Προσδοκώμενοι Στόχοι Ενότητας:

→ Ο/Η μαθητής/τρια θα πρέπει στο πέρας της ενότητας να έχει κατανοήσει σε βάθος:

την έννοια της γεωμετρικής προόδου,
την έννοια του γεωμετρικού μέσου,
την έννοια του αθροίσματος ν το πλήθος διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου,
τις διαδικασίες επίλυσης σύνθετων ασκήσεων.

Συμπλήρωση Κενών:

Σε αυτό το κομμάτι της ενότητας ο/η μαθητής/τρια θα βρει τις παρατηρήσεις, τα κόλπα και τις έξυπνες μεθόδους που χρειάζεται για να καταλάβει πλήρως όλα όσα έμαθε και να καλύψει τυχόντα κενά.

Γεωμετρική Πρόοδος:

Ορισμός:

«Γεωμετρική πρόοδος» καλείται μια ακολουθία, της οποίας κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό πάντα επί του ίδιου αριθμού.

Τον αριθμό αυτόν με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε κάθε φορά τον συμβολίζουμε με το ελληνικό γράμμα **λ** και τον λέμε **«λόγο της προόδου»**.

Επομένως, η ακολουθία α_ν είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, αν και μόνον εάν ισχύει: $\left\{\begin{matrix} \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu * \lambda \\ \text{ή} \\ \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda \end{matrix}\right\}$.

Κάθε γεωμετρική πρόοδος έχει έναν αρχικό όρο, τον οποίο τον συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\alpha_1}$. Αν τον γνωρίζουμε, τότε μπορούμε να υπολογίζουμε οποιονδήποτε όρο της με διαδοχικά βήματα.

Π.χ. : Έστω $\alpha_1 = 4$ και $\lambda = 2$. Τότε, ο κάθε όρος της αριθμητικής προόδου θα διπλασιάζεται. Επομένως, για να βρούμε τον τρίτο όρο, θα βρούμε πρώτα το δεύτερο.

$$\alpha_2 = \alpha_1 * \lambda = 4 * 2 = 8 \Rightarrow$$
$$\alpha_3 = \alpha_2 * \lambda = 8 * 2 = 16$$

Ακόμη, αν θέλαμε να βρούμε τον πέμπτο όρο της προόδου, θα βρίσκαμε σε συνέχεια από τον τρίτο, πρώτα τον τέταρτο και μετά τον πέμπτο. Δηλαδή:

$$\alpha_4 = \alpha_3 * \lambda = 16 * 2 = 32 \Rightarrow$$

$$\alpha_5 = \alpha_4 * \lambda = 32 * 2 = 64$$

Αν εμβαθύνουμε λίγο περισσότερο, θα διαπιστώσουμε ότι ο 3ος όρος απέχει 1 βήμα από το 2ο και 2 βήματα από τον 1ο, ο 4ος όρος απέχει 1 βήμα από τον 3ο και 3 από τον 1ο και τέλος, ο 5ος όρος απέχει 1 βήμα από τον 4ο και 4 από τον 1ο όρο. Η διαδικασία αυτή εξαιτίας της διαδοχικότητας που υπάρχει θα συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο. Συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε τον βασικό τύπο της αριθμητικής προόδου, ο οποίος και είναι:

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha_\nu = \alpha_1 * \lambda^{\nu-1}}}$$

- Δηλαδή, για κάθε όρο χρειαζόμαστε ένα βήμα λιγότερο από όσο υπαγορεύει ο δείκτης του, προκειμένου να τον υπολογίσουμε.

Παραδείγματα:

1) Να βρείτε τον 9ο όρο μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 6$ και $\lambda = 3$.

$$\alpha_\nu = \alpha_1 * \lambda^{\nu-1} \overset{\nu=9}{\Longrightarrow} \alpha_9 = \alpha_1 * \lambda^{9-1} = 6 * 3^8 = 39.366$$

2) Να βρείτε τον 13ο όρο μιας αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 10$ και $\omega = -5$.

$$\alpha_\nu = \alpha_1 * \lambda^{\nu-1} \overset{\nu=13}{\Longrightarrow} \alpha_{13} = \alpha_1 * \lambda^{13-1} = 10 * (-5)^{12} = 2.441.406.260$$

3) Να βρείτε τον 20ο όρο μιας αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 100.000$ και $\omega = \frac{1}{2}$.

$$\alpha_\nu = \alpha_1 * \lambda^{\nu-1} \overset{\nu=20}{\Longrightarrow} \alpha_{20} = \alpha_1 * \lambda^{20-1} = 100.000 * \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{3.125}{16.384}$$

Παρατηρήσεις:

Μια γεωμετρική πρόοδος μπορεί να έχει κλασματικό λόγο. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι οι όροι της διαιρούνται διαδοχικά κατά μία σταθερή ποσότητα.

Δεν μπορούμε να ορίσουμε όρο γεωμετρικής προόδου με αρνητικό δείκτη, λόγου χάριν όρο α_{-7}. Δεν ξεχνάμε ότι η γεωμετρική πρόοδος είναι κατ΄ ουσίαν ακολουθία, επομένως, έχει πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς.

Η γεωμετρική πρόοδος ως ακολουθία έχει πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε άπειρους σε πλήθος όρους. Δηλαδή, οι όροι μιας γεωμετρικής προόδου δεν τελειώνουν ποτέ.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Αν γνωρίζετε τον πρώτο όρο και το λόγο, υπολογίστε τον γενικό τύπο των παρακάτω γεωμετρικών προόδων.

α) $\alpha_1 = 6$ και $\omega = 2$

β) $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 7$

γ) $\alpha_1 = -3$ και $\omega = -3$

Λύση:

α) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \overset{\substack{\alpha_1=6\\ \omega=2}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = 6 * 2^{\nu-1} = 6 * \frac{2^\nu}{3} = 3 * 2^\nu$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \overset{\substack{\alpha_1=2\\ \omega=7}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = 2 * 7^{\nu-1} = 2 * \frac{7^\nu}{7} = \frac{2}{7} * 7^\nu$

γ) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \overset{\substack{\alpha_1=-3\\ \omega=-3}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = (-3) * (-3)^{\nu-1} = (-3)^\nu$

Άσκηση 2:

Να υπολογίσετε τον 6ο όρο των παρακάτω γεωμετρικών προόδων.

α) $\alpha_1 = 5$ και $\omega = \frac{3}{2}$

β) $\alpha_1 = 13$ και $\omega = 2$

γ) 3,6,12, …

Λύση:

α) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \overset{\substack{\alpha_1=5\\ \omega=\frac{3}{2}\\ \nu=6}}{\Longleftrightarrow} \alpha_6 = 5 * \left(\frac{3}{2}\right)^{6-1} = \frac{1215}{32}$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \overset{\substack{\alpha_1=13\\ \omega=2\\ \nu=6}}{\Longleftrightarrow} \alpha_6 = 13 * 2^{6-1} = 416$

γ) 3,6,12, … $\Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 3 \\ \lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{6}{3} = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \overset{\substack{\alpha_1=3 \\ \omega=2 \\ \nu=6}}{\Longleftrightarrow} \alpha_6 = 3 * 2^{6-1} = 96$$

Άσκηση 3:

Σε μια γεωμετρική πρόοδο α_ν ισχύει $\alpha_1 = 14$ και $\omega = 3$.

α) Να βρείτε τον 8ο όρο της προόδου.

