Προσδοκώμενοι Στόχοι Ενότητας

→ Ο/Η μαθητής/τρια θα πρέπει στο πέρας της ενότητας να έχει κατανοήσει σε βάθος:

- την έννοια της ακολουθίας,
- την έννοια της αναδρομικής ακολουθίας.

Συμπλήρωση Κενών

Σε αυτό το κομμάτι της ενότητας ο/η μαθητής/τρια θα βρει τις παρατηρήσεις, τα κόλπα και τις έξυπνες μεθόδους που χρειάζεται για να καταλάβει πλήρως όλα όσα έμαθε και να καλύψει τυχόντα κενά.

Η έννοια της Ακολουθίας

Η έννοια της ακολουθίας είναι μία σύνθετη και περίπλοκη έννοια, ωστόσο, στην πραγματικότητα δεν είναι κάτι που δεν το γνωρίζουμε ήδη, Μια ακολουθία καταρχάς είναι μια **«συνάρτηση»**, αφού έχει τύπο. Έχει δηλαδή έναν κανόνα που ακολουθούν οι όροι της, προκειμένου να οριστούν.

Ορισμός:

«Ακολουθία» είναι μια συνάρτηση που συμβολίζεται με α_ν και ορίζεται ως εξής: $\boldsymbol{\alpha_\nu} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Η ακολουθία έχει πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς και πεδίο τιμών τους πραγματικούς αριθμούς. Δηλαδή, οι όροι της είναι και μπορούν να είναι πραγματικοί αριθμοί, ωστόσο, δεν μπορεί να οριστεί για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Το πεδίο ορισμού της αφορά στο ν, δηλαδή στο **δείκτη** των όρων της.

Συνεπώς, δεν μπορούμε να ορίσουμε όρο για μη θετικό αριθμό, αφού ο πρώτος θα είναι ο α_1. Δηλαδή, μετράμε κανονικά και κάθε φυσικός αριθμός αντιστοιχεί στον αντίστοιχο όρο.

Π.χ. Ο αριθμός 1 αντιστοιχεί στον πρώτο όρο, ο αριθμός 13 στον δέκατο τρίτο όρο και ο αριθμός 60 στον εξηκοστό όρο.

Έξυπνες Παρατηρήσεις

- Οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι. Επομένως, μια ακολουθία έχει άπειρους όρους, καθώς ορίζεται για κάθε φυσικό αριθμό που υπάρχει χωρίς να υπάρχει κάποια εξαίρεση.

- Ακόμη και αν η ακολουθία είναι σταθερή, δηλαδή έχει συγκεκριμένο τύπο όπως η $\alpha_\nu = 1^\nu$, όπου για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό θα επιστρέφει ως αποτέλεσμα την τιμή 1, οι όροι της είναι άπειροι. Εφόσον υπάρχει όρος στο πεδίο ορισμού, θα υπάρχει όρος και στο πεδίο τιμών.

- Μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία και για αρνητική τιμή ως εξής:

$$\left\{\begin{array}{cc} \alpha_\nu\,, & \acute{o}\pi o\upsilon\ \nu \in \mathbb{N} \\ & \text{ή} \\ \alpha_{\nu+1}\,, & \acute{o}\pi o\upsilon\ \nu \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ & \text{ή} \\ \alpha_{\nu+2}\,, & \acute{o}\pi o\upsilon\ \nu \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\} \\ & \text{ή} \\ \alpha_{\nu+3}\,, & \acute{o}\pi o\upsilon\ \nu \in \mathbb{N} \cup \{-2, -1, 0\} \end{array}\right\}$$

  Η διαδικασία συνεχίζεται έως το άπειρο, αρκεί να φροντίζουμε να αλλάζουμε κατάλληλα το δείκτη της ακολουθίας.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Να βρείτε τους πρώτους πέντε όρους, καθώς επίσης και τον 20ο για τις παρακάτω ακολουθίες.

