Προσδοκώμενοι Στόχοι Ενότητας:

→ Ο/Η μαθητής/τρια θα πρέπει στο πέρας της ενότητας να έχει κατανοήσει σε βάθος:

- την παραγοντοποίηση τριωνύμου,
- την εύρεση του προσήμου ενός τριωνύμου,
- την επίλυση ανισώσεων 2ου βαθμού,
- την επίλυση παραμετρικών ανισώσεων 2ου βαθμού.

Παραγοντοποίηση Τριωνύμου:

Στην παραγοντοποίηση τριωνύμου αναφερθήκαμε και στην ενότητα 3.3, όταν πραγματευτήκαμε τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Σε αυτήν την ενότητα θα εμβαθύνουμε περισσότερο, καθώς χωρίς κατανόηση της παραγοντοποίησης δεν μπορούμε να επιλύσουμε μια δευτεροβάθμια ανίσωση.

Ορισμός:

«Παραγοντοποίηση» είναι η διαδικασία μέσω της οποίας γράφουμε ένα πολυώνυμο οποιουδήποτε βαθμού ως ένα ενιαίο γινόμενο μονωνύμων ή πολυωνύμων υποβαθμισμένης τάξης.

↝ Για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$, πρέπει αρχικά να βρούμε τις ρίζες του, εφόσον αυτές υπάρχουν. Συνεπώς, βρίσκουμε σε πρώτο στάδιο τη διακρίνουσά του. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- Αν $\boldsymbol{\Delta > 0}$, τότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 πραγματικές και άνισες και παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a(x-\rho_1)(x-\rho_2)}$$

- Αν $\boldsymbol{\Delta = 0}$, τότε το τριώνυμο έχει μια ρίζα ρ διπλή και παραγοντοποιείται ως εξής:
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\rho})^{\mathbf{2}}$$
- Αν $\boldsymbol{\Delta < 0}$, τότε το τριώνυμο δεν έχει ρίζες και επομένως δεν παραγοντοποιείται.

Προσοχή:

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ποτέ το συντελεστή α του μεγιστοβάθμιου όρου, καθώς χωρίς αυτόν έχουμε εξισώσει το τριώνυμο με κάποιο μη ισοδύναμό του.

Λυμένες Ασκήσεις:

Άσκηση 1:

Να μετατρέψετε τα παρακάτω τριώνυμα σε γινόμενα παραγόντων.

α) $-x^2 + 5x + 6$

β) $2x^2 - 9x + 4$

γ) $5x^3 + 8x^2 - 4x$

Λύση:

Για να παραγοντοποιήσουμε τα τριώνυμα, πρέπει να βρούμε τις ρίζες τους, οπότε τα εξισώνουμε με το μηδέν και υπολογίζουμε τη διακρίνουσά τους.

α) $-x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 + 24 = 49 > 0 \Rightarrow$

$$\rho_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \frac{-5+7}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \\ \rho_2 = \frac{-5-7}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6 \end{cases}$$

Επομένως, $-x^2 + 5x + 6 = -(x+1)(x-6) = (x+1)(6-x)$

β) $2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 81 - 32 = 49 > 0 \Rightarrow$

$$\rho_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{4} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \rho_1 = \frac{9+7}{4} = \frac{16}{4} = 4 \\ \rho_2 = \frac{9-7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

Επομένως, $2x^2 - 9x + 4 = 2(x-4)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-4)(2x-1)$

γ) $5x^3 + 8x^2 - 4x = x(5x^2 + 8x - 4) \Rightarrow$

$5x^2 + 8x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 + 80 = 144 > 0 \Rightarrow$

$$\rho_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{10} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \rho_1 = \frac{-8+12}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ \rho_2 = \frac{-8-12}{10} = \frac{-20}{10} = -2 \end{Bmatrix}$$

Επομένως, $5x^2 + 8x \pm 4 = 5(x+2)\left(x - \frac{2}{5}\right) = (x+2)(5x-2)$

Άρα, συνολικά: $5x^3 + 8x^2 - 4x = x(x+2)(5x-2)$

Άσκηση 2:

Να απλοποιήσετε τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις, αφού πρώτα βρείτε για ποιες τιμές ορίζονται.

α) $\frac{-x^2+7x-12}{x^2-5x+6}$ β) $\frac{2x^2-x-3}{x^2+x}$ γ) $\frac{x^3-4x}{x^3-x^2-6x}$

Λύση:

Όταν μας δίνεται είτε μια συνάρτηση είτε μια αριθμητική παράσταση υπό τη μορφή κλάσματος, πρέπει πάντα στην αρχή της διαδικασίας επίλυσης της άσκησης να ελέγχουμε για ποιες τιμές ορίζεται το δοθέν κλάσμα. Δηλαδή, βρίσκουμε τις ρίζες του παρονομαστή και τις εξαιρούμε.