β) Ποιος όρος της προόδου ισούται με 275.562;

Λύση:

α) $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \overset{\substack{\alpha_1=14 \\ \omega=3}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = 14 * 3^{\nu-1} = \frac{14}{3} * 3^\nu \Rightarrow$

$$\alpha_8 = \frac{14}{3} * 3^8 = 30.618$$

β) Σύμφωνα με το (α) ερώτημα, $\alpha_\nu = \frac{14}{3} * 3^\nu \Rightarrow$

$$\alpha_\nu = 275.562 \Rightarrow \frac{14}{3} * 3^\nu = 275.562 \Rightarrow 3^\nu = 59.049 = 3^{10} \Rightarrow \nu = 10$$

Συνεπώς, ο 10ος όρος ισούται με 275.562.

Άσκηση 4:

Έστω γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_6 = 196.608$.

α) Να υπολογίσετε το λόγο της προόδου.

β) Να υπολογίσετε τον 8ο όρο.

γ) Ποιος όρος της προόδου ισούται με 3.072;

Λύση:

α) $\begin{Bmatrix} \alpha_1 = 6 \\ \alpha_6 = \alpha_1 * \lambda^{6-1} \end{Bmatrix} \Rightarrow \alpha_6 = \alpha_1 * \lambda^5 \Rightarrow$

$$196.608 = 6 * \lambda^5 \Rightarrow \lambda^5 = 32.768 = 8^5 \Rightarrow \lambda = 8$$

Συνεπώς, η γεωμετρική πρόοδος ορίζεται ως:

$\alpha_\nu = 6 * 8^{\nu-1} = 6 * \frac{8^\nu}{8} \Rightarrow \alpha_\nu = \frac{3}{4} * 8^\nu$

β) Από (α) ερώτημα έχουμε $\alpha_\nu = \frac{3}{4} * 8^\nu$. Επομένως:

$\alpha_\nu = \frac{3}{4} * 8^\nu \overset{\nu=8}{\Longrightarrow} \alpha_8 = \frac{3}{4} * 8^8 \Rightarrow \alpha_8 = 12.582.912$

γ) $\alpha_\nu = 3.072 \Rightarrow \frac{3}{4} * 8^\nu = 3.072 \Rightarrow 8^\nu = 4.096 \Rightarrow \nu = 4$

Συνεπώς, ο 4ος όρος ισούται με 4.096.

Σημείωση :

Όταν σε μια γεωμετρική πρόοδο φτάνουμε σε ένα σημείο της μορφής $8^\nu = 4.096$, προσπαθούμε να γράψουμε τον αριθμό 4.096 ως δύναμη με βάση το 8. Αν δεν έχουμε κάνει κάποιο λάθος υπολογισμό, τότε σίγουρα ο αριθμός που βρίσκεται στο δεξί μέλος της ισότητας θα γράφεται ως δύναμη με βάση το 8. Προφανώς, για να βρούμε το σωστό ν, κάνουμε δοκιμές.

Άσκηση 5:

Έστω γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_8 = -81.920$ και $\lambda = -4$.

α) Να υπολογίσετε τον πρώτο όρο της προόδου.

β) Να υπολογίσετε τον 5ο όρο.

γ) Ποιος όρος της προόδου ισούται με 5.242.880;

Λύση:

α) $\alpha_8 = \alpha_1 * \lambda^7 \Leftrightarrow -81.920 = \alpha_1 * (-4)^7 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{-81.920}{-16.384} = 5$

Συνεπώς, η γεωμετρική πρόοδος ορίζεται ως:

$\alpha_\nu = 5 * (-4)^{\nu-1} \Rightarrow \alpha_\nu = -\frac{5}{4} * (-4)^\nu$

β) $\alpha_5 = \alpha_1 * \lambda^4 = 5 * (-4)^4 = 1280$

γ) Από (α) ερώτημα έχουμε $\alpha_\nu = -\frac{5}{4} * (-4)^\nu$. Επομένως:

$\alpha_\nu = 5.242.880 \Rightarrow -\frac{5}{4} * (-4)^\nu = 5.242.880 \Rightarrow (-4)^\nu = -4.194.30 =$

$(-4)^{11} \Rightarrow \nu = 11.$ Συνεπώς, ο $11^{ος}$ όρος ισούται με 5.242.880.