α) $\alpha_\nu = 8\nu - 3$

β) $\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu+4}$

γ) $\alpha_\nu = 2^\nu$

δ) $\alpha_\nu = \sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{6}$

Λύση:

$$\alpha)\ \alpha_\nu = 8\nu - 3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \gamma\iota\alpha\ \nu = 1: \alpha_1 = 8*1-3 \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 2: \alpha_2 = 8*2-3 \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 3: \alpha_3 = 8*3-3 \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 4: \alpha_4 = 8*4-3 \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 5: \alpha_5 = 8*5-3 \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 20: \alpha_{20} = 8*20-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = 13 \\ \alpha_3 = 21 \\ \alpha_4 = 29 \\ \alpha_5 = 37 \\ \alpha_{20} = 157 \end{array}\right\}$$

$$\beta)\ \alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu+4} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \gamma\iota\alpha\ \nu = 1: \alpha_1 = \frac{(-1)^1}{1+4} \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 2: \alpha_2 = \frac{(-1)^2}{2+4} \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 3: \alpha_3 = \frac{(-1)^3}{3+4} \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 4: \alpha_4 = \frac{(-1)^4}{4+4} \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 5: \alpha_5 = \frac{(-1)^5}{5+4} \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 20: \alpha_{20} = \frac{(-1)^{20}}{20+4} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha_1 = -\frac{1}{5} \\ \alpha_2 = \frac{1}{6} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{7} \\ \alpha_4 = \frac{1}{8} \\ \alpha_5 = -\frac{1}{9} \\ \alpha_{20} = \frac{1}{24} \end{array}\right\}$$

$$\gamma)\ \alpha_\nu = 2^\nu \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \gamma\iota\alpha\ \nu = 1: \alpha_1 = 2^1 \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 2: \alpha_2 = 2^2 \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 3: \alpha_3 = 2^3 \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 4: \alpha_4 = 2^4 \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 5: \alpha_5 = 2^5 \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 20: \alpha_{20} = 2^{20} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 4 \\ \alpha_3 = 8 \\ \alpha_4 = 16 \\ \alpha_5 = 32 \\ \alpha_{20} = 1.048.576 \end{array}\right\}$$

δ) $\alpha_\nu = \sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{6} \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{matrix} \gamma\iota\alpha\ \nu = 1: \alpha_1 = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6} \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 2: \alpha_2 = \sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 3: \alpha_3 = \sigma\upsilon\nu\dfrac{3\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 4: \alpha_4 = \sigma\upsilon\nu\dfrac{4\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 5: \alpha_5 = \sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6} \\ \gamma\iota\alpha\ \nu = 20: \alpha_{20} = \sigma\upsilon\nu\dfrac{20\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu\left(3\pi + \dfrac{2\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} \alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = -\frac{1}{2} \\ \alpha_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_{20} = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ Η εξήγηση που δίδεται αφορά στην τριγωνομετρία που διδάσκεται σε επόμενη τάξη. Βέβαια, μπορούμε και να τα συμπεράνουμε από τα πρόσημα της συνάρτησης του συνημίτονου στα διάφορα τεταρτημόρια του τριγωνομετρικού κύκλου: $\left\{\begin{matrix} 1o: + \\ 2o: - \\ 3o: - \\ 4o: + \end{matrix}\right\}$.

Παρατήρηση

Οι ακολουθίες έχουν έναν κανόνα, αφού είναι συναρτήσεις, που δίνει συγκεκριμένα αποτελέσματα.

Δηλαδή, στην ακολουθία του ερωτήματος (α) έχουμε τα οκταπλάσια όλων των φυσικών αριθμών μειωμένα κατά 3. Αντίστοιχα, στο ερώτημα (γ) έχουμε όλες τις φυσικές δυνάμεις του αριθμού 2.

Ο τρόπος για να βρίσκουμε τον όρο τον οποίο ψάχνουμε κάθε φορά είναι να αντικαθιστούμε τον αριθμό – δείκτη του όρου στη θέση του ν και να υπολογίζουμε(όπως κάνουμε και σε μία εξίσωση, όπου αντικαθιστούμε τη μεταβλητή με τους όρους του πεδίου ορισμού της).

Άσκηση 2:

Να υπολογίσετε τον 4ο όρο των παρακάτω ακολουθιών.

α) $\alpha_{\nu+1} = 5 - 2\alpha_\nu$ με $\alpha_1 = 1$

β) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu{}^3$ με $\alpha_1 = -2$

γ) $\alpha_{\nu+1} = \frac{2^\nu}{\alpha_\nu{}^2}$ με $\alpha_1 = 3$

Λύση:

α) $$\alpha_{\nu+1} = 5 - 2\alpha_\nu \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 5 - 2\alpha_1 = 5 - 2 = 3 \\ \alpha_3 = 5 - 2\alpha_2 = 5 - 6 = -1 \\ \alpha_4 = 5 - 2\alpha_3 = 5 + 2 = 7 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha_4 = 7$$

β) $$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu{}^3 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = \alpha_1{}^3 = (-2)^3 = -8 \\ \alpha_3 = \alpha_2{}^3 = (-8)^3 = -512 \\ \alpha_4 = \alpha_3{}^3 = (-512)^3 = -134.217.728 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_4 = -134.217.728$$

