Προσδοκώμενοι Στόχοι Ενότητας:

→ Ο/Η μαθητής/τρια θα πρέπει στο πέρας της ενότητας να έχει κατανοήσει σε βάθος:

- την έννοια της αριθμητικής προόδου,
- την έννοια του αριθμητικού μέσου,
- την έννοια του αθροίσματος ν το πλήθος διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου,
- τις διαδικασίες επίλυσης σύνθετων ασκήσεων.

Συμπλήρωση Κενών:

Σε αυτό το κομμάτι της ενότητας ο/η μαθητής/τρια θα βρει τις παρατηρήσεις, τα κόλπα και τις έξυπνες μεθόδους που χρειάζεται για να καταλάβει πλήρως όλα όσα έμαθε και να καλύψει τυχόντα κενά.

Αριθμητική Πρόοδος:

Ορισμός:

«Αριθμητική πρόοδος» καλείται μια ακολουθία, της οποίας κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση πάντα του ίδιου αριθμού.

- Τον αριθμό αυτόν που προσθέτουμε κάθε φορά τον συμβολίζουμε με το ελληνικό γράμμα **ω** και τον λέμε **«διαφορά της προόδου»**.

Επομένως, η ακολουθία α_ν είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, αν και μόνον εάν ισχύει: $\left\{\begin{matrix} \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega \\ \text{ή} \\ \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega \end{matrix}\right\}$.

- Κάθε αριθμητική πρόοδος έχει έναν αρχικό όρο, τον οποίο τον συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\alpha_1}$. Αν τον γνωρίζουμε, τότε μπορούμε να υπολογίζουμε οποιονδήποτε όρο της με διαδοχικά βήματα.

Π.χ. : Έστω $\alpha_1 = 5$ και $\omega = 3$. Τότε, ο κάθε όρος της αριθμητικής προόδου θα αυξάνεται κατά 3. Επομένως, για να βρούμε τον τρίτο όρο, θα βρούμε πρώτα το δεύτερο.

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega = 5 + 3 = 8 \ \Rightarrow$$
$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega = 8 + 3 = 11$$

- Ακόμη, αν θέλαμε να βρούμε τον πέμπτο όρο της προόδου, θα βρίσκαμε σε συνέχεια από τον τρίτο, πρώτα τον τέταρτο και μετά τον πέμπτο. Δηλαδή:

$$\alpha_4 = \alpha_3 + \omega = 11 + 3 = 14 \ \Rightarrow$$

$$\alpha_5 = \alpha_4 + \omega = 14 + 3 = 17$$

Αν εμβαθύνουμε λίγο περισσότερο, θα διαπιστώσουμε ότι ο 3ος όρος απέχει 1 βήμα από το 2ο και 2 βήματα από τον 1ο, ο 4ος όρος απέχει 1 βήμα από τον 3ο και 3 από τον 1ο και τέλος, ο 5ος όρος απέχει 1 βήμα από τον 4ο και 4 από τον 1ο όρο. Η διαδικασία αυτή εξαιτίας της διαδοχικότητας που υπάρχει θα συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο. Συνεπώς, μπορούμε να συμπεράνουμε τον βασικό τύπο της αριθμητικής προόδου, ο οποίος και είναι:

$$\boldsymbol{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega}$$

- Δηλαδή, για κάθε όρο χρειαζόμαστε ένα βήμα λιγότερο από όσο υπαγορεύει ο δείκτης του, προκειμένου να τον υπολογίσουμε.

Παραδείγματα:

1) Να βρείτε τον 50ο όρο μιας αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 12$ και $\omega = 2$.

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \overset{\nu=50}{\Longrightarrow} \alpha_{50} = \alpha_1 + (50 - 1)\omega = 12 + 49 * 2 = 110$$

2) Να βρείτε τον 8ο όρο μιας αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 80$ και $\omega = -4$.

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \overset{\nu=-4}{\Longrightarrow} \alpha_8 = \alpha_1 + (8 - 1)\omega = 80 + 7 * (-4) = 52$$

3) Να βρείτε τον 15ο όρο μιας αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = -40$ και $\omega = -3$.

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \overset{\nu=15}{\Longrightarrow} \alpha_8 = \alpha_1 + (15 - 1)\omega = -40 + 14 * (-3) = -82$$

Παρατηρήσεις:

- Μια αριθμητική πρόοδος μπορεί να έχει αρνητική διαφορά. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι οι όροι της μειώνονται διαδοχικά κατά μία σταθερή ποσότητα.