Παρατήρηση:

Για να υπολογίσουμε τον τύπο μιας γεωμετρικής προόδου δεν είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε ταυτόχρονα και τον πρώτο όρο της και το λόγο της. Αν γνωρίζουμε έστω το ένα από τα δύο και κάποιον όρο της, μπορούμε να υπολογίσουμε την άλλη έννοια που μας λείπει. Επίσης, μπορούμε να υπολογίσουμε τον τύπο της και χωρίς να ξέρουμε ούτε τον πρώτο όρο ούτε το λόγο της. Αυτή η περίπτωση θα δειχθεί στο κομμάτι των σύνθετων ασκήσεων.

Γεωμετρικός Μέσος:

Ορισμός:

«Γεωμετρικός μέσος» ονομάζεται ο αριθμός $\beta^2 = \alpha\gamma$, αν και μόνον εάν οι αριθμοί α, β, γ είναι μη μηδενικοί και αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ο αριθμός β καλείται γεωμετρικός μέσος των α και γ.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Να υπολογίσετε το γεωμετρικό μέσο σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

α) $2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ 8$ β) $6 \ \kappa\alpha\iota \ 24$ γ) $2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ 32$

Λύση:

Έστω β ο γεωμετρικός μέσος σε κάθε περίπτωση.

α) $2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ 8 \Rightarrow \beta^2 = 2 * 8 = 16 \Rightarrow \beta = \sqrt{16} = 4$

β) $6 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ 24 \Rightarrow \beta^2 = 6 * 24 = 144 \Rightarrow \beta = \sqrt{144} = 12$

γ) $2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ 32 \Rightarrow \beta^2 = 2 * 32 = 64 \Rightarrow \beta = \sqrt{64} = 8$

Άσκηση 2:

Να βρείτε για τιμή του πραγματικού αριθμού κ οι παρακάτω όροι αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

$\kappa - 3\,,\ 2\kappa\,,\ 10\kappa - 12$

Λύση:

Αφού οι δοθέντες αριθμοί αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, συμπεραίνουμε ότι θα ικανοποιούν τη συνθήκη του γεωμετρικού μέσου:

$(2\kappa)^2 = (\kappa - 3)(10\kappa - 12) \ \Leftrightarrow$

$4\kappa^2 = 10\kappa^2 - 30\kappa - 12\kappa + 36 \Leftrightarrow 6\kappa^2 - 42\kappa + 36 = 0 \Leftrightarrow$

$\kappa^2 - 7\kappa + 6 = 0 \ \Rightarrow \ \ \Delta = 49 - 24 = 25 > 0 \Rightarrow$

$$\kappa_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2} \Rightarrow \kappa_1 = 6 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \kappa_2 = 1$$

Για $\kappa_1 = 6$ προκύπτει η γεωμετρική πρόοδος $\ldots 3, 12, 48, \ldots$ δηλαδή γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = 4$.

Για $\kappa_2 = 1$ προκύπτει η γεωμετρική πρόοδος $\ldots -2, 2, -2, \ldots$ δηλαδή γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = -1$.

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου:

Ορισμός:

Το άθροισμα των πρώτων ν το πλήθος όρων αριθμητικής προόδου α_ν με λόγο $\lambda \neq 1$ ορίζεται ως:

$$\boldsymbol{S_\nu = \frac{\alpha_\nu * \lambda - \alpha_1}{\lambda - 1}}$$

Ή

$$\boldsymbol{S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}}$$

Αν για το λόγο ισχύει $\lambda = 1$, τότε

$$\boldsymbol{S_\nu = \nu * \alpha_1}$$

Σημείωση :

Γενικά, όταν πρόκειται να υπολογίσουμε άθροισμα διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου, χρησιμοποιούμε κατά κόρον το δεύτερο τύπο.