α) $\frac{-x^2+7x-12}{x^2-5x+6} \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 24 = 1 > 0 \Rightarrow$

$$\rho_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \rho_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \rho_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{Bmatrix}$$

Επομένως, το δοθέν κλάσμα ορίζεται για $x \in \mathbb{R}/\{2,3\}$.

Για να απλοποιήσουμε το κλάσμα, πρέπει να το παραγοντοποιήσουμε. Οπότε, πρέπει να βρούμε τις ρίζες των τριωνύμων.

$-x^2 + 7x - 12 = 0 \Rightarrow \Delta = 49 - 48 = 1 > 0 \Rightarrow$

$$\rho_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{-2} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \rho_1 = \frac{-7+1}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \\ \rho_2 = \frac{-7-1}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4 \end{Bmatrix}$$

Οπότε: $\frac{-x^2+7x-12}{x^2-5x+6} = \frac{-(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-2)} = \frac{4-x}{x-2}$

β) $\frac{2x^2-x-3}{x^2+x} \Rightarrow$

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ \text{ή} \\ x = -1 \end{Bmatrix}$$

Επομένως, το δοθέν κλάσμα ορίζεται για $x \in \mathbb{R}/\{-1,0\}$.

Για να απλοποιήσουμε το κλάσμα, πρέπει να το παραγοντοποιήσουμε. Οπότε, πρέπει να βρούμε τις ρίζες των τριωνύμων.

$2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 24 = 25 > 0 \Rightarrow$

$$\rho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \rho_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \rho_2 = \frac{1-5}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{Bmatrix}$$

Οπότε: $\frac{2x^2-x-3}{x^2+x} = \frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{2x-3}{x}$

γ) $\frac{x^3-4x}{x^3-x^2-6x} \Rightarrow$

$$x^3-x^2-6x=0 \Rightarrow x(x^2-x-6)=0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=0 \\ ή \\ x^2-x-6=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$x^2-x-6=0 \Rightarrow \Delta = 1+24=25>0 \Rightarrow$$

$$\rho_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \rho_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \rho_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{Bmatrix}$$

Επομένως, το δοθέν κλάσμα ορίζεται για $x \in \mathbb{R}/\{-2, 0, 3\}$.

Για να απλοποιήσουμε το κλάσμα, πρέπει να το παραγοντοποιήσουμε. Οπότε, πρέπει να βρούμε τις ρίζες των τριωνύμων.

$$x^3-4x=0 \;\Rightarrow x(x^2-4)=0 \Rightarrow x(x-2)(x+2)=0 \Rightarrow$$

Οπότε: $\frac{x^3-4x}{x^3-x^2-6x} = \frac{x(x-2)(x+2)}{x(x-3)(x+2)} = \frac{x-2}{x-3}$

Άσκηση 3:

Να απλοποιήσετε την παρακάτω αριθμητική παράσταση.

$$\frac{x^2-13x+40}{x^3-x} : \frac{x^2-4x-32}{-x^2+2x+3}$$

Λύση:

$$\frac{x^2-13x+40}{x^3-x} : \frac{x^2-4x-32}{-x^2+2x+3} \Rightarrow$$

- $x^2-13x+40=0 \Rightarrow \Delta = 169-160=9>0 \Rightarrow$

$$\rho_{1,2} = \frac{13\pm\sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \rho_1 = \dfrac{13+3}{2} = \dfrac{16}{2} = 8 \\ \rho_2 = \dfrac{13-3}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$x^2-13x+40=(x-8)(x-5)$$

- $x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)=0$

- $-x^2+2x+3=0 \Rightarrow \Delta = 4+12=16>0 \Rightarrow$

$$\rho_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{-2} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \rho_1=\frac{-2+4}{-2}=\frac{2}{-2}=-1 \\ \rho_2=\frac{-2-4}{-2}=\frac{-6}{-2}=3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$-x^2+2x+3=(x+1)(x-3)$

- $x^2-4x-32=0 \Rightarrow \Delta = 16+128=144>0 \Rightarrow$

$$\rho_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{144}}{2} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \rho_1=\frac{4+12}{2}=\frac{16}{2}=8 \\ \rho_2=\frac{4-12}{2}=\frac{-8}{2}=-4 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$x^2-4x-32=(x-8)(x+4)$

$$\frac{x^2-13x+40}{x^3-x}:\frac{x^2-4x-32}{-x^2+2x+3}=$$

$$\frac{x^2-13x+40}{x^3-x}*\frac{-x^2+2x+3}{x^2-4x-32}=$$

$$\frac{(x-8)(x-5)}{x(x-1)(x+1)}*\frac{(x+1)(x-3)}{(x-8)(x+4)}=$$

$$\frac{x-5}{x^2-x}*\frac{x-3}{x+4}=\frac{x^2-8x+15}{x^3+4x^2-x-4}$$

Ανισώσεις 2ου Βαθμού:

Υπάρχουν τριώνυμα τα οποία διατηρούν σταθερό πρόσημο σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, όπως το x^2+3, το οποίο είναι πάντα θετικό. Συγχρόνως, υπάρχουν και τριώνυμα τα οποία δε διατηρούν σταθερό πρόσημο σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, όπως το x^2-4x+2, το οποίο για την τιμή $x=1$ επιστρέφει τιμή $-1<0$, ενώ για την τιμή $x=5$ επιστρέφει τιμή $7>0$. Γίνεται επομένως αντιληπτό, ότι για να μπορέσουμε να λύσουμε μια ανίσωση δευτέρου βαθμού, πρέπει πρώτα να μπορούμε να αποφανθούμε για το πρόσημο του τριωνύμου.