- Δεν μπορούμε να ορίσουμε όρο αριθμητικής προόδου με αρνητικό δείκτη, λόγου χάριν όρο α_{-4}. Δεν ξεχνάμε ότι η αριθμητική πρόοδος είναι κατ΄ ουσίαν ακολουθία, επομένως, έχει πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς.

- Η αριθμητική πρόοδος ως ακολουθία έχει πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε άπειρους σε πλήθος όρους. Δηλαδή, οι όροι μιας αριθμητικής προόδου δεν τελειώνουν ποτέ.

Ασκήσεις για Επίλυση:

Άσκηση:

Αν γνωρίζετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά, υπολογίστε τον γενικό τύπο των παρακάτω αριθμητικών προόδων.

α) $\alpha_1 = 20$ και $\omega = 5$

β) $\alpha_1 = 7$ και $\omega = 9$

γ) $\alpha_1 = 16$ και $\omega = -2$

Λύση:

α) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \overset{\substack{\alpha_1=20 \\ \omega=5}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = 20 + 5(\nu - 1) = 5\nu + 15$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \overset{\substack{\alpha_1=7 \\ \omega=9}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = 7 + 9(\nu - 1) = 9\nu - 2$

γ) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \overset{\substack{\alpha_1=16 \\ \omega=-2}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = 16 - 2(\nu - 1) = -2\nu + 18$

Άσκηση:

Να υπολογίσετε τον 12ο όρο των παρακάτω αριθμητικών προόδων.

α) $\alpha_1 = -3$ και $\omega = -3$

β) $\alpha_1 = 24$ και $\omega = 7$

γ) 2,6,10, …

Λύση:

α) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \overset{\substack{\alpha_1=-3\\ \omega=-3\\ \nu=12}}{\Longleftrightarrow} \alpha_{12} = -3 - 3(12-1) = -36$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \overset{\substack{\alpha_1=24\\ \omega=7\\ \nu=12}}{\Longleftrightarrow} \alpha_{12} = 24 + 7(12-1) = 101$

γ) $2,6,10,\ldots \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 2 \\ \omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 6 - 2 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \overset{\substack{\alpha_1=2\\ \omega=4\\ \nu=12}}{\Longleftrightarrow} \alpha_{12} = 2 + 4(12-1) = 46$

Άσκηση:

Σε μια αριθμητική πρόοδο α_ν ισχύει $\alpha_1 = 6$ και $\omega = 3$.

α) Να βρείτε τον 11ο όρο της προόδου.

β) Ποιος όρος της προόδου ισούται με 60;

Λύση:

α) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \overset{\substack{\alpha_1=6\\ \omega=3}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = 6 + 3(\nu-1) = 3\nu + 3 \Rightarrow$

$\alpha_{11} = 3 * 11 + 3 = 33 + 3 = 36$

β) Σύμφωνα με το (α) ερώτημα, $\alpha_\nu = 3\nu + 3 \Rightarrow$

$\alpha_\nu = 60 \Rightarrow 3\nu + 3 = 60 \Rightarrow 3\nu = 57 \Rightarrow \nu = 19$

Συνεπώς, ο 19ος όρος ισούται με 60.

Άσκηση:

Έστω αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = -14$ και $\alpha_8 = 21$.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά της προόδου.

β) Να υπολογίσετε τον 9ο όρο.

γ) Ποιος όρος της προόδου ισούται με 46;

Λύση:

α) $\left\{\begin{matrix} \alpha_8 = 21 \\ \alpha_8 = \alpha_1 + (8-1)\omega \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha_8 = \alpha_1 + 7\omega \Rightarrow$

$21 = -14 + 7\omega \Rightarrow 7\omega = 35 \Rightarrow \omega = 5$

Συνεπώς, η αριθμητική πρόοδος ορίζεται ως:

$\alpha_\nu = -14 + 5(\nu - 1) = -14 + 5\nu - 5 \Rightarrow \alpha_\nu = 5\nu - 19$

β) Από (α) ερώτημα έχουμε $\alpha_\nu = 5\nu - 19$. Επομένως:

$\alpha_\nu = 5\nu - 19 \overset{\nu=9}{\Longrightarrow} \alpha_9 = 5 * 9 - 19 = 45 - 19 \Rightarrow \alpha_9 = 26$

γ) $\alpha_\nu = 46 \Rightarrow 5\nu - 19 = 46 \Rightarrow 5\nu = 65 \Rightarrow \nu = 13$

Συνεπώς, ο 13ος όρος ισούται με 46.

Άσκηση:

Έστω αριθμητική πρόοδος με $\alpha_{10} = 120$ και $\omega = -9$.

α) Να υπολογίσετε τον πρώτο όρο της προόδου.

β) Να υπολογίσετε τον 14ο όρο.

γ) Ποιος όρος της προόδου ισούται με -51;

Λύση:

α) $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega \Leftrightarrow 120 = \alpha_1 + 9 * (-9) \Leftrightarrow \alpha_1 = 120 + 81 = 201$

Συνεπώς, η αριθμητική πρόοδος ορίζεται ως:

$\alpha_\nu = 201 - 9(\nu - 1) = 201 - 9\nu + 9 \Rightarrow \alpha_\nu = -9\nu + 210$

β) $\alpha_{14} = \alpha_1 + 13\omega = 201 - 9 * 13 = 201 - 117 = 84$

γ) Από (α) ερώτημα έχουμε $\alpha_\nu = -9\nu + 210$. Επομένως:

$\alpha_\nu = -51 \Rightarrow -9\nu + 201 = -51 \Rightarrow 9\nu = 252 \Rightarrow \nu = 28$

Συνεπώς, ο 28ος όρος ισούται με -51.

Παρατήρηση:

Για να υπολογίσουμε τον τύπο μιας αριθμητικής προόδου δεν είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε ταυτόχρονα και τον πρώτο όρο της και τη διαφορά της. Αν γνωρίζουμε έστω το ένα από τα δύο και κάποιον όρο της, μπορούμε να υπολογίσουμε την άλλη έννοια που μας λείπει. Επίσης, μπορούμε να υπολογίσουμε τον τύπο της και χωρίς να ξέρουμε ούτε τον πρώτο όρο ούτε τη διαφορά της. Αυτή η περίπτωση θα δειχθεί στο κομμάτι των σύνθετων ασκήσεων.

Αριθμητικός Μέσος:

Ορισμός:

«Αριθμητικός μέσος» ονομάζεται ο αριθμός $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$, αν και μόνον εάν οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ο αριθμός β καλείται αριθμητικός μέσος των α και γ.

Ασκήσεις για Επίλυση:

Άσκηση:

Να υπολογίσετε τον αριθμητικό μέσο σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

α) $-2 \ \kappa\alpha\iota \ 8$

β) $6 \ \kappa\alpha\iota \ 22$

γ) $11 \ \kappa\alpha\iota \ 29$

Λύση:

Έστω β ο αριθμητικός μέσος σε κάθε περίπτωση.

α) $-2 \ \kappa\alpha\iota \ 8 \Rightarrow \beta = \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3$

β) $6 \ \kappa\alpha\iota \ 22 \Rightarrow \beta = \frac{6+22}{2} = \frac{28}{2} = 14$

γ) $11 \ \kappa\alpha\iota \ 29 \Rightarrow \beta = \frac{11+29}{2} = \frac{40}{2} = 20$

Άσκηση:

Να βρείτε για τιμή του πραγματικού αριθμού λ οι παρακάτω όροι αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

$4\lambda - 6, \ 3\lambda + 5, \ 5\lambda - 5$

Λύση:

Αφοί οι δοθέντες αριθμοί αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, συμπεραίνουμε ότι θα ικανοποιούν τη συνθήκη του αριθμητικού μέσου:

$$3\lambda + 5 = \frac{4\lambda - 6 + 5\lambda - 5}{2} \Leftrightarrow$$

$$2(3\lambda + 5) = 4\lambda - 6 + 5\lambda - 5 \Leftrightarrow 6\lambda + 10 = 9\lambda - 11 \Leftrightarrow$$

$$3\lambda = 21 \Leftrightarrow \lambda = 7$$

Προκύπτουν οι όροι $22, 26 \ \kappa\alpha\iota \ 30$, επομένως, έχουμε αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega = 4$.

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου:

Ορισμός:

Το άθροισμα των πρώτων ν το πλήθος όρων αριθμητικής προόδου α_ν με διαφορά ω ορίζεται ως:

$$\boldsymbol{S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)}$$

Ή

$$\boldsymbol{S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]}$$

Παραδείγματα:

1) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 13 πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 2$.

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] \overset{\substack{\alpha_1=3\\ \omega=2\\ \nu=13}}{\Longleftrightarrow} S_{13} = \frac{13}{2}[6 + 24] = 195$$

2) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 23 πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 18$ και $\omega = -2$.

