

4.2 Ανισώσεις 2ου Βαθμού

Στόχοι της παραγράφου:

- Παραγοντοποίηση τριωνύμου και παραστάσεων αναγόμενων σε τριώνυμο 2^{ου} βαθμού.
- Απλοποίηση κλασματικών παραστάσεων.
- Εύρεση προσήμου τιμών τριωνύμου.
- Επίλυση ανισώσεων της μορφής $ax^2 + bx + c \leq 0$.

Συνοπτική θεωρία:

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Θεωρούμε το τριώνυμο

$$ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

- **Αν $\Delta > 0$** , τότε το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες x_1 και x_2 και παραγοντοποιείται ως εξής:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- **Αν $\Delta = 0$** , τότε το τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα x_0 και παραγοντοποιείται ως εξής:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- **Αν $\Delta < 0$** , τότε το τριώνυμο δεν έχει ρίζες και **δεν** παραγοντοποιείται σε πρωτοβάθμιους παράγοντες.

Σε κάθε περίπτωση, αν $a \neq 0$, τότε

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right],$$

όπου $\Delta = b^2 - 4ac$.

Πρόσημο τριωνύμου για $\alpha > 0$

$\Delta > 0$	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
	$ax^2 + \beta x + \gamma$	+	0	-	0

$\Delta = 0$	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
	$ax^2 + \beta x + \gamma$	+	0	+

$\Delta < 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
	$ax^2 + \beta x + \gamma$	+	

Πρόσημο τριωνύμου για $\alpha < 0$

$\Delta > 0$	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
	$ax^2 + \beta x + \gamma$	-	0	+	0

$\Delta = 0$	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
	$ax^2 + \beta x + \gamma$	-	0	-

$\Delta < 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
	$ax^2 + \beta x + \gamma$	-	

Παραμετρικές ανισώσεις 2^{ου} βαθμού

- $ax^2 + \beta x + \gamma > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$ και $\alpha > 0$
- $ax^2 + \beta x + \gamma \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0$ και $\alpha > 0$
- $ax^2 + \beta x + \gamma < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$ και $\alpha < 0$
- $ax^2 + \beta x + \gamma \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0$ και $\alpha < 0$

☞ Αν ο συντελεστής α έχει παράμετρο, τότε πρέπει να εξετάσουμε χωριστά την περίπτωση $\alpha = 0$, διότι σε αυτή την περίπτωση δεν έχουμε τριώνυμο.