- **Γενικά, ένα τριώνυμο είτε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών είτε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε διάφορα σύνολα, τα οποία είναι υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών.**

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για το πρόσημο ενός τριωνύμου με βάση πάντα τη διακρίνουσα.

1η περίπτωση: $\boldsymbol{\Delta>0}\Rightarrow$ **δύο ρίζες πραγματικές και άνισες (έστω $x_1<x_2$)**

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$	**Ομόσημο του α**	**0**	**Ετερόσημο του α**	**0**	**Ομόσημο του α**

2η περίπτωση: $\boldsymbol{\Delta=0}\Rightarrow$ **μία διπλή ρίζα (έστω x)**

x	$-\infty$	x	$+\infty$
Πρόσημο του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$	**Ομόσημο του α**	**0**	**Ομόσημο του α**

3η περίπτωση: $\boldsymbol{\Delta = 0} \Rightarrow$ **το τριώνυμο δεν έχει ρίζες**

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Πρόσημο του $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$	**Ομόσημο του α**

Σημείωση :

Το πρόσημο παραμένει σταθερό για οποιαδήποτε τιμή πάρει η μεταβλητή εντός των ορισμένων διαστημάτων, σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμένους πίνακες.

Λυμένες Ασκήσεις:

Άσκηση 1:

Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω τριωνύμων σε όλο το πεδίο ορισμού τους.

α) $x^2 + 5x + 6$

β) $-x^2 - x + 2$

γ) $3x^2 - 7x + 4$

Λύση:

Για να βρούμε το πρόσημο ενός τριωνύμου, πρέπει πρώτα να βρούμε τις ρίζες του και αναλόγως την τιμή της διακρίνουσας, αποφαινόμαστε κατάλληλα.

α) $x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 24 = 1 \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = -2 \; \kappa\alpha\iota \; x_2 = -3 \Rightarrow$$

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

Επειδή η διακρίνουσά του είναι θετική, είμαστε στην πρώτη περίπτωση, άρα έχει πρόσημο ομόσημο του συντελεστή α, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση θετικό, εκτός του διαστήματος των ριζών του και ετερόσημο, δηλαδή αρνητικό, εντός του διαστήματος των ριζών του. Στις ρίζες του μηδενίζει.

Επομένως: $\left\{\begin{array}{c} x^2+5x+6>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-3) \cup (-2,+\infty) \\ x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=-3 \\ x^2+5x+6<0 \Leftrightarrow x \in (-3,-2) \end{array}\right\}$

β) $-x^2-x+2=0 \Rightarrow \Delta=1+8=9 \Rightarrow$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm 3}{-2} \Rightarrow x_1=-2 \;\kappa\alpha\iota\; x_2=1 \Rightarrow$

$-x^2-x+2=-(x+2)(x-1)=(x+2)(1-x)$

Επειδή η διακρίνουσά του είναι θετική, είμαστε στην πρώτη περίπτωση, άρα έχει πρόσημο ομόσημο του συντελεστή α, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση αρνητικό, εκτός του διαστήματος των ριζών του και ετερόσημο, δηλαδή θετικό, εντός του διαστήματος των ριζών του. Στις ρίζες του μηδενίζει.

Επομένως: $\left\{\begin{array}{c} -x^2-x+2>0 \Leftrightarrow x \in (-2,1) \\ -x^2-x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=1 \\ -x^2-x+2<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (1,+\infty) \end{array}\right\}$

γ) $3x^2-7x+4=0 \Rightarrow \Delta=49-48=1 \Rightarrow$

$x_{1,2}=\dfrac{7\pm 1}{6} \Rightarrow x_1=\dfrac{4}{3} \;\kappa\alpha\iota\; x_2=1 \Rightarrow$

$3x^2-7x+4=3\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-1)=(3x-4)(x-1)$

Επειδή η διακρίνουσά του είναι θετική, είμαστε στην πρώτη περίπτωση, άρα έχει πρόσημο ομόσημο του συντελεστή α, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση θετικό, εκτός του διαστήματος των ριζών του και ετερόσημο, δηλαδή αρνητικό, εντός του διαστήματος των ριζών του. Στις ρίζες του μηδενίζει.

Επομένως: $\begin{cases} 3x^2-7x+4>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right) \\ 3x^2-7x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3} \text{ ή } x=1 \\ 3x^2-7x+4<0 \Leftrightarrow x\in\left(1,\frac{4}{3}\right) \end{cases}$

Άσκηση 2:

Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω τριωνύμων σε όλο το πεδίο ορισμού τους.

α) x^2+2x+1

β) $-x^2+\sqrt{3}x-2$

γ) $5x^2+4$

Λύση:

α) $x^2+2x+1=0 \Rightarrow \Delta=4-4=0 \Rightarrow$

$$x=\frac{-2}{2} \Rightarrow x=-1 \Rightarrow\ x^2+2x+1=(x+1)^2$$

Επειδή η διακρίνουσά του είναι μηδέν, είμαστε στη δεύτερη περίπτωση, άρα έχει πρόσημο ομόσημο του συντελεστή α, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση θετικό, για οποιαδήποτε τιμή πάρει, εκτός από τη ρίζα για την οποία μηδενίζει.

Επομένως: $\begin{cases} x^2+2x+1>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty) \\ x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \end{cases}$

β) $-x^2+\sqrt{3}x-2=0\ \Rightarrow \Delta=3-8=-5 \Rightarrow$

Επειδή το τριώνυμο έχει διακρίνουσα μικρότερη του μηδενός, συμπεραίνουμε ότι δεν έχει ρίζες. Συνεπώς, βρισκόμαστε στην τρίτη περίπτωση και άρα, το τριώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Το πρόσημό του θα είναι ομόσημο του συντελεστή α, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση αρνητικό. Επομένως: $-x^2+\sqrt{3}x-2<0\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

γ) $5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 - 80 = -80 \Rightarrow$

Επειδή το τριώνυμο έχει διακρίνουσα μικρότερη του μηδενός, συμπεραίνουμε ότι δεν έχει ρίζες. Συνεπώς, βρισκόμαστε στην τρίτη περίπτωση και άρα, το τριώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Το πρόσημό του θα είναι ομόσημο του συντελεστή α, δηλαδή στην προκειμένη περίπτωση θετικό.

Επομένως: $5x^2 + 4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 3:

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις.

α) $x^2 - 3x - 10 \leq 0$

β) $x^2 + 2x - 24 > 0$

γ) $2x^2 + x + 3 < 0$

δ) $(x-7)^2 \geq 0$

Λύση:

α) $x^2 - 3x - 10 \leq 0 \Rightarrow$

$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 40 = 49 > 0 \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 5 \; \kappa\alpha\iota \; x_2 = -2 \;\Rightarrow$$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και θετικό το συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Επομένως, θα είναι μικρότερο του μηδενός εντός του διαστήματος των ριζών του και ίσο με το μηδέν στις ρίζες του. Άρα:

$x^2 - 3x - 10 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2,\; 5]$

β) $x^2 + 2x - 24 > 0 \Rightarrow$

$x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 96 = 100 > 0 \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 10}{2} \Rightarrow x_1 = 4 \; \kappa\alpha\iota \; x_2 = -6 \;\Rightarrow$$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και θετικό το συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Επομένως, θα είναι μεγαλύτερο του μηδενός εκτός του διαστήματος των ριζών του. Άρα:

$x^2 - 3x - 10 \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (4, +\infty)$

γ) $2x^2 + x + 3 < 0 \Rightarrow$

$2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 24 = -23 < 0 \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα και θετικό το συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Επομένως, δεν έχει ρίζες και διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το πεδίο ορισμού του. Άρα, θα είναι πάντα θετικό. Συνεπώς, η δοθείσα ανίσωση είναι αδύνατη.

δ) $(x-7)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 49 \geq 0$

$x^2 - 14x + 49 = 0 \Rightarrow 196 - 196 = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{14}{2} \Rightarrow x = 7$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα ίση με το μηδέν και θετικό το συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Επομένως, θα είναι θετικό εκτός του διαστήματος των ριζών του και θα μηδενίζει στη ρίζα του. Δηλαδή, η δοθείσα ανίσωση ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό. Άρα:

$(x-7)^2 \geq \Leftrightarrow \ x \in \mathbb{R}$

Άσκηση 4:

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις.