γ) $$\alpha_{\nu+1} = \frac{2^\nu}{\alpha_\nu{}^2} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = \frac{2^1}{\alpha_1{}^2} = \frac{2}{9} \\ \alpha_3 = \frac{2^2}{\alpha_2{}^2} = \frac{4}{\frac{4}{81}} = 81 \\ \alpha_4 = \frac{2^3}{\alpha_3{}^2} = \frac{8}{6.561} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha_4 = \frac{8}{6.561}$$

Παρατήρηση:

Οι παραπάνω ακολουθίες δίνονται ουσιαστικά από τον προηγούμενο όρο, δηλαδή δεν μπορούμε να βρούμε τον επόμενο όρο, αν δεν γνωρίζουμε τον προηγούμενο. Μια ακολουθία μπορεί να δίνεται είτε με τον τύπο της είτε με την άνωθεν μορφή, η οποία συνιστά την **«αναδρομική»** μορφή της. Δηλαδή, χρειάζεται μια «αναδρομή στο παρελθόν», στον προηγούμενο όρο, προκειμένου να βρούμε τον επόμενο.

Και οι δύο μορφές εκφράζουν την ίδια ακολουθία. Την αναδρομική ακολουθία θα την ορίσουμε παρακάτω.

Ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά

Ορισμός:

«Αναδρομικός τύπος» μιας ακολουθίας ονομάζεται εκείνη η σχέση που συνδέει δύο ή περισσότερους όρους της ακολουθίας μεταξύ τους. Δηλαδή, για να υπολογίσουμε κάποιον όρο, απαιτείται να γνωρίζουμε και κάποιον/ους ακόμη. Οι συνηθέστερες περιπτώσεις συνδέουν τον επόμενο όρο με τον αμέσως προηγούμενο ή με τους αμέσως δύο προηγούμενους. Φυσικά, αυτό δεν είναι περιοριστικό.

Μεθοδολογία Εύρεσης του Αναδρομικού τύπου μιας ακολουθίας

- Αρχικά, βρίσκουμε τον όρο $\alpha_{\nu+1}$.
- Προσπαθούμε να εκφράσουμε τον όρο $\alpha_{\nu+1}$ με τη βοήθεια του όρου α_{ν}, δηλαδή τον επόμενο όρο με τη βοήθεια του προηγούμενου.
- Βρίσκουμε όσους αρχικούς όρους χρειάζεται.

***Σημείωση*:**

Για να ορίσουμε μια ακολουθία αναδρομικά απαιτείται να γνωρίζουμε τον αρχικό της όρος ή ίσως και περισσότερους, αναλόγως με το πόσους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Με βάση τον αναδρομικό τύπο, να ορίσετε τον τύπο της ακολουθίας.

α) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 1 \; \mu\varepsilon \; \alpha_1 = 4$

β) $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu \; \mu\varepsilon \; \alpha_1 = 3$

γ) $\alpha_{\nu+1} = \frac{\alpha_\nu}{3} \; \mu\varepsilon \; \alpha_1 = 18$

Λύση:

α) $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 1 \; \mu\varepsilon \; \alpha_1 = 4 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = \alpha_{1+1} = \alpha_1 - 1 = 4 - 1 = 3 \\ \alpha_3 = \alpha_{2+1} = \alpha_2 - 1 = 3 - 1 = 2 \\ \alpha_4 = \alpha_{3+1} = \alpha_3 - 1 = 2 - 1 = 1 \\ \alpha_5 = \alpha_{4+1} = \alpha_4 - 1 = 1 - 1 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = \alpha_{1+1} = 3 = 4 - 1 = 4 - (2 - 1) \\ \alpha_3 = \alpha_{2+1} = 2 = 4 - 2 = 4 - (3 - 1) \\ \alpha_4 = \alpha_{3+1} = 1 = 4 - 3 = 4 - (4 - 1) \\ \alpha_5 = \alpha_{4+1} = 0 = 4 - 4 = 4 - (5 - 1) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 4 - (\nu - 1) = 5 - \nu.$$

β) $\alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu \; \mu\varepsilon \; \alpha_1 = 3 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = \alpha_{1+1} = 2\alpha_1 = 6 \\ \alpha_3 = \alpha_{2+1} = 2\alpha_2 = 12 \\ \alpha_4 = \alpha_{3+1} = 2\alpha_3 = 24 \\ \alpha_5 = \alpha_{4+1} = 2\alpha_4 = 48 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 3 = 3 * 2^{1-1} \\ \alpha_2 = 6 = 3 * 2^{2-1} \\ \alpha_3 = 12 = 3 * 2^{3-1} \\ \alpha_4 = 24 = 3 * 2^{4-1} \\ \alpha_5 = 48 = 3 * 2^{5-1} \end{matrix}\right\}$