Παραδείγματα:

1) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 17 πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με

$\alpha_1 = 2$ και $\lambda = 3$.

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \overset{\substack{\alpha_1 = 2 \\ \lambda = 3 \\ \nu = 17}}{\iff} S_{17} = 2\frac{3^{17} - 1}{3 - 1} = 129.140.162$$

2) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 8 πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με

$\alpha_1 = 15$ και $\omega = -5$.

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \xLeftrightarrow{\substack{\alpha_1=15\\ \lambda=-5\\ \nu=8}} S_8 = 15\frac{(-5)^8-1}{-5-1} = -976.560$$

3) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 12 πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με

$\alpha_1 = 1.000$ και $\omega = \frac{1}{2}$.

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \xLeftrightarrow{\substack{\alpha_1=1.000\\ \lambda=\frac{1}{2}\\ \nu=12}} S_{12} = 1.000\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}-1}{\frac{1}{2}-1} = -2.000\left[\frac{1}{2^{12}} - 1\right] =$$

$$2.000 - \frac{2.000}{2^{12}} = 2.000 - \frac{2^4 * 125}{2^{12}} = 2.000 - \frac{125}{2^8} = \frac{511.875}{256}$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Να βρείτε το άθροισμα των 7 πρώτων όρων των παρακάτω γεωμετρικών προόδων.

α) $2, 18, 162, \ldots$

β) $-3, -33, -363, \ldots$

Λύση:

α) $2, 18, 162 \ldots \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 2 \\ \lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{18}{2} = 9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \xLeftrightarrow{\substack{\alpha_1=2\\ \lambda=9\\ \nu=7}} S_7 = 2\frac{9^7-1}{9-1} = 4.185.097$$

β) $-3, -33, -363 \ldots \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = -3 \\ \lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{-33}{-3} = 11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \xLeftrightarrow{\substack{\alpha_1=-3\\ \lambda=11\\ \nu=7}} S_7 = -3\frac{11^7-1}{11-1} = -5.846.151$$

Άσκηση 2:

Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα.

α) $4 + 32 + 256 + \cdots + 131.072$

β) $-1 + 2 - 4 \ldots + 2.147.483.648$

γ) $3 + 30 + 300 + \cdots + 3.000.000.000$

δ) $7 + 35 + 135 + \cdots 1.708.984.375$

Λύση:

α) $4 + 32 + 256 + \cdots + 131.072 \Rightarrow$

Πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με $\left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 4 \\ \lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{32}{4} = 8 \end{matrix}\right\}$.

Επειδή δε γνωρίζουμε σε ποιον όρο αντιστοιχεί το 131.072, (δηλαδή, αν είναι ο 5ος, ο 9ος, ο 12ος κλπ.), για να υπολογίσουμε το δοθέν άθροισμα πρέπει πρώτα να βρούμε τη σειρά του τελευταίου όρου στην πρόοδο.

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \overset{\substack{\alpha_1=4 \\ \lambda=8}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = 4 * 8^{\nu-1} = \frac{4}{8} * 8^\nu = \frac{1}{2} * 8^\nu \Rightarrow$$

$$\alpha_\nu = 131.072 \Leftrightarrow \frac{1}{2} * 8^\nu = 131.072 \Leftrightarrow 8^\nu = 262.144 = 8^6 \Leftrightarrow \nu = 6$$

Άρα, πρόκειται για τον 6ο όρο της αριθμητικής προόδου.

Επομένως: $S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \overset{\substack{\alpha_1=4 \\ \lambda=8 \\ \nu=6}}{\Longleftrightarrow} S_6 = 4 \frac{8^6-1}{8-1} = 149.796$

β) $-1 + 2 - 4 \ldots + 2.147.483.648 \Rightarrow$

Πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με $\left\{\begin{matrix} \alpha_1 = -1 \\ \lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{2}{-1} = -2 \end{matrix}\right\}$.