α) $4x - x^2 > 0$

β) $64 < x^2$

γ) $x^2 - 9x \geq 0$

δ) $x^2 + 17 \geq 0$

ε) $-x^2 - 12 \geq 0$

Λύση:

α) $4x - x^2 > 0 \Rightarrow -x(x-4) > 0 \Rightarrow$

Έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις $x_1 = 0 \; και \; x_2 = 4$. Επειδή ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι αρνητικός, το τριώνυμο θα είναι θετικό εντός του διαστήματος των ριζών του, εκεί δηλαδή που θα έχει πρόσημο ετερόσημο του προσήμου του συντελεστή α. Άρα:

$4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \; 4)$

β) $64 < x^2 \Rightarrow 64 - x^2 < 0 \Rightarrow$

Έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις $x_1 = -8 \; και \; x_2 = 8$. Επειδή ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι αρνητικός, το τριώνυμο θα είναι αρνητικό εκτός του διαστήματος των ριζών του, εκεί δηλαδή που θα έχει πρόσημο ομόσημο του προσήμου του συντελεστή α. Άρα:

$64 < x^2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -8) \cup (8, +\infty)$

γ) $x^2 - 9x \geq 0 \Rightarrow x(x-9) \geq 0 \Rightarrow$

Έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις $x_1 = 0 \; και \; x_2 = 9$. Επειδή ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι θετικός, το τριώνυμο θα είναι θετικό εκτός του διαστήματος των ριζών του, εκεί δηλαδή που θα έχει πρόσημο ομόσημο του προσήμου του συντελεστή α και θα μηδενίζει στις ρίζες του. Άρα:

$x^2 - 9x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \; 0] \cup [9, +\infty)$

δ) $x^2 + 17 \geq 0 \Rightarrow$

Η συγκεκριμένη ανισότητα δεν έχει ρίζες, καθώς ο όρος $x^2 \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x και επομένως, η ποσότητα $x^2 + 17$ θα είναι πάντα θετική. Η ισότητα δεν επαληθεύεται ποτέ, αφού δεν υπάρχει αριθμός τέτοιος, ώστε το τετράγωνό του να ισούται με -17. Άρα:

$x^2 + 17 > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα δεν ισχύει ποτέ.

ε) $-x^2 - 12 \geq 0 \Rightarrow \; x^2 + 12 \leq 0 \;\Rightarrow$

Ομοίως με το προηγούμενο ερώτημα, η ποσότητα $x^2 + 12$ είναι πάντα θετική.

Συνεπώς: $x^2 + 12 \leq 0 \;\not\Rightarrow\;$ *αδύνατη*

Παρατήρηση:

Σε μια ανίσωση όπως αυτές της παραπάνω άσκησης δεν είναι αναγκαίο να υπολογίσουμε τη διακρίνουσα. Φυσικά και είναι ορθό και σωστό ως σκέψη, απλώς μπορούμε να υπολογίσουμε τις ρίζες επιτόπου και να συμπεράνουμε από το πλήθος των ριζών σε ποια περίπτωση βρισκόμαστε. Η παραπάνω άσκηση έχει ως σκοπό να μας εξασκήσει στο να μπορούμε επιτόπου να καταλαβαίνουμε σε ποια κατηγορία βρισκόμαστε χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε τη διακρίνουσα.

Άσκηση 5:

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις.

α) $2x(x-3) + (x-4)^2 < 7$

β) $6(x-7) - (x-6)(x+6) \geq 0$

Λύση:

α) $2x(x-3) + (x-4)^2 < 7 \;\Leftrightarrow$

$2x^2 - 6x + x^2 - 8x + 16 < 7 \;\Leftrightarrow$

$3x^2 - 14x + 9 < 0 \;\Rightarrow\; \Delta = 196 - 108 = 88 > 0$

$x_{1,2} = \frac{14 \pm 2\sqrt{22}}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{7+\sqrt{22}}{3}$ *και* $x_2 = \frac{7-\sqrt{22}}{3} \;\Rightarrow$

Επειδή το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου, θα έχει αρνητικό πρόσημο εντός του διαστήματος των ριζών του. Επομένως:

$2x(x-3)+(x-4)^2<7 \iff x \in \left(\frac{7-\sqrt{22}}{3}, \frac{7+\sqrt{22}}{3}\right)$

β) $6(x-7)-(x-6)(x+6) \geq 0 \iff$

$6x-42-(x^2-36) \geq 0 \iff$

$-x^2+6x-6 \geq 0 \iff \Delta = 36+24 = 60 > 0$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{15}}{-2} \Rightarrow x_1 = 3-\sqrt{15} \; \kappa\alpha\iota \; x_2 = 3+\sqrt{15} \Rightarrow$

Επειδή το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και αρνητικό συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου, θα έχει θετικό πρόσημο εντός του διαστήματος των ριζών του και θα μηδενίζει στις ρίζες του. Επομένως:

$6(x-7)-(x-6)(x+6) \geq 0 \iff x \in [3-\sqrt{15}, \; 3+\sqrt{15}]$

Άσκηση 6:

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παρακάτω ανισώσεων.

α) $-x^2+4x+5 \leq 0$ και $2x^2-5x+2 \geq 0$

β) $x^2-14x+49 \geq 0$ και $x^2-14x+49 \geq 0$

γ) $x^2-14x+49 \geq 0$ και $x^2-14x+49 \geq 0$

Λύση:

Προκειμένου να συναληθεύσουμε δύο ανισώσεις, πρέπει πρώτα να βρούμε τα διαστήματα στα οποία αληθεύουν ξεχωριστά και μετά να βρούμε τις κοινές τους λύσεις, αν φυσικά υπάρχουν.

α) $-x^2+4x+5 \leq 0$ και $2x^2-5x+2 \geq 0 \Rightarrow$

- $-x^2+4x+5 \leq 0 \Rightarrow \Delta = 16+20 = 36 > 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{-4\pm6}{-2} \Rightarrow x_1 = -1 \; και \; x_2 = 5 \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και αρνητικό το συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Επομένως, θα είναι μικρότερο του μηδενός εκτός του διαστήματος των ριζών του και θα μηδενίζει στις ρίζες του. Άρα:

$-x^2 + 4x + 5 \leq 0 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [5, +\infty) \qquad (1)$

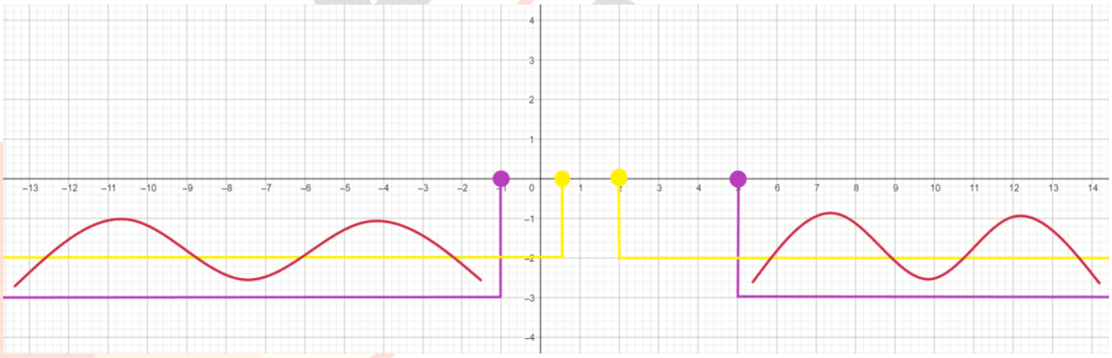
- $2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 16 = 9 > 0 \Rightarrow$
  $x_{1,2} = \frac{5\pm3}{4} \Rightarrow x_1 = 2 \; και \; x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και θετικό το συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Επομένως, θα είναι μεγαλύτερο του μηδενός εκτός του διαστήματος των ριζών του και θα μηδενίζει στις ρίζες του. Άρα:

$2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty) \qquad (2)$

Επομένως, οι δύο ανισότητες συναληθεύουν για τα κοινά τους x, δηλαδή για:

$x \in (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$



β) $x^2-2x-15<0$ και $x^2+4x+11>0 \Rightarrow$

- $x^2-2x-15<0 \Rightarrow \Delta = 4+60=64>0 \Rightarrow$
$x_{1,2}=\frac{2\pm 8}{2} \Rightarrow x_1=5 \; και \; x_2=-3 \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και θετικό το συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Επομένως, θα είναι μικρότερο του μηδενός εντός του διαστήματος των ριζών του. Άρα:

$x^2-2x-15<0 \Leftrightarrow x\in(-3,\ 5)$ (1)

- $x^2+4x+11>0 \Rightarrow \Delta = 16-44=-28<0 \Rightarrow$
Το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα και θετικό το συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Επομένως, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε πραγματικό αριθμό και άρα θα είναι πάντα θετικό.

Επομένως, οι δύο ανισότητες συναληθεύουν για το πεδίο ορισμού της πρώτης ανίσωσης, δηλαδή: $x\in(-3,\ 5)$

γ) $7x^2-6x-1\geq 0$ και $x^2-8x+16<0 \Rightarrow$

- $7x^2-6x-1\geq 0 \Rightarrow \Delta = 36+28=64>0 \Rightarrow$
$x_{1,2}=\frac{6\pm 8}{14} \Rightarrow x_1=1 \; και \; x_2=-\frac{1}{7} \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και θετικό το συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Επομένως, θα είναι μεγαλύτερο του μηδενός εκτός του διαστήματος των ριζών του και θα μηδενίζει στις ρίζες του. Άρα:

$-x^2+4x+5\leq 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{1}{7}\right]\cup[1,+\infty)$ (1)

- $x^2-8x+16<0 \Rightarrow \Delta = 64-64=0 \Rightarrow$
$x=\frac{8}{2} \Rightarrow x=4 \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα ίση με το μηδέν και θετικό το συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Πρόκειται δηλαδή για τέλειο τετράγωνο. Επομένως, θα είναι για κάθε πραγματική τιμή μεγαλύτερο του μηδενός εκτός από τη ρίζα του στην οποία θα μηδενίζει. Άρα, η $x^2 - 8x + 16 < 0$ είναι αδύνατη.

Επομένως, οι δύο ανισώσεις δε συναληθεύουν ποτέ.