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] \overset{\substack{\alpha_1=18\\ \omega=-2\\ \nu=23}}{\Longleftrightarrow} S_{23} = \frac{23}{2}[36 - 44] = -92$$

3) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 80 πρώτων όρων αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 5$ και $\omega = 6$.

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] \overset{\substack{\alpha_1=5\\ \omega=6\\ \nu=80}}{\Longleftrightarrow} S_{80} = \frac{80}{2}[10 + 474] = 19.360$$

Ασκήσεις για Επίλυση:

Άσκηση:

Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων των παρακάτω αριθμητικών προόδων.

α) $6, 11, 16, \ldots$

β) $-18, -15, -12, \ldots$

Λύση:

α) $6, 11, 16 \ldots \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 6 \\ \omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 11 - 6 = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] \overset{\substack{\alpha_1=6 \\ \omega=5 \\ \nu=30}}{\Longleftrightarrow} S_{30} = \frac{30}{2}[12 + 29 * 5] = 2.355$$

β) $-18, -15, -12 \ldots \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = -18 \\ \omega = \alpha_2 - \alpha_1 = -15 - (-18) = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] \overset{\substack{\alpha_1=-18 \\ \omega=3 \\ \nu=30}}{\Longleftrightarrow} S_{30} = \frac{30}{2}[-36 + 29 * 5] = 1.635$$

Άσκηση:

Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα.

α) $2 + 9 + 16 + \cdots + 142$

β) $-5 - 1 + 3 + \cdots + 63$

γ) $60 + 57 + 54 + \cdots - 57$

δ) $1 + \frac{3}{2} + 2 + \cdots 24$

Λύση:

α) $2 + 9 + 16 + \cdots + 142 \Rightarrow$

Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 2 \\ \omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 9 - 2 = 7 \end{matrix}\right\}$.

Επειδή δε γνωρίζουμε σε ποιον όρο αντιστοιχεί το 142, (δηλαδή, αν είναι ο 13ος , ο 19ος , ο 24ος κλπ.), για να υπολογίσουμε το δοθέν άθροισμα πρέπει πρώτα να βρούμε τη σειρά του τελευταίου όρου στην πρόοδο.

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \overset{\substack{\alpha_1=2 \\ \omega=7}}{\iff} \alpha_\nu = 2 + 7(\nu - 1) = 7\nu - 5 \;\Rightarrow$

$\alpha_\nu = 142 \;\Leftrightarrow 7\nu - 5 = 142 \Leftrightarrow 7\nu = 147 \Leftrightarrow \nu = 21$

Άρα, πρόκειται για τον 21ο όρο της αριθμητικής προόδου.

Επομένως: $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \overset{\nu=21}{\iff} S_{21} = \frac{21}{2}(2 + 142) = 1.512$

β) $-5 - 1 + 3 + \cdots + 63 \;\Rightarrow$

Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\left\{\begin{matrix} \alpha_1 = -5 \\ \omega = \alpha_2 - \alpha_1 = -1 - (-5) = 4 \end{matrix}\right\}$.

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \overset{\substack{\alpha_1=-5 \\ \omega=4}}{\iff} \alpha_\nu = -5 + 4(\nu - 1) = 4\nu - 9 \;\Rightarrow$

$\alpha_\nu = 63 \;\Leftrightarrow 4\nu - 9 = 63 \Leftrightarrow 4\nu = 72 \Leftrightarrow \nu = 18$

Άρα, πρόκειται για τον 18ο όρο της αριθμητικής προόδου.

Επομένως: $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \overset{\nu=18}{\iff} S_{18} = \frac{18}{2}(-5 + 63) = 522$

γ) $60 + 57 + 54 + \cdots - 57 \Rightarrow$

Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 60 \\ \omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 57 - 60 = -3 \end{matrix}\right\}$.

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \overset{\substack{\alpha_1=60 \\ \omega=-3}}{\iff} \alpha_\nu = 60 - 3(\nu - 1) = -3\nu + 63 \;\Rightarrow$

$\alpha_\nu = -57 \;\Leftrightarrow -3\nu + 63 = -57 \Leftrightarrow 3\nu = 120 \Leftrightarrow \nu = 40$

Άρα, πρόκειται για τον 40ο όρο της αριθμητικής προόδου.

