Προσδοκώμενοι Στόχοι Ενότητας

→ Ο/Η μαθητής/τρια θα πρέπει στο πέρας της ενότητας να έχει κατανοήσει σε βάθος:

- την έννοια της ανίσωσης,
- την ανίσωση με παραμέτρους,
- την ανίσωση με απόλυτες τιμές,
- την έννοια της συναλήθευσης δύο ανισώσεων.

Συμπλήρωση Κενών

Σε αυτό το κομμάτι της ενότητας ο/η μαθητής/τρια θα βρει τις παρατηρήσεις, τα κόλπα και τις έξυπνες μεθόδους που χρειάζεται για να καταλάβει πλήρως όλα όσα έμαθε και να καλύψει τυχόντα κενά.

Ανισώσεις 1ου Βαθμού

Η έννοια της ανίσωσης είναι η αλγεβρική μορφή που περιγράφει την έννοια της διάταξης δύο αριθμών, δηλαδή μεταξύ δύο αριθμών ποιος είναι ο μεγαλύτερος ή αντίστοιχα ο μικρότερος. Την έννοια της ισότητας την πραγματεύεται η εξίσωση. Όπως η εξίσωση έτσι και η ανίσωση έχει δύο μέλη.

Εκτός από την ανίσωση υπάρχει και η ανισότητα. Η έννοια αυτή μας εξυπηρετεί, όταν στο ένα τουλάχιστον μέλος υπάρχει μια μεταβλητή, την οποία μελετούμε για να βρούμε τις τιμές που παίρνει, προκειμένου να ικανοποιείται η δοθείσα συνθήκη. Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις ανισώσεις 1ου βαθμού, δηλαδή ανισώσεις της μορφή

$$\boldsymbol{\alpha x + \beta > 0} \quad \textit{και} \quad \boldsymbol{\alpha x + \beta < 0}.$$

Έξυπνες Παρατηρήσεις

- Όταν μεταφέρουμε έναν αριθμό στο άλλο μέλος της ανίσωσης τον μεταφέρουμε με το αντίθετο πρόσημο από αυτό που έχει. Αυτό συμβαίνει, διότι στην ουσία προσθέτουμε στο κάθε μέλος τον αντίθετό του, προκειμένου να μην διαταραχθεί η ισορροπία.

Π.χ. $x + 2 > 4 \Rightarrow x + 2 - 2 > 4 - 2 \Rightarrow x > 2$

$3x - 5 < 7 \Rightarrow 3x - 5 + 5 < 7 + 5 \Rightarrow 3x < 12 \Rightarrow x < 4$

- Όταν πολλαπλασιάζουμε μια ανίσωση με έναν αριθμό, τότε η φορά της ανίσωσης παραμένει ως έχειν, εάν ο αριθμός είναι θετικός, ενώ αλλάζει, αν ο αριθμός είναι αρνητικός.

Π.χ. $3x < 4 \overset{*1/3}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{3} * 3x < \frac{1}{3} * 4 \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$

$$-11x < 33 \overset{*(-1/11)}{\Longleftrightarrow} -\frac{1}{11} * (-11x) > -\frac{1}{11} * 33 \Leftrightarrow x > -3$$

⇝ Παρατηρήστε στο δεύτερο παράδειγμα ότι, αν δεν αλλάζαμε τη φορά της ανίσωσης, οι τιμές που θα καταλήγαμε να ορίσουμε για το x δε θα την επαλήθευαν.

Για $x = -5 < -3$: $-11 * (-5) = 55 > 33$ και όχι < 33 που θα είχαμε σύμφωνα με την αρχική φορά της ανίσωσης.