Άσκηση 7:

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισώσεις ισχύουν για κάθε πραγματικό αριθμό.

α) $2x^2 + x - 5 < 3x(x - 1)$

β) $20(x + 2) - (x + 8)^2 > -5(x^2 + 6)$

Λύση:

α) $2x^2 + x - 5 < 3x(4x - 1) \Leftrightarrow$

$2x^2 + x - 5 < 12x^2 - 3x \Leftrightarrow$

$-10x^2 + 4x - 5 < 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 200 = -184 < 0$

Το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα, επομένως θα διατηρεί σταθερό σταθερό πρόσημο σε όλο το πεδίο ορισμού του, δηλαδή στο $\mathbb{R}$. Άρα, το πρόσημο καθορίζεται από το πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Αφού

$-10 < 0 \Leftrightarrow -10x^2 + 4x - 5 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$2x^2 + x - 5 < 3x(4x - 1) \ \forall x \in \mathbb{R}$

β) $20(x + 2) - (x + 8)^2 > -5(x^2 + 6) \Leftrightarrow$

$20x + 40 - x^2 - 16x - 64 > -5x^2 - 30 \Leftrightarrow$

$4x^2 + 4x + 6 > 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 96 = -80 < 0$

Το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα, επομένως θα διατηρεί σταθερό σταθερό πρόσημο σε όλο το πεδίο ορισμού του, δηλαδή στο $\mathbb{R}$. Άρα, το πρόσημο καθορίζεται από το πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου.

Αφού

$4>0 \Leftrightarrow 4x^2+4x+6>0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$

$20(x+2)-(x+8)^2>-5(x^2+6) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Άσκηση 8:

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις.

α) $|x+4|>|3-5x|$ β) $|9x^2-6x+1|<-8$ γ) $|2x^2-3x+6|>11$

Λύση:

α) $|x+4|>|3-5x| \Leftrightarrow (\,|x+4|)^2>(|3-5x|)^2 \Leftrightarrow$

$x^2+8x+16>9-30x+25x^2 \Leftrightarrow$

$24x^2-38x-7<0 \Rightarrow \quad \Delta=1444+672=2116>0$

$x_{1,2}=\frac{38\pm46}{48} \Rightarrow x_1=\frac{21}{12} \; \kappa\alpha\iota \; x_2=-\frac{1}{6} \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή δευτεροβάθμιου όρου. Άρα, θα είναι μικρότερο του μηδενός εντός του διαστήματος των ριζών του. Επομένως, η ισοδύναμη δοθείσα ανίσωση αληθεύει όταν:

$|x+4|>|3-5x| \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{6},\ \frac{21}{12}\right)$

β) $|9x^2-6x+1|<-8 \Rightarrow$

Η συγκεκριμένη ανίσωση είναι αδύνατη, διότι η απόλυτη τιμή επιστρέφει ως συνάρτηση πάντα μη αρνητικές τιμές.

γ) $|2x^2-3x+6|>11 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2x^2-3x+6>11 \\ \acute{\eta} \\ 2x^2-3x+6<-11 \end{matrix}\right\}$

Συνεπώς, πρέπει να επιλύσουμε τις δύο ανισώσεις και η ένωση των δύο λύσεων που θα βρούμε είναι η λύση της αρχικής ανίσωσης.

- $2x^2-3x+6>11 \Leftrightarrow$
  $2x^2-3x-5>0 \Rightarrow \quad \Delta=9+40=49>0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm 7}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}$ $και$ $x_2 = -1 \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και θετικό το συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Επομένως, θα είναι μεγαλύτερο του μηδενός εκτός του διαστήματος των ριζών του και θα μηδενίζει στις ρίζες του. Άρα:

$-x^2 + 4x + 5 \leq 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \qquad (1)$

- $2x^2 - 3x + 6 < -11 \Rightarrow$

$2x^2 - 3x + 17 < 0 \Rightarrow \ \Delta = 9 - 136 = -127 < 0 \Rightarrow$

Το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα και θετικό το συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Επομένως, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο και μάλιστα θετικό για κάθε πραγματική τιμή. Επομένως, η ανίσωση $2x^2 - 3x + 6 < -11$ είναι αδύνατη.

Επομένως, η αρχική ανίσωση έχει την εξής λύση:

$|2x^2 - 3x + 6| > 11 \iff x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

Σημείωση :

Όταν έχουμε μια ανίσωση και στο ένας μέλος αυτή υπάρχει απόλυτη τιμή, τη χειριζόμαστε κανονικά ως απόλυτη τιμή. Δηλαδή, ξεκινάμε να διακρίνουμε τις περιπτώσεις της απόλυτης τιμής και έπειτα επιλύουμε τη δευτεροβάθμια ανίσωση που θα προκύψει.