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \overset{\substack{\alpha_1=-1 \\ \lambda=-2}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = (-1) * (-2)^{\nu-1} = \frac{1}{2} * (-2)^\nu \Rightarrow$$

$$\alpha_\nu = 2.147.483.648 \Leftrightarrow \frac{1}{2} * (-2)^\nu = 2.147.483.648 \Leftrightarrow$$

$(-2)^{\nu} = 4.294.967.296 = 2^{32} \Leftrightarrow \nu = 32$

Άρα, πρόκειται για τον 32ο όρο της αριθμητικής προόδου.

Επομένως: $S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \overset{\substack{\alpha_1=-1\\ \lambda=-2\\ \nu=32}}{\Longleftrightarrow} S_{32} = -\frac{(-2)^{32}-1}{-2-1} = 1.431.655.765$

γ) $3 + 30 + 300 + \cdots + 3.000.000.000 \Rightarrow$

Πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με $\left\{ \begin{matrix} \alpha_1 = 3 \\ \lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{30}{3} = 10 \end{matrix} \right\}$.

$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \overset{\substack{\alpha_1=3\\ \lambda=10}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = 3 * 10^{\nu-1} = \frac{3}{10} * 10^\nu \Rightarrow$

$\alpha_\nu = 3.000.000.000 \Leftrightarrow \frac{3}{10} * 10^\nu = 3.000.000.000 \Leftrightarrow$

$10^\nu = 10.000.000.000 = 10^{10} \Leftrightarrow \nu = 10$

Άρα, πρόκειται για τον 10ο όρο της αριθμητικής προόδου.

Επομένως: $S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \overset{\substack{\alpha_1=3\\ \lambda=10\\ \nu=10}}{\Longleftrightarrow} S_{10} = 3 \frac{10^{10}-1}{10-1} = 3.333.333.333$

δ) $7 + 35 + 135 + \cdots 1.708.984.375 \Rightarrow$

Πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με $\left\{ \begin{matrix} \alpha_1 = 7 \\ \lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{35}{7} = 5 \end{matrix} \right\}$.

$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \overset{\substack{\alpha_1=7\\ \lambda=5}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = 7 * 5^{\nu-1} = \frac{7}{5} * 5^\nu \Rightarrow$

$\alpha_\nu = 1.708.984.375 \Leftrightarrow \frac{7}{5} * 5^\nu = 1.708.984.375 \Leftrightarrow$

$5^\nu = 1.220.703.125 = 5^{13} \Leftrightarrow \nu = 13$

Άρα, πρόκειται για τον 13ο όρο της αριθμητικής προόδου.

Επομένως: $S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \overset{\substack{\alpha_1=7\\ \lambda=5\\ \nu=13}}{\Longleftrightarrow} S_{13} = 7 \frac{5^{13}-1}{5-1} = 2.136.230.467$

Σύνθετες Λυμένες Ασκήσεις

Σε αυτό το κομμάτι της ενότητας, θα δούμε πώς χειριζόμαστε πιο δύσκολες και σύνθετες ασκήσεις στις γεωμετρικές προόδους. Αυτό που πρέπει να θυμόμαστε είναι ότι σε κάθε περίπτωση δουλεύουμε με τους τύπους που ξέρουμε ήδη και τίποτα περισσότερο. Αυτό που απαιτείται απλώς είναι μια πιο σύνθετη σκέψη.

Άσκηση 1:

Να υπολογίσετε το άθροισμα των 20 πρώτων θετικών δυνάμεων του φυσικού αριθμού 2.