Επομένως: $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \overset{\nu=40}{\iff} S_{40} = \frac{40}{2}(60 - 57) = 60$

δ) $1+\frac{3}{2}+2+\cdots 24 \Rightarrow$

Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με $\left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 1 \\ \omega = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$.

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \overset{\substack{\alpha_1=1 \\ \omega=\frac{1}{2}}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = 1 + \frac{1}{2}(\nu-1) = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\alpha_\nu = 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2} = 24 \Leftrightarrow \nu + 1 = 48 \Leftrightarrow \nu = 47$

Άρα, πρόκειται για τον $47^{\text{ο}}$ όρο της αριθμητικής προόδου.

Επομένως: $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \overset{\nu=47}{\Longleftrightarrow} S_{47} = \frac{47}{2}(1+24) = \frac{1.175}{2}$

Παρατήρηση:

Για την εύρεση του αθροίσματος ν διαδοχικών όρων έχουμε δύο τύπους που μπορούμε να χρησιμοποιούμε. Οι δύο τύποι είναι ισοδύναμοι, καθώς ο ένας προκύπτει από τον άλλον. Σε κάθε περίπτωση, εξετάζουμε τα δεδομένα της άσκησης και χρησιμοποιούμε όποιον μας εξυπηρετεί καλύτερα. Για παράδειγμα, αν έχουμε γενικά άθροισμα ν όρων μιας αριθμητικής προόδου, χρησιμοποιούμε τον τύπο $S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]$, ενώ, αν γνωρίζουμε το πρώτο και τον τελευταίο όρο της προόδου που θέλουμε να συμπεριλάβουμε στο άθροισμα(γενικά δεν υπάρχει τελευταίος όρος σε μια αριθμητική πρόοδο, όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως), χρησιμοποιούμε τον τύπο $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$.

Σύνθετες Ασκήσεις για Επίλυση:

- Σε αυτό το κομμάτι της ενότητας, θα δούμε πώς χειριζόμαστε πιο δύσκολες και σύνθετες ασκήσεις στις αριθμητικές προόδους. Αυτό που πρέπει να θυμόμαστε είναι ότι σε κάθε περίπτωση δουλεύουμε με τους τύπους που ξέρουμε ήδη και τίποτα περισσότερο. Αυτό που απαιτείται απλώς είναι μια πιο σύνθετη σκέψη.

Άσκηση:

Να υπολογίσετε το άθροισμα των 60 πρώτων θετικών πολλαπλάσιων του φυσικού αριθμού 6.

Λύση:

Σε μια τέτοιου είδους άσκηση, η εκφώνηση μας δίνει έμμεσα τον πρώτο όρο και τη διαφορά της αριθμητικής προόδου. Στην προκειμένη περίπτωση, αφού μας ενδιαφέρουν τα πρώτα 60 θετικά πολλαπλάσια του 6, καταλαβαίνουμε αρχικά ότι πρόκειται για αριθμητική πρόοδο και μάλιστα με διαφορά 6, αφού το κάθε πολλαπλάσιο διαφέρει από το προηγούμενό του κατά 6. Επίσης, ο πρώτος όρος θα είναι ο αριθμός 6. Άρα:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] \overset{\substack{\alpha_1=6\\ \omega=6\\ \nu=60}}{\Longleftrightarrow} S_{60} = \frac{60}{2}[12 + 59 * 6] = 10.980$$

Άσκηση:

Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) των άρτιων αριθμών ανάμεσα στους αριθμούς 11 και 631.

β) των πολλαπλάσιων του 8 ανάμεσα στους αριθμούς 20 και 999.

Λύση:

α) Οι άρτιοι αριθμοί συνιστούν μια αριθμητική πρόοδο με διαφορά 2, αφού έκαστος αριθμός διαφέρει τόσο από τον προηγούμενο όσο και από τον επόμενο αριθμό κατά 2. Μας ενδιαφέρουν οι άρτιοι αριθμοί ανάμεσα στο 11 και στο 631. Μεταξύ του 11 και του 631, ο πρώτος άρτιος αριθμός είναι το 12 και ο τελευταίος το 630. Επομένως:

$\alpha_\nu = 630 \Rightarrow 2\nu = 630 \Rightarrow \nu = 315 \Rightarrow$

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xLeftrightarrow[\nu=315]{\substack{\alpha_1=12\\ \alpha_{315}=630}} S_{315} = \frac{315}{2}(12 + 630) = 101.115$$