$\Leftrightarrow \alpha_\nu = 3 * 2^{\nu-1}.$

$$\gamma)\ \alpha_{\nu+1} = \frac{\alpha_\nu}{3}\ \mu\varepsilon\ \alpha_1 = 18 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha_1 = 18 \\ \alpha_2 = \alpha_{1+1} = \frac{\alpha_1}{3} = \frac{18}{3} = 6 \\ \alpha_3 = \alpha_{2+1} = \frac{\alpha_2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \\ \alpha_4 = \alpha_{3+1} = \frac{\alpha_3}{3} = \frac{2}{3} \\ \alpha_5 = \alpha_{4+1} = \frac{\alpha_4}{3} = \frac{2}{9} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 = 18 = \frac{18}{1} = \frac{18}{3^0} \\ \alpha_2 = 6 = \frac{18}{3} = \frac{18}{3^1} \\ \alpha_3 = 2 = \frac{18}{9} = \frac{18}{3^2} \\ \alpha_4 = \frac{2}{3} = \frac{18}{27} = \frac{18}{3^3} \\ \alpha_5 = \frac{2}{9} = \frac{18}{81} = \frac{18}{3^4} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \alpha_\nu = \frac{18}{3^{\nu-1}}$$

Έξυπνη Παρατήρηση

Όταν έχουμε αναδρομικό τύπο και θέλουμε να βρούμε τον κανονικό τύπο της ακολουθίας, ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Αρχικά, υπολογίζουμε κάποιους αρχικούς όρους˙ τόσους όσους χρειαζόμαστε, προκειμένου να εντοπίσουμε κάποιο πιθανό μοτίβο. Στη συνέχεια, πορευόμαστε προς τα πίσω στη διαδικασία, αλλά αυτή τη φορά **με τη χρήση του αρχικού όρου α_1 σε κάθε όρο**.

Έτσι, εντοπίζουμε το μοτίβο και τέλος, ελέγχουμε, αν προκύπτει ο κάθε όρος(ίσως χρειαστεί να αλλάξουμε το ν με ν+1 ή με ν – 1).

Άσκηση 2:

Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με γενικό όρο $\alpha_\nu = 2\nu^2 - 4\nu$. Να βρείτε:

α) τους 4 πρώτους όρους και τον 100ο,

β) τη διαφορά $\alpha_{\nu+1} - \alpha_{\nu-1}$.

Λύση:

α) $\alpha_\nu = 2\nu^2 - 4\nu \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 = 2*1 - 4*1 = 2 - 4 = -2 \\ \alpha_2 = 2*4 - 4*2 = 8 - 8 = 0 \\ \alpha_3 = 2*9 - 4*3 = 18 - 12 = 6 \\ \alpha_4 = 2*16 - 4*4 = 16 \\ \alpha_{100} = 2*10.000 - 4*100 = 19.600 \end{array} \right\}$

β) $\alpha_{\nu+1} - \alpha_{\nu-1} = 2(\nu+1)^2 - 4(\nu+1) - [2(\nu-1)^2 - 4(\nu-1)] =$

$2(\nu^2 + 2\nu + 1) - 4\nu - 4 - [2(\nu^2 - 2\nu + 1) - 4\nu + 4] =$

$2\nu^2 + 4\nu + 2 - 4\nu - 4 - (2\nu^2 - 4\nu + 2 - 4\nu + 4) =$

$2\nu^2 - 2 - 2\nu^2 + 8\nu - 6 = 8\nu - 8 = 8(\nu - 1)$

Σημείωση:

Οι ακολουθίες είναι ένα από τα σημαντικότερα κεφάλαια των μαθηματικών και είναι στην ουσία η βάση των επόμενων δύο ενοτήτων.

Η βάση στις ακολουθίες είναι η δημιουργία μοτίβου, δηλαδή κανόνα που πολλές φορές δεν τον γνωρίζουμε και πρέπει να τον φτιάξουμε.

Αν κάποιος/α καταλάβει σε βάθος τη σκέψη και την ουσία των ακολουθιών, έχει καταφέρει να καλλιεργήσει έναν τρόπο σκέψης σε βάθος γενικότερα στην επιστήμη των μαθηματικών.