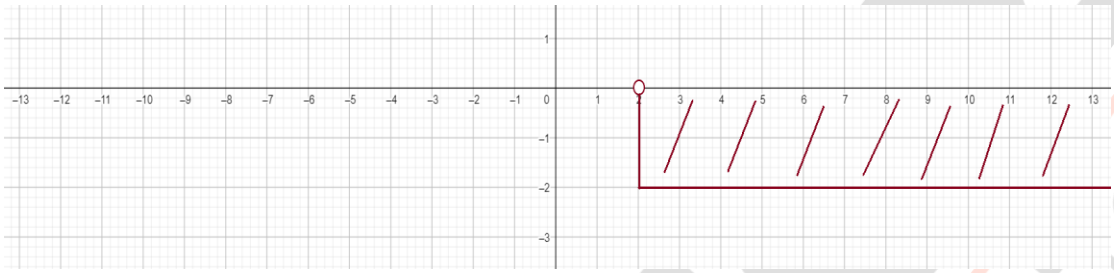
Για $x = -1 > -3$: $-11 * (-1) = 11 < 33$, τιμή η οποία επαληθεύει την αρχική ανίσωση.

Ερώτημα: Τι εκφράζει η έννοια $<$ και $>$;

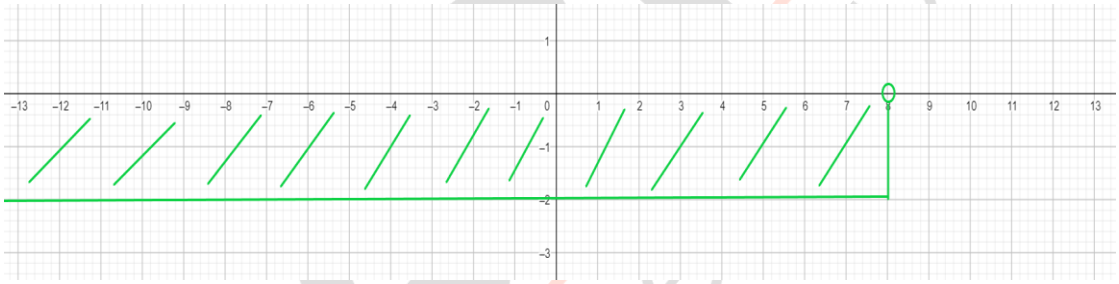
⇝ Σε μια εξίσωση υπάρχουν συγκεκριμένες τιμές που την ικανοποιούν. Είτε πρόκειται για μία είτε για περισσότερες τιμές, προκύπτει ένα σύνολο τιμών διακεκριμένων που την επιλύουν. Σε μια ανίσωση δεν υπάρχουν διακριτές τιμές που την επαληθεύουν, αλλά ολόκληρα διαστήματα άπειρων τιμών. Η έννοια του μεγαλύτερου και του μικρότερου αντίστοιχα δείχνουν για τη μεταβλητή που μελετούμε ότι μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή πάνω ή κάτω από την τιμή που δίνει η ανίσωση, αναλόγως πάντα με τη φορά.

Π.χ.

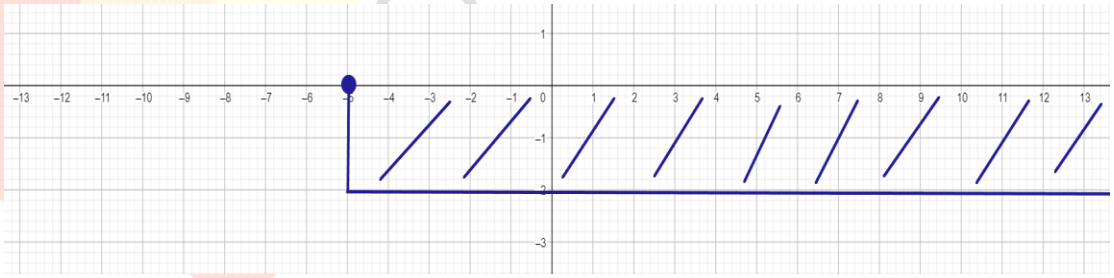
- $x > 2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} \in (\mathbf{2},\ +\infty)$



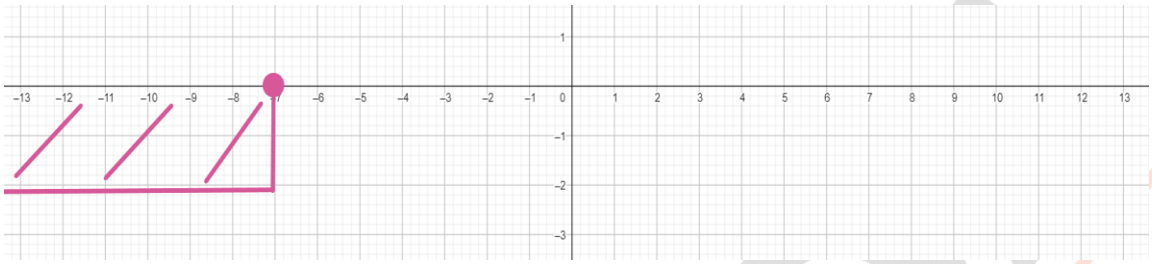
- $x < 8 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} \in (-\infty,\ \mathbf{8})$



- $x \geq -5 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} \in [-\mathbf{5},\ +\infty)$



- $x \leq -7 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x \in (-\infty, -7]}$



Παρατηρήσεις:

- Τα διαστήματα περιλαμβάνουν όλους τους πραγματικούς αριθμούς έως το $\pm\infty$ σε κάθε περίπτωση, απλώς δε φαίνεται για χωρικούς λόγους στα άνωθεν σχήματα.

- Τα άσπρα κυκλάκια στις τιμές που αντιστοιχούν στο ένα άκρο του διαστήματος δείχνουν ότι πρόκειται για ανοικτό διάστημα, δηλαδή για διάστημα που δεν περιλαμβάνει την ακραία τιμή. Αντίστοιχα, τα χρωματιστά κυκλάκια στις τιμές που αντιστοιχούν, δείχνουν ότι πρόκειται για κλειστό διάστημα, δηλαδή για διάστημα που περιλαμβάνει την ακραία τιμή.

- Στο $\pm\infty$ το διάστημα έχει πάντα ανοικτό άκρο, καθώς το «άπειρο» είναι απροσδιόριστη έννοια και δεν μπορεί να μετρηθεί. Εφόσον οι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ, δεν μπορούμε να έχουμε ποτέ κάποια συγκεκριμένη τιμή που να μπορούμε να συμπεριλάβουμε, αφού πάντα θα μπορεί να υπάρχει επόμενος αριθμός.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις.

α) $\frac{x+3}{4} - \frac{x+2}{5} < \frac{11-x}{20}$

β) $\frac{x}{3} + \frac{4-6x}{12} > 6 + \frac{\sqrt{81}+x}{4}$

γ) $\frac{x(x-3)^2}{2} - \frac{x(1-9x)}{3} > \frac{x^3}{2}$

Λύση:

α) $\frac{x+3}{4} - \frac{x+2}{5} < \frac{11-x}{20} \Leftrightarrow$

$5(x+3) - 4(x+2) < 11 - x \Leftrightarrow$

$5x + 15 - 4x - 8 < 11 - x \Leftrightarrow$

$2x < 4 \Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$

β) $\frac{x}{3} + \frac{4-6x}{12} \geq 6 + \frac{\sqrt{81}+x}{4} \Leftrightarrow$

$4x + 4 - 6x \geq 72 + 3(9+x) \Leftrightarrow$

$-2x \geq 68 + 27 + 3x \Leftrightarrow$

$-5x \geq 95 \Leftrightarrow x \leq -19 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -19]$

γ) $\frac{x(x-3)^2}{2} - \frac{x(1-9x)}{3} > \frac{x^3}{2} \Leftrightarrow$

$3x(x-3)^2 - 2x(1-9x) > 3x^3 \Leftrightarrow$

$3x(x^2 - 6x + 9) - 2x + 18x^2 > 3x^3 \Leftrightarrow$

$3x^3 - 18x^2 + 27x - 2x + 18x^2 > 3x^3 \Leftrightarrow$

$25x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$

Άσκηση 2:

Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες συναληθεύουν οι παρακάτω ανισώσεις.

α) $x+\frac{5}{2}\le 2x+\frac{13}{2}\le 2+\frac{3(x-4)}{6}$

β) $\frac{7x-18}{5}<\frac{8x-4}{3}-1 \quad \kappa\alpha\iota \quad x+\frac{3}{2}>-\frac{2x}{5}+\frac{6x-1}{10}+\frac{24}{5}$

Λύση:

α) