

β) $g(x) = \frac{5x-2}{x^2-4x+3}$

γ) $h(x) = \frac{3x+8}{5+|7x-4|}$

δ) $t(x) = x^4 + 3x^3 - \sqrt{7}x^2 + 8x - \eta\mu(45^o)$

**Λύση:**

α) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} \Rightarrow$

Πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι μη αρνητική. Δηλαδή:

$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Rightarrow \varDelta = 25 - 24 = 1 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = 2 \Rightarrow$

Θέλουμε το τριώνυμο να έχει πάντα μη αρνητικό πρόσημο. Αυτό συμβαίνει στα διαστήματα εκτός των ριζών του, όπου θα είναι θετικό και στις ρίζες του, όπου θα μηδενίζεται. Δηλαδή: $A_f = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

β) $g(x) = \frac{5x-2}{x^2-4x+3} \Rightarrow$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \varDelta = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2 = 1 \Rightarrow$

Πρέπει να εξαιρέσουμε τις ρίζες του παρονομαστή, δηλαδή πρέπει:

$x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \{1, 3\} \Rightarrow$

$A_g = \mathbb{R} \backslash \{1, 3\}$ ή $A_g = (-\infty, 1) \cup (1,3) \cup (3, +\infty)$.

γ) $h(x) = \frac{3x+8}{5+|7x-4|} \Rightarrow$

Πρέπει να εξαιρέσουμε τις ρίζες του παρονομαστή.

$5 + |7x - 4| \neq 0 \Leftrightarrow |7x - 4| \neq -5 \Rightarrow$

Η απόλυτη τιμή είναι πάντα μη αρνητική, επομένως, ο παρονομαστής αυτού του κλάσματος δε μηδενίζει ποτέ, αφού είναι πάντα θετικός. Άρα, $A_h = \mathbb{R}$.

δ) $t(x) = x^4 + 3x^3 - \sqrt{7}x^2 + 8x - \eta\mu(45^o) \Rightarrow$

Είναι πολυωνυμική συνάρτηση, επομένως δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός και άρα $A_t = \mathbb{R}$.

**Άσκηση 3:**

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x) = \frac{3-x}{x^5-125x^2}$

β) $g(x) = \frac{x+4}{|6x-7|-8}$

γ) $h(x) = \frac{1-x}{x^5-81x}$

δ) $t(x) = \frac{2}{|x|+x}$

**Λύση:**

α) $f(x) = \frac{3-x}{x^5-125x^2} \Rightarrow$

Είναι κλασματική συνάρτηση, οπότε, θα βρούμε τις ρίζες του παρονομαστή και θα τις εξαιρέσουμε.

$x^5 - 125x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^3 - 125) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} x^2 = 0 \\ \text{ή} \\ x^3 - 125 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ \text{ή} \\ x = \sqrt[3]{125} = 5 \end{Bmatrix} \Rightarrow x \neq 0, 5 \Rightarrow$$

$A_f = \mathbb{R}\setminus\{0, 5\}$ ή $A_f = (-\infty, 0) \cup (0, 5) \cup (5, +\infty)$.

β) $g(x) = \frac{x+4}{|6x-7|-8} \Rightarrow$

Είναι κλασματική συνάρτηση, οπότε θα βρούμε τις ρίζες του παρονομαστή και θα τις εξαιρέσουμε.

$|6x - 7| - 8 = 0 \Rightarrow |6x - 7| = 8 \Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} 6x - 7 = 8 \\ \text{ή} \\ 6x - 7 = -8 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 6x = 15 \\ \text{ή} \\ 6x = -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = \frac{5}{2} \\ \text{ή} \\ x = -\frac{1}{6} \end{Bmatrix} \; x \neq -\frac{1}{6}, \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$A_g = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{6}, \frac{5}{2}\right\}$ ή $A_g = \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

γ) $h(x) = \frac{1-x}{x^5-81x} \Rightarrow$

Είναι κλασματική συνάρτηση, οπότε θα βρούμε τις ρίζες του παρονομαστή και θα τις εξαιρέσουμε.

$x^5 - 81x = 0 \Rightarrow x(x^4 - 81) = 0 \Rightarrow$

$$\left\{\begin{matrix} x = 0 \\ ή \\ x^4 - 81 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ ή \\ x = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \neq -3, 0, 3 \Rightarrow$$

$A_h = \mathbb{R} \backslash \{-3, 0, 3\}$ ή $A_h = (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$ .

δ) $t(x) = \frac{2}{|x|+x} \Rightarrow$

Είναι κλασματική συνάρτηση, οπότε θα βρούμε τις ρίζες του παρονομαστή και θα τις εξαιρέσουμε.

$|x| - x = 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow$

Η απόλυτη τιμή ταυτίζεται με τον εαυτό της μόνο για μη αρνητικές τιμές.

Επομένως, $A_t = [0, +\infty)$.

**Άσκηση 4:**

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x) = \frac{\sqrt{6-x}}{x+2}$

β) $g(x) = \frac{2+\sqrt{x^2-x-6}}{x^3+8}$

γ) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-4|}} + \sqrt{8-|x|}$

δ) $t(x) = \sqrt{|x| + x}$

**Λύση:**

α) $f(x) = \frac{\sqrt{6-x}}{x+2} \Rightarrow$

Έχουμε ρητή συνάρτηση με ριζικό, άρα, θα λάβουμε υπόψιν μας διπλό περιορισμό για το πεδίο ορισμού.

Πρέπει: $\begin{Bmatrix} x+2\neq 0 \\ και \\ 6-x\geq 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x\neq -2 \\ και \\ x\leq 6 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$A_f = (-\infty, 6] \setminus \{-2\}$ ή $A_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 6]$ .

β) $g(x) = \frac{2+\sqrt{x^2-x-6}}{x^3+8} \Rightarrow$

Έχουμε ρητή συνάρτηση με ριζικό, άρα, θα λάβουμε υπόψιν μας διπλό περιορισμό για το πεδίο ορισμού. Πρέπει:

- $x^3+8\neq 0 \Rightarrow x^3\neq -8 \Rightarrow x\neq -\sqrt[3]{|-8|} = -2$
- $x^2-x-6\geq 0 \Rightarrow \quad \Delta = 1+24 = 25 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{1\pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \;\; και \;\; x_2 = -2 \Rightarrow$

Το τριώνυμο θα έχει θετικό πρόσημο στα διαστήματα εκτός των ριζών του και θα μηδενίζει στις ρίζες του. Άρα:

$x^2-x-6\geq 0 \Rightarrow x\in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

Συναληθεύοντας, προκύπτει το συνολικό πεδίο ορισμού.

$A_g = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$ .

γ) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-4|}} + \sqrt{8-|x|} \Rightarrow$

Έχουμε συνάρτηση με κλάσμα και ριζικά. Άρα, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, χρειαζόμαστε διπλό περιορισμό. Πρέπει:

- $\sqrt{|x-4|}\neq 0 \Rightarrow |x-4|\neq 0 \Rightarrow x\neq \{-4, 4\}$
- $|x-4|\geq 0$, που ισχύει πάντα εκ φύσεως της απολύτου τιμής
- $8-|x|\geq 0 \Rightarrow |x|\leq 8 \Rightarrow x\in [-8, 8]$

Συναληθεύοντας προκύπτει το συνολικό πεδίο ορισμού.

$A_h = [-8, 8] \setminus \{-4, 4\}$ ή $A_h = [-8, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, 8]$ .

δ) $t(x) = \sqrt{|x| + x} \quad \Rightarrow$

Πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι μη αρνητική. Άρα:

$$|x| + x \geq 0 \iff |x| \geq -x \iff \begin{Bmatrix} \tau\alpha\upsilon\tau\acute{o}\tau\eta\tau\alpha, & \gamma\iota\alpha \ \ x > 0 \\ \tau\alpha\upsilon\tau\acute{o}\tau\eta\tau\alpha, & \gamma\iota\alpha \ \ x < 0 \end{Bmatrix} \iff$$

Συνεπώς, ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$, οπότε $A_t = \mathbb{R}$.

*Σημείωση*:

Ακόμη και αν σε μια συνάρτηση στην οποία πρέπει να λάβουμε περιορισμό για το πεδίο ορισμού της δεν υπάρχει τελικά πρόβλημα, όπως στην υπόριζη ποσότητα στο ερώτημα (γ), πρέπει να το ελέγξουμε και να το τεκμηριώσουμε.

**Άσκηση 5:**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 11x + 3$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-3),\ f(1)\ \ \kappa\alpha\iota\ \ f(4)$.

γ) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $f(3a)\ \ \kappa\alpha\iota\ \ f(-2a^2)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < -2$.

**Λύση:**

α) $f(x) = 2x^2 - 11x + 3 \ \Rightarrow$

Είναι πολυωνυμική συνάρτηση, επομένως δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός και άρα $A_f = \mathbb{R}$.

β) Για να υπολογίσουμε την τιμή που επιστρέφει μια συνάρτηση για κάποιο στοιχείο του πεδίου ορισμού της, απλώς αντικαθιστούμε στον τύπο της το στοιχείο και υπολογίζουμε.

$f(-3) = 2 * (-3)^2 - 11 * (-3) + 3 = 18 + 33 + 3 = 54$

$f(1) = 2 * 1^2 - 11 * 1 + 3 = 2 - 11 + 3 = -6$

$f(4) = 2 * 4^2 - 11 * 4 + 3 = 32 - 44 + 3 = -9$

γ) $f(3a) = 2*(3\alpha)^2 - 11*(3\alpha) + 3 = 18\alpha^2 - 33\alpha + 3$

$f(-2\alpha^2) = 2*(-2\alpha^2)^2 - 11*(-2\alpha^2) + 3 = 8\alpha^4 + 22\alpha^2 + 3$

δ) $f(x) = -2 \Leftrightarrow\ 2x^2 - 11x + 3 = -2\ \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 5 = 0\ \Rightarrow$

$\Delta = 121 - 40 = 81 > 0\ \Rightarrow\ x_{1,2} = \frac{11 \pm 9}{4} \Rightarrow\ x_1 = 5\ \ \kappa\alpha\iota\ \ x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$

ε) $f(x) < -2 \Leftrightarrow\ 2x^2 - 11x + 3 < -2\ \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 5 < 0\ \Rightarrow$

Ουσιαστικά, θέλουμε το τριώνυμο να έχει αρνητικό πρόσημο. Αυτό συμβαίνει

Στο διάστημα εντός των ριζών του, άρα $x \in \left(\frac{1}{2}, 5\right)$.

**Άσκηση 6:**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-9}{2x^2+6x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

γ) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(2),\ f(-5)\ \ \kappa\alpha\iota\ \ f(12)$.

**Λύση:**

α) $f(x) = \frac{x^2-9}{2x^2+6x}\ \ \ \Rightarrow$

Είναι κλασματική συνάρτηση, άρα θα εξαιρέσουμε τις ρίζες του παρονομαστή.

$2x^2 + 6x \neq 0\ \Rightarrow 2x(x+3) \neq 0\ \Rightarrow x \neq -3, 0\ \Rightarrow$

$A_f = \mathbb{R}\backslash\{-3, 0\}$ ή $A_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, +\infty)$ .

β) $f(x) = \frac{x^2-9}{2x^2+6x} = \frac{(x-3)(x+3)}{2x(x+3)} = \frac{x-3}{2x}$

γ) $f(2) = \frac{2-3}{2*2} = -\frac{1}{4}$

$f(-5) = \frac{-5-3}{2*(-5)} = \frac{-8}{-10} = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $f(12) = \frac{12-3}{2*12} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$

## Σημαντική Παρατήρηση:

Όταν έχουμε κλασματική συνάρτηση, πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της και ύστερα απλοποιούμε. Αν η σειρά δεν είναι αυτή, τότε υπάρχει κίνδυνος να συμπεριλάβουμε τιμές στο πεδίο ορισμού τις οποίες κανονικά πρέπει να τις εξαιρέσουμε. Τα περισσότερα λάθη στις κλασματικές συναρτήσεις οφείλονται στο γεγονός ότι πρώτα γίνεται η απλοποίηση και όχι η εύρεση του πεδίου ορισμού.

**Άσκηση 7:**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+a}{x^4-16}$ για την οποία ισχύει $f(4)=\frac{1}{12}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε το α.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{20}$.

δ) Να λύσετε την ανισότητα $f(x)\geq 0$.

**Λύση:**

α) $f(x)=\frac{x^2+a}{x^4-16} \quad \Rightarrow$

Είναι κλασματική συνάρτηση, οπότε, θα εξαιρέσουμε από το πεδίο ορισμού τις ρίζες του παρονομαστή.

$x^4-16=0 \Leftrightarrow (x^2)^2-4^2=0 \Leftrightarrow (x^2+4)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow$

$(x^2+4)(x+2)(x-2)=0 \xLeftrightarrow{x^2+4\neq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}} x=\pm 2 \Leftrightarrow$

Επομένως, $A_f=\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$ ή $A_f=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

β) $f(4)=\frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{16+a}{256-16}=\frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{16+a}{240}=\frac{1}{12} \Leftrightarrow$

$192+12a=240 \Leftrightarrow 12a=48 \Leftrightarrow a=4 \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+4}{x^4-16}$

γ) $f(x) = \frac{x^2+4}{x^4-16} = \frac{x^2+4}{(x^2+4)(x^2-4)} = \frac{1}{x^2-4} \Rightarrow$

$f(x) = \frac{1}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{20} \Leftrightarrow x^2 - 4 = 20 \Leftrightarrow x^2 = 24 \Leftrightarrow$

$x = \pm\sqrt{24} = \pm\sqrt{4*6} = \pm 2\sqrt{6}$

δ) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow$

Έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις $x = \pm 2$. Επομένως, θα έχει θετικό πρόσημο στα διαστήματα εκτός των ριζών του και θα μηδενίζει σε αυτές.

Άρα: $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

**Άσκηση 8:**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{Bmatrix} 2x + a, & x > -3 \\ x^2 - x + a, & x \leq -3 \end{Bmatrix}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 3$.

α) Να βρείτε το α.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-6), f(-3), f(4)$ $και$ $f(10)$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x(x+1) < f(f(-2))$.

**Λύση:**

α) $f(1) = 3 \Rightarrow$ Επειδή $1 > -3$, θα κοιτάξουμε τον πρώτο κλάδο της συνάρτησης.

$f(1) = 3 \Leftrightarrow 2 + \alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1 \Rightarrow f(x) = \begin{Bmatrix} 2x + 1, & x > -3 \\ x^2 - x + 1, & x \leq -3 \end{Bmatrix}$

β) $f(-6) = (-6)^2 - (-6) + 1 = 36 + 6 + 1 = 43$

$f(-3) = (-3)^2 - (-3) + 1 = 9 + 3 + 1 = 13$

$f(4) = 2 * 4 + 1 = 9$

$f(10) = 2 * 10 + 1 = 21$

γ) $f(-2) = 2 * (-2) + 1 = -4 + 1 = -3 \quad \Rightarrow$

$f\big(f(-2)\big) = f(-3) = 13 \quad \Rightarrow$

$x(x+1) < 13 \Rightarrow x^2 + x < 13 \Rightarrow x^2 + x - 13 < 0 \Rightarrow$

$\Delta = 1 + 4 * 13 = 53 > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-1+\sqrt{53}}{2}$ και $x_2 = \frac{-1-\sqrt{53}}{2} \Rightarrow$

Το τριώνυμο θα έχει αρνητικό πρόσημο εντός του διαστήματος των ριζών του, άρα, $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{53}}{2}, \frac{-1+\sqrt{53}}{2}\right)$.

**Άσκηση 9:**

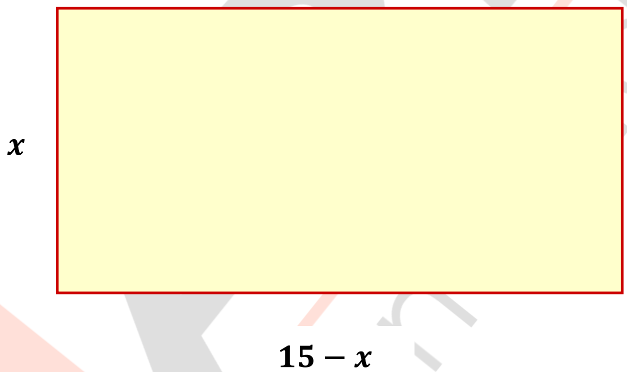
Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 30 μέτρα και πλάτος x μέτρα.

α) Να εκφράσετε το μήκος του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.

γ) Για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του ορθογωνίου ισούται με $36m^2$;

**Λύση:**




α) Το πλάτος του ορθογωνίου είναι ίσο με x και έστω y το μήκος του. Αφού έχει περίμετρο 30 μέτρα, προκύπτει:

$2x + 2y = 30 \Rightarrow x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$

β) $E = xy = x(15 - x) = -x^2 + 15x$

γ) $E = 36 \Leftrightarrow -x^2 + 15x = 36 \Leftrightarrow -x^2 + 15x - 36 = 0 \Leftrightarrow$

$\Delta = 225 - 4 * (-1) * (-36) = 225 - 144 = 81 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 9}{-2} \Rightarrow x_1 = 12$ και $x_2 = 3 \Rightarrow$

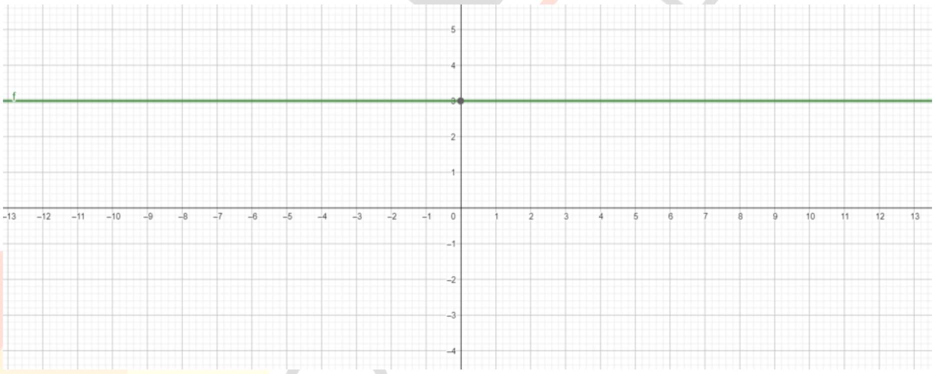
## Γραφικές Παραστάσεις Βασικών Συναρτήσεων:

Πολλές φορές η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μας επιτρέπει να την οπτικοποιήσουμε και να μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα, όπως που μηδενίζει/ποιες είναι οι ρίζες της ή, αν έχει την τάση να πηγαίνει προς τα πάνω η γραφική της παράσταση, δηλαδή, αν η συνάρτηση επιστρέφει συνεχώς όλο και μεγαλύτερες τιμές. Αυτά είναι λίγα μόνο από όλα εκείνα τα χαρακτηριστικά που έχουν οι συναρτήσεις και που θα μάθουμε σταδιακά να μελετούμε. Σε αυτό το κομμάτι θα παραθέσουμε τη γραφική παράσταση κάποιων πολύ βασικών συναρτήσεων που είναι πολύ χρήσιμο να ξέρουμε πώς είναι οι γραφικές τους παραστάσεις.

### «Σταθερή : $f(x) = c, \quad με\ c \in \mathbb{R}$»

Ανάλογα με το πρόσημο του πραγματικού αριθμού βρίσκεται, αν είναι θετικό πάνω από τον άξονα $x'x$, ενώ, αν είναι αρνητικό βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Σε κάθε περίπτωση είναι ευθεία **παράλληλη** στον άξονα $x'x$.

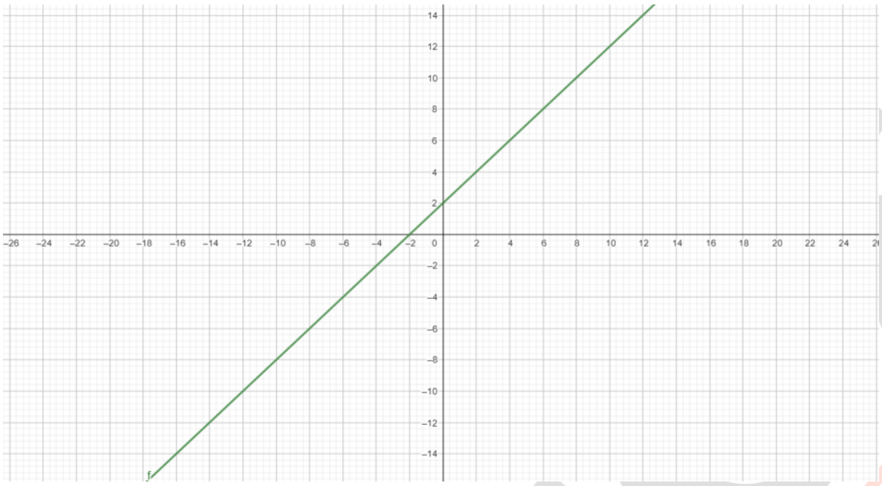
→ $f(x) = 3$



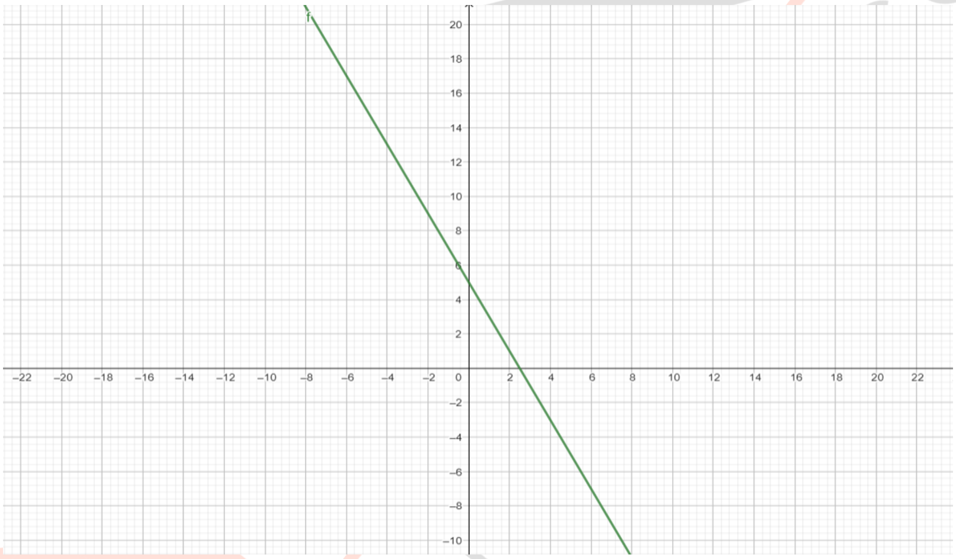

### «Ευθεία : $f(x) = \alpha x + \beta, \quad με\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$»

Ανάλογα με το πρόσημο των α και β, η γραφική παράσταση έχει διαφορετική κατεύθυνση. Το βασικό όμως που πρέπει να μας μείνει, είναι ότι η γραφική παράσταση έχει πάντα τη μορφή ευθείας (άλλωστε, το λέει και το όνομά της). Θα παραθέσουμε δύο παραδείγματα, προκειμένου να μπορέσουμε να οπτικοποιήσουμε τη γραφική παράσταση μιας ευθείας.

→ $f(x) = x + 2$

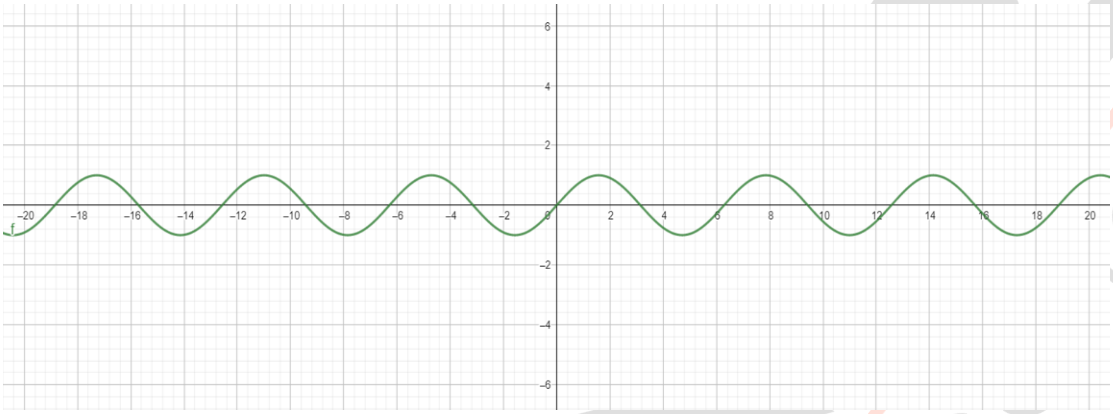

−26 −24 −22 −20 −18 −16 −14 −12 −10 −8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24
14 12 10 8 6 4 2 −2 −4 −6 −8 −10 −12 −14
f

→ $f(x) = -2x + 5$


−22 −20 −18 −16 −14 −12 −10 −8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22
20 18 16 14 12 10 8 6 4 2 −2 −4 −6 −8 −10
f

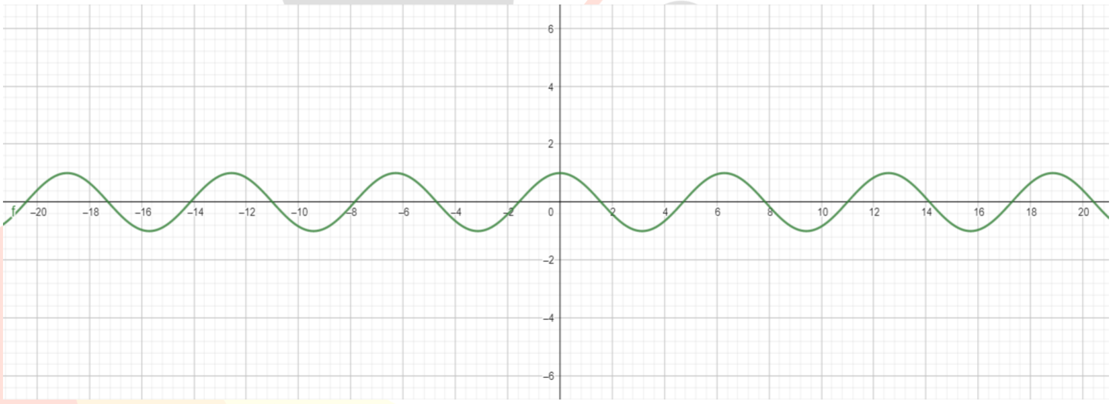
### «Ημίτονο : $f(x) = \eta\mu x \quad \mu\varepsilon \;\; x \in \mathbb{R}$»

Με το ημίτονο αναφερόμαστε στον τριγωνομετρικό αριθμό που έχει κάθε γωνία. Εκτός όμως από τις γωνίες, ημίτονο μπορούμε να ορίσουμε για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό.



### «Συνημίτονο : $f(x) = \sigma\upsilon\nu x \quad \mu\varepsilon \;\; x \in \mathbb{R}$»

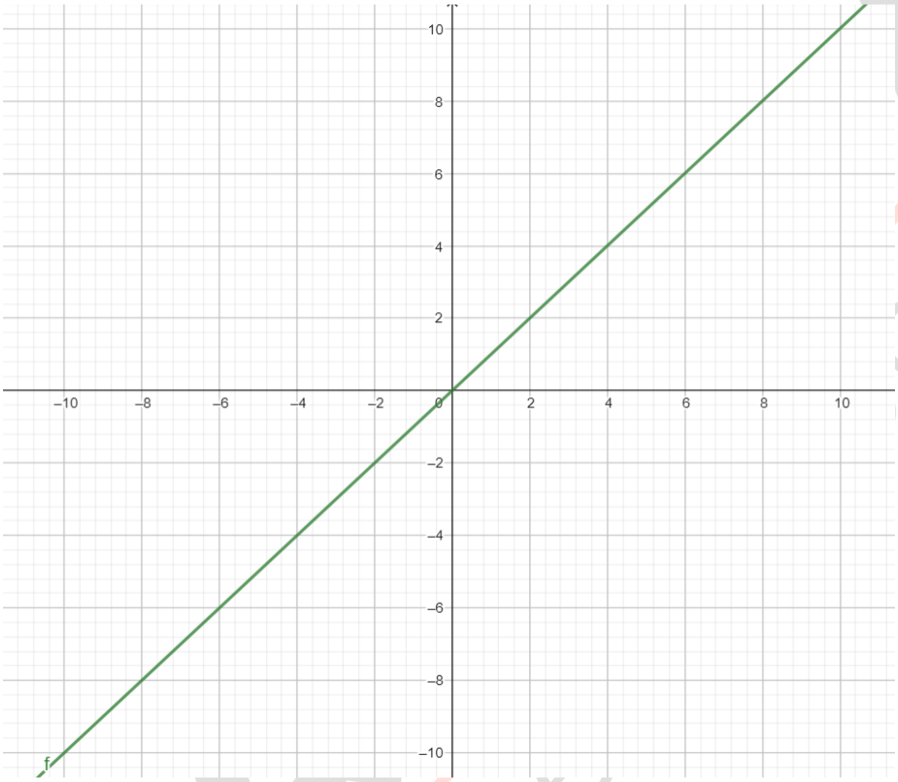
Με το συνημίτονο αναφερόμαστε στον τριγωνομετρικό αριθμό που έχει κάθε γωνία. Εκτός όμως από τις γωνίες, συνημίτονο μπορούμε να ορίσουμε για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό.



Αυτό που αξίζει να σημειωθεί εδώ είναι ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις μοιάζουν εξαιρετικά πολύ, όμως δεν είναι ίδιες. Παρατηρήστε πού μηδενίζει το ημίτονο και πού το συνημίτονο. Επιπλέον, οι γραφικές τους παραστάσεις θυμίζουν κύμα. Τέλος, παρατηρήστε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, η γραφικές παραστάσεις δεν ξεπερνούν τις τιμές 1 και – 1. Πράγματι, για τις συναρτήσεις αυτές ισχύει ΠΑΝΤΑ: $\mathbf{-1 \leq \eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x \leq 1}$.

### «Η ευθεία $y$ ή $f(x) = x$ $με$ $x \in \mathbb{R}$»

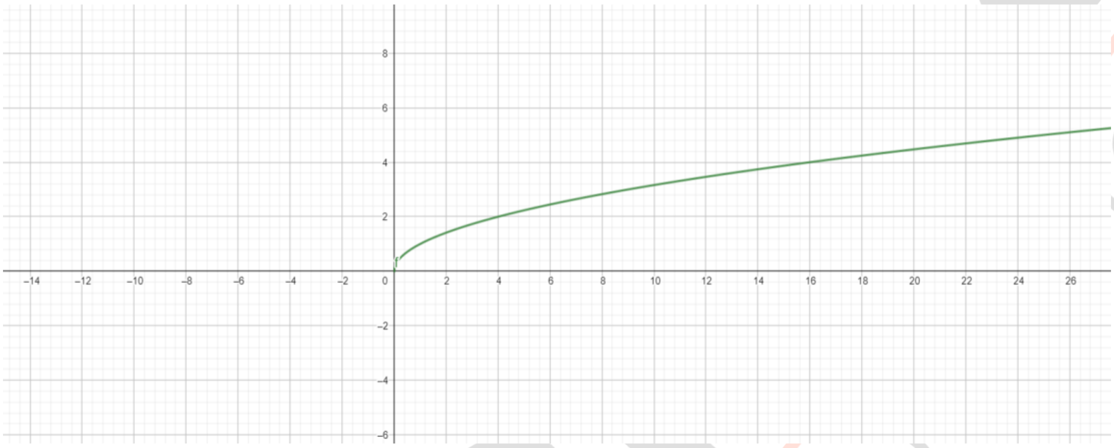
Πρόκειται για την ευθεία όπου η τιμή της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής ταυτίζονται μεταξύ τους. Η ευθεία αυτή ονομάζεται «διχοτόμος του 1ου και 3ου τεταρτημορίου», γιατί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι ίση με $45^o$.




Αντίστοιχα, ορίζεται και η ευθεία **«$f(x) = -x$»** , όπου η ανεξάρτητη και η εξαρτημένη μεταβλητή έχουν αντίθετα πρόσημα και ίση κατ΄ απόλυτη τιμή τιμές. Αντίστοιχα, ονομάζεται «διχοτόμος του 2ου και 4ου τεταρτημορίου», γιατί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι ίση με $45^o$.

### «Η τετραγωνική ρίζα : $f(x) = \sqrt{x}$ $\mu\varepsilon$ $x \in [0, +\infty)$»

Πρόκειται προφανώς για την τετραγωνική ρίζα οποιουδήποτε μη αρνητικού αριθμού, δηλαδή για την τιμή εκείνη, που όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας επιστρέφει την υπόριζη ποσότητα.

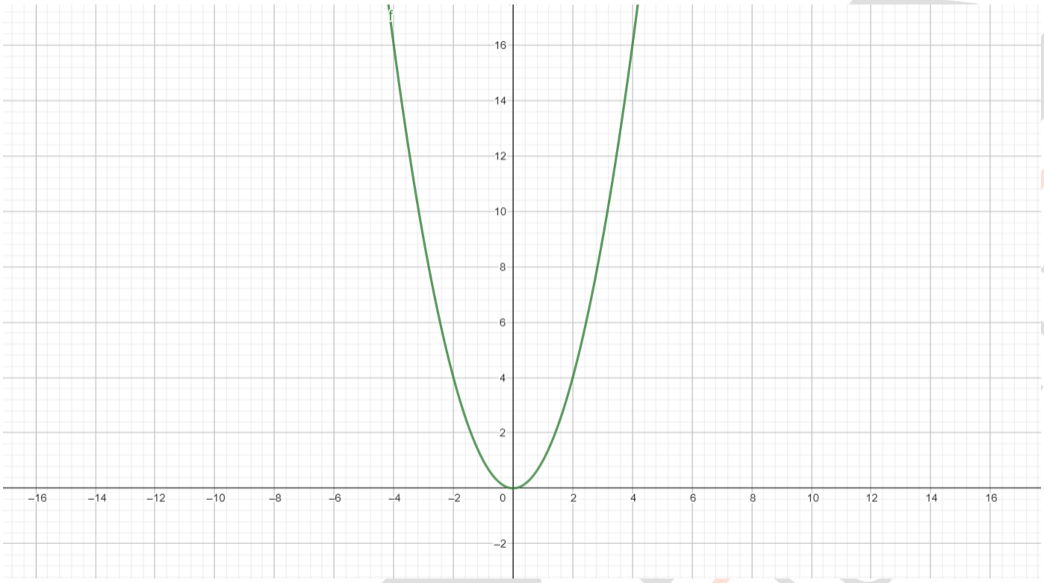



Παρατηρήστε ότι η γραφική παράσταση δε δέχεται ούτε επιστρέφει αρνητικές τιμές. Για αυτό και βρίσκεται εξολοκλήρου στο 1ο τεταρτημόριο, που έχει μόνο θετικές τιμές.

Στο τελευταίο κομμάτι του κεφαλαίου θα παραθέσουμε τις γραφικές παραστάσεις πολύ σημαντικών συναρτήσεων. Με κάποιες από αυτές θα εργαστούμε μεταγενέστερα, όμως η χρησιμότητά τους μαθηματικά είναι τεράστια. Δε θα κάνουμε κάποιο σχόλιο, μόνο θα δείξουμε τη σχηματική τους μορφή.

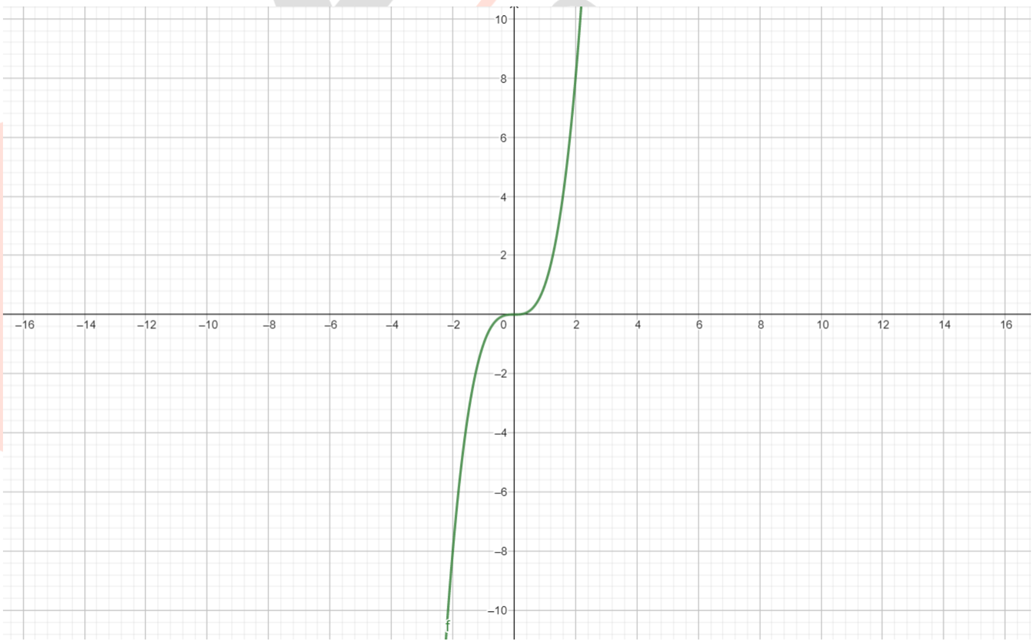
**«Η Παραβολή : $f(x) = \alpha x^2$ με $x, \alpha \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$»**

→ στο παράδειγμα $\alpha = 1$



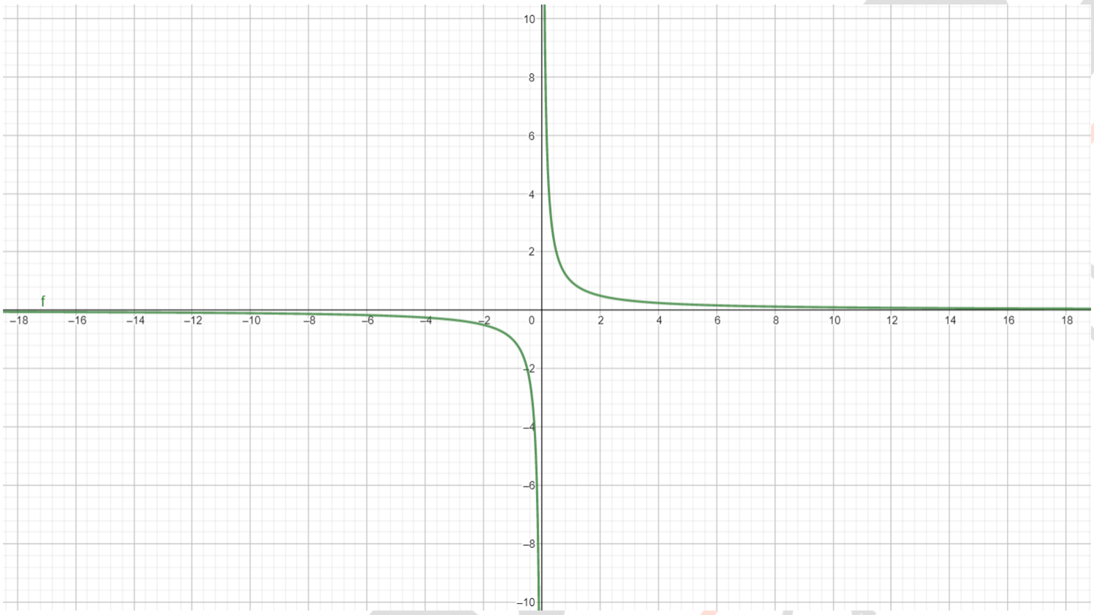

**«Η Κυβική Δύναμη : $f(x) = \alpha x^3$ με $x, \alpha \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$»**

→ στο παράδειγμα $\alpha = 1$

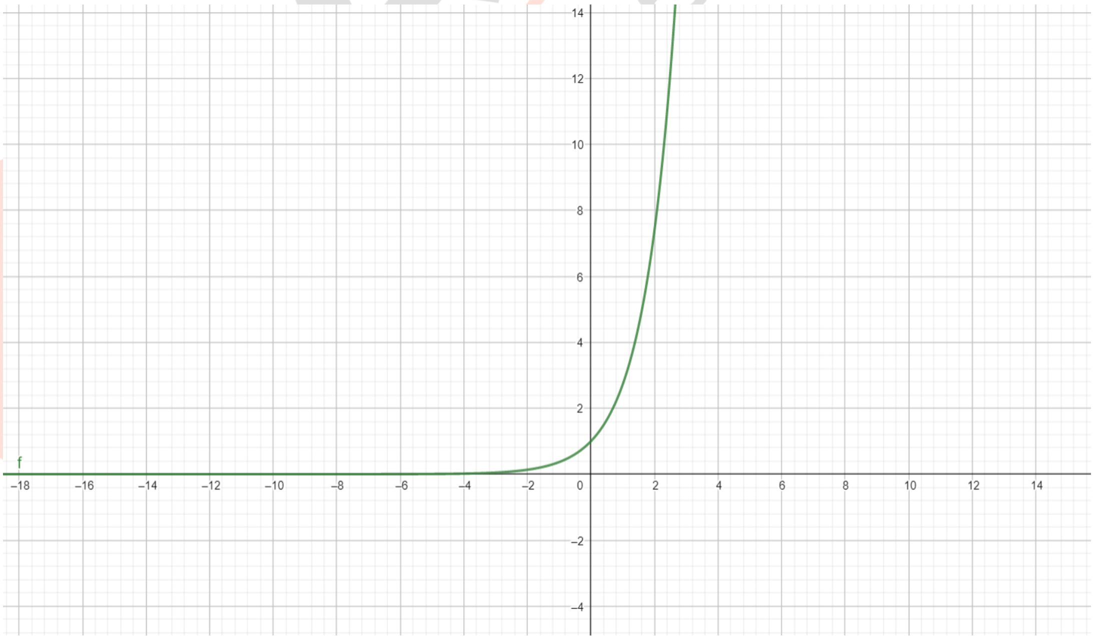


**«Η Υπερβολή : $f(x) = \frac{\alpha}{x}$ $\mu\varepsilon$ $x, \alpha \in \mathbb{R}^*$»**

→ στο παράδειγμα $\alpha = 1$

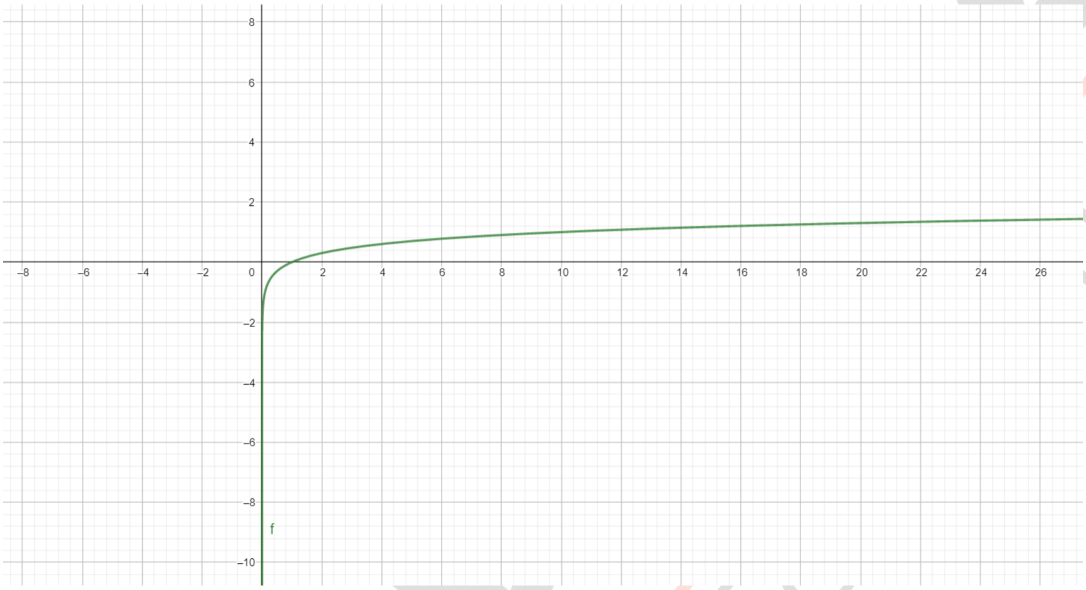



**«Η Εκθετική Συνάρτηση : $f(x) = e^x$ $\mu\varepsilon$ $x \in \mathbb{R}$»**



**«Η Λογαριθμική Συνάρτηση με βάση α : $f(x) = log_a x$ με $x \in (0, +\infty)$ και $\alpha > 1$»**

→ Στο παράδειγμα θα ορίσουμε $\alpha = 10$, που είναι η σημαντικότερη τιμή.




**«Ο Κύκλος : $x^2 + y^2 = R^2$ , όπου $R$ η ακτίνα και $R, x, y \in \mathbb{R}$»**

→ Στο παράδειγμα θα ορίσουμε $R = 4$