β) Τα πολλαπλάσια του 8 συνιστούν μια αριθμητική πρόοδο με διαφορά 8, αφού έκαστος αριθμός διαφέρει τόσο από τον προηγούμενο όσο και από τον επόμενο αριθμό κατά 8. Μας ενδιαφέρουν τα πολλαπλάσια του 8 ανάμεσα στο 20 και στο 999. Μεταξύ του 20 και του 999, το πρώτο πολλαπλάσιο είναι το 24 και το τελευταίο το 992. Επομένως:

$\alpha_\nu = 992 \Rightarrow 8\nu = 992 \Rightarrow \nu = 124 \Rightarrow$

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \xLeftrightarrow[\nu=124]{\substack{\alpha_1=24\\ \alpha_{124}=992}} S_{124} = \frac{124}{2}(24 + 992) = 62.992$$

Άσκηση:

Δίνεται αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 4$ και $\omega = 4$. Να υπολογίσετε το άθροισμα $40 + 44 + 48 + \cdots + 200$.

Λύση:

Αρχικά, συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για τα πολλαπλάσια του 4. Συνεπώς, έχουμε την αριθμητική πρόοδο $\alpha_\nu = 4\nu$. Παρατηρούμε ότι δε μας ζητείται να υπολογίσουμε το άθροισμα από το πρώτο όρο μέχρι κάποιον άλλο, αλλά από έναν ενδιάμεσο. Σε μια τέτοια περίπτωση, υπολογίζουμε το άθροισμα από τον αρχικό όρο της προόδου μέχρι τον τελευταίο όρο στο άθροισμα που μας ζητείται και από αυτό αφαιρούμε το άθροισμα από τον αρχικό όρο της προόδου μέχρι τον ενδιάμεσο.

Αρχικά, υπολογίζουμε τον τελευταίο όρο που θα συμπεριλάβουμε στο άθροισμα.

$\alpha_\nu = 200 \Rightarrow 4\nu = 200 \Rightarrow \nu = 50 \Rightarrow$

Άρα, ο τελευταίος όρος που θα συμπεριλάβουμε στο άθροισμά μας είναι ο 50ος.

Εν συνεχεία, υπολογίζουμε τον ενδιάμεσο όρο.

$\alpha_\nu = 40 \Rightarrow 4\nu = 40 \Rightarrow \nu = 10 \Rightarrow$

Επομένως, τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τα δύο αθροίσματα που μας ενδιαφέρουν. Για το άθροισμα των όρων μέχρι πριν τον ενδιάμεσο προσθέτουμε έναν όρο λιγότερο.

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \overset{\substack{\alpha_1=4 \\ \alpha_9=40-4=36 \\ \nu=9}}{\Longleftrightarrow} S_9 = \frac{9}{2}(4+36) = 180$$

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \overset{\substack{\alpha_1=4 \\ \alpha_9=40-4=36 \\ \nu=50}}{\Longleftrightarrow} S_{50} = \frac{50}{2}(4+200) = 5.100$$

Επομένως, $40 + 44 + 48 + \cdots + 200 = S_{50} - S_9 = 5.100 - 180 \Rightarrow$

$40 + 44 + 48 + \cdots + 200 = 4.920$

Άσκηση:

Έστω μια αριθμητική πρόοδος με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_7 = 32$.

α) Να υπολογίσετε τον πρώτο όρο της προόδου, καθώς και τη διαφορά της.

β) Βρείτε το γενικό τύπο της προόδου.

γ) Υπολογίστε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_5 + \alpha_9 + \alpha_{27} + \alpha_{109}$

Λύση:

α) $\begin{Bmatrix} \alpha_3 = 8 \\ \alpha_7 = 32 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 + 2\omega = 8 \\ \alpha_1 + 6\omega = 32 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow 4\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 6 \Rightarrow$

$\alpha_1 + 2\omega = 8 \overset{\omega=6}{\Longleftrightarrow} \alpha_1 = 8 - 12 = -4$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \overset{\substack{\alpha_1=-4 \\ \omega=6}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = -4 + 6(\nu - 1) = 6\nu - 10$

γ) $S = a_1 + a_5 + a_9 + a_{27} + a_{109} =$

$\alpha_1 + (\alpha_1 + 4\omega) + (\alpha_1 + 8\omega) + (\alpha_1 + 26\omega) + (\alpha_1 + 108\omega) =$

$-4 + (-4 + 4 * 6) + (-4 + 8 * 6) + (-4 + 26 * 6) + (-4 + 108 * 6) =$

$-4 + 20 + 44 + 152 + 644 \Rightarrow$

$S = 856$