Λύση:

Σε μια τέτοιου είδους άσκηση, η εκφώνηση μας δίνει έμμεσα τον πρώτο όρο και το λόγο της γεωμετρικής προόδου. Στην προκειμένη περίπτωση, αφού μας ενδιαφέρουν οι πρώτες 20 θετικές δυνάμεις του 2, καταλαβαίνουμε αρχικά ότι πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο και μάλιστα με λόγο 2, αφού η κάθε δύναμη είναι διπλάσια από την προηγούμενή της. Επίσης, ο πρώτος όρος θα είναι ο αριθμός 2. Άρα:

$$S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} \overset{\substack{\alpha_1=2 \\ \lambda=2 \\ \nu=20}}{\Longleftrightarrow} S_{20} = 2\frac{2^{20}-1}{2-1} = 2.097.150$$

Άσκηση 2:

Δίνεται αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 4$ και $\lambda = 4$. Να υπολογίσετε το άθροισμα $1.024 + 4.096 + 16.384 + \cdots + 4.194.304$.

Λύση:

Αρχικά, συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για τις δυνάμεις του 4. Συνεπώς, έχουμε τη γεωμετρική πρόοδο $\alpha_\nu = 4^\nu$ (ή αλλιώς $\alpha_\nu = 4 * 4^{\nu-1} = 4^\nu$).

Παρατηρούμε ότι δε μας ζητείται να υπολογίσουμε το άθροισμα από τον πρώτο όρο μέχρι κάποιον άλλο, αλλά από έναν ενδιάμεσο. Σε μια τέτοια περίπτωση, υπολογίζουμε το άθροισμα από τον αρχικό όρο της προόδου μέχρι τον τελευταίο όρο στο άθροισμα που μας ζητείται και από αυτό αφαιρούμε το άθροισμα από τον αρχικό όρο της προόδου μέχρι τον ενδιάμεσο.

Αρχικά, υπολογίζουμε τον τελευταίο όρο που θα συμπεριλάβουμε στο άθροισμα.

$\alpha_\nu = 4.194.304 \Rightarrow 4^\nu = 4.194.304 \Rightarrow \nu = 11 \Rightarrow$

Άρα, ο τελευταίος όρος που θα συμπεριλάβουμε στο άθροισμά μας είναι ο 11ος.

Κάνουμε δοκιμές για διάφορες τιμές του εκθέτη, μέχρι να προκύψει ο σωστός.

Εν συνεχεία, υπολογίζουμε τον ενδιάμεσο όρο.

$\alpha_\nu = 1.024 \Rightarrow 4^\nu = 1.024 = 4^5 \Rightarrow \nu = 5 \Rightarrow$

Επομένως, τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τα δύο αθροίσματα που μας ενδιαφέρουν. Για το άθροισμα των όρων μέχρι πριν τον ενδιάμεσο προσθέτουμε έναν όρο λιγότερο.

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \overset{\substack{\alpha_1=4\\ \lambda=4\\ \nu=4}}{\iff} S_4 = 4\frac{4^4-1}{4-1} = 340$$

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \overset{\substack{\alpha_1=4\\ \lambda=4\\ \nu=11}}{\iff} S_{11} = 4\frac{4^{11}-1}{4-1} = 5.592.404$$

Επομένως, $1.024 + 4.096 + 16.384 + \cdots + 4.194.304 = S_{11} - S_4 \Rightarrow$

$1.024 + 4.096 + 16.384 + \cdots + 4.194.304 = 5.592.404 - 340 \Rightarrow$

$1.024 + 4.096 + 16.384 + \cdots + 4.194.304 = 5.592.064$

Άσκηση 3:

Σε μια γεωμετρική πρόοδο ισχύει $\alpha_3 = 36$ και $\alpha_6 = 972$.

α) Να υπολογίσετε τον πρώτο όρο της προόδου, καθώς και το λόγο της.

β) Βρείτε το γενικό τύπο της προόδου.

γ) Υπολογίστε το άθροισμα $S = a_2 + a_8 + a_{11} + a_{14} + a_{19}$.

Λύση:

α) $\begin{Bmatrix} \alpha_3 = 36 \\ \alpha_6 = 972 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 * \lambda^2 = 36 \\ \alpha_1 * \lambda^5 = 972 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^3} = \frac{36}{972} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \lambda^3 = 27 \Rightarrow \lambda = 3$

$\alpha_1 * \lambda^2 = 36 \overset{\lambda=3}{\iff} \alpha_1 = \frac{36}{9} = 4$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1} \overset{\alpha_1=4}{\underset{}{\overset{\lambda=3}{\Longleftrightarrow}}} \alpha_\nu = 4 * 3^{\nu-1} = \frac{4}{3} * 3^\nu$

γ) $S = a_2 + a_8 + a_{11} + a_{14} + a_{44} =$

$(\alpha_1 * \lambda) + (\alpha_1 * \lambda^7) + (\alpha_1 * \lambda^{10}) + (\alpha_1 * \lambda^{13}) + (\alpha_1 * \lambda^{18}) =$

$(4 * 3) + (4 * 2.187) + (4 * 59.049) + (4 * 1.594.323) + (4 * 387.420.489) =$

$12 + 8.748 + 236.196 + 6.377.292 + 1.549.681.956 \Rightarrow \quad S = 1.556.304.204$

Άσκηση 4:

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x + 2\lambda - 12 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η δοθείσα εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

β) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι αριθμοί $-x_1 x_2,\ \ x_1 +\ x_2\ \ και\ \frac{1}{2}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

Λύση:

α) $x^2 + \lambda x + 2\lambda - 12 = 0 \ \Rightarrow$

$\lambda^2 - 4(2\lambda - 12) = \lambda^2 - 8\lambda + 48 \ \Rightarrow$

Στη μορφή που βρίσκεται το τριώνυμο δεν μπορούμε να συμπεράνουμε το πρόσημο του. Θα υπολογίσουμε επομένως, τη δική τού διακρίνουσα.

$\Delta' = 64 - 192 = -128 < 0 \Rightarrow$

Συνεπώς, το τριώνυμο $\lambda^2 - 8\lambda + 48$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε πραγματική τιμή και μάλιστα το πρόσημό του θα είναι ομόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, δηλαδή θετικό. Άρα, το αρχικό τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες, γιατί η διακρίνουσά του είναι θετική.

β) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης. Αφού οι αριθμοί $-x_1 x_2,\ \ x_1 +\ x_2\ \ και\ \frac{1}{2}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, θα ικανοποιούν την ιδιότητα του γεωμετρικού μέσου. Για αρχή όμως, θα υπολογίσουμε τους αριθμούς αυτούς.

Από τους τύπους του Vieta, ξέρουμε ότι :

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \ x^2 - Sx + P = \ x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$

Επομένως, $x_1 + x_2 = -\lambda$ και $x_1 x_2 = 2\lambda - 12$. Άρα, οι όροι της γεωμετρικής προόδου είναι οι εξής: $12 - 2\lambda,\ -\lambda,\ \kappa\alpha\iota\ \frac{1}{2}$. Οπότε:

$(-\lambda)^2 = (12 - 2\lambda) * \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda^2 = -\lambda + 6 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \ \varDelta = 1 + 24 = 25 > 0 \Rightarrow$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 2 \ \kappa\alpha\iota \ \lambda_2 = -3.$

Για $\lambda_1 = 2$, προκύπτει: $\left\{ \begin{matrix} x_1 + x_2 = -\lambda = -2 \\ \text{και} \\ -x_1 x_2 = 12 - 4 = 8 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$

Οι όροι $8, -2\ \kappa\alpha\iota\ \frac{1}{2}$ είναι πράγματι όροι γεωμετρικής προόδου και μάλιστα με λόγο $\lambda = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$.

Για $\lambda_2 = -3$, προκύπτει: $\left\{ \begin{matrix} x_1 + x_2 = -\lambda = 3 \\ \text{και} \\ -x_1 x_2 = 12 - 2 * (-3) = 18 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$

Οι όροι $18, 3\ \kappa\alpha\iota\ \frac{1}{2}$ είναι πράγματι όροι γεωμετρικής προόδου και μάλιστα με λόγο $\lambda = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.