Παραμετρικές Ανισώσεις 2ου Βαθμού:

Η διαχείριση μιας παραμετρικής ανίσωσης δευτέρου βαθμού είναι ακριβώς ίδια με την επίλυση μιας δευτεροβάθμιας ανίσωσης, με τη διαφορά ότι προστίθεται μια ακόμη μεταβλητή, η παράμετρος λ. Την παράμετρο λ, μολονότι δεν τη γνωρίζουμε, τη χειριζόμαστε ως γνωστή τιμή, προκειμένου να επιλύσουμε την ανίσωση. Αυτό που είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε για να λύσουμε μια παραμετρική ανίσωση είναι οι περιπτώσεις που διακρίνουμε με τη διακρίνουσα και με το πρόσημο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου, δηλαδή ό,τι ακριβώς χρειαζόμαστε και για να λύσουμε μια απλή δευτεροβάθμια ανίσωση.

Προσδιορισμός Παραμέτρων:

- Για το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha \neq 0$ ισχύει:
  - $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma>0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, όταν:

    $\boxed{\boldsymbol{\Delta<0}}$ και $\boxed{\boldsymbol{\alpha>0}}$

  - $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma<0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, όταν:

    $\boxed{\boldsymbol{\Delta<0}}$ και $\boxed{\boldsymbol{\alpha<0}}$

- Για το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha \neq 0$ ισχύει:
  - $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma\geq 0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, όταν:

    $\boxed{\boldsymbol{\Delta\leq 0}}$ και $\boxed{\boldsymbol{\alpha>0}}$

  - $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma\leq 0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, όταν:

    $\boxed{\boldsymbol{\Delta\leq 0}}$ και $\boxed{\boldsymbol{\alpha<0}}$

Ασκήσεις για Επίλυση:

Άσκηση 1:

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο $(\lambda-1)x^2-2\lambda x+3\lambda-2$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Λύση:

Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, θα πρέπει να έχει θετική διακρίνουσα. Συνεπώς:

$(\lambda-1)x^2-2\lambda x+3\lambda-2 \Rightarrow$

$\Delta=4\lambda^2-4(\lambda-1)(3\lambda-2)=4\lambda^2-4(3\lambda^2-5\lambda+2)=$

$4\lambda^2-12\lambda^2+20\lambda-8=-8\lambda^2+20\lambda-8$

Εμείς θέλουμε η διακρίνουσα να είναι θετική, επομένως μας ενδιαφέρει να εντοπίσουμε πού έχει το τριώνυμο $-8\lambda^2+20\lambda-8$ θετικό πρόσημο.

$\Delta=400-256=144>0\ \Rightarrow$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-20\pm 12}{-16}\Rightarrow \lambda_1=\frac{1}{2}\ και\ \lambda_2=2$$

Αφού το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και αρνητικό συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου, θα έχει θετικό πρόσημο εντός του διαστήματος των ριζών του, δηλαδή για $\lambda\in\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$. Άρα, το αρχικό τριώνυμο θα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για $\lambda\in\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$.

Άσκηση 2:

Για ποιες τιμές του λ η ανίσωση $\lambda x^2 + (\lambda - 4)x + 2\lambda - 1 < 0$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό;

Λύση:

Για να διατηρεί το τριώνυμο σταθερό πρόσημο για οποιαδήποτε πραγματική τιμή πρέπει η διακρίνουσά του να είναι αρνητική. Επιπλέον, επειδή μας ενδιαφέρει να είναι πάντα αρνητικό, πρέπει ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου να είναι πάντα αρνητικός. Επομένως, $\lambda < 0$. (1)

$\lambda x^2 + (\lambda - 4)\lambda x + 2\lambda - 1 < 0 \Leftrightarrow$

$\Delta = (\lambda - 4)^2 - 4\lambda(2\lambda - 1) =$

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 - 8\lambda^2 + 4\lambda = -7\lambda^2 - 4\lambda + 16$

Συνεπώς, πρέπει να βρούμε πού έχει το τριώνυμο $-7\lambda^2 - 4\lambda + 16$ αρνητικό πρόσημο.

$\Delta = 16 + 448 = 464 > 0 \Rightarrow$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{29}}{-14} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2 + 2\sqrt{29}}{7} \; \kappa\alpha\iota \; \lambda_2 = \frac{2 - 2\sqrt{29}}{7}$$

Αφού το τριώνυμο έχει θετική διακρίνουσα και αρνητικό συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου, θα έχει αρνητικό πρόσημο εκτός του διαστήματος των ριζών του, δηλαδή για $\lambda \in \left(-\infty, \frac{2-2\sqrt{29}}{7}\right) \cup \left(\frac{2-2\sqrt{29}}{7}, +\infty\right)$. (2)

Άρα, συναληθεύοντας τις σχέσεις (1) και (2) συνεπάγεται ότι η αρχική ανίσωση αληθεύει για:

$$\lambda x^2 + (\lambda - 4)x + 2\lambda - 1 < 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left(-\infty, \frac{2 - 2\sqrt{29}}{7}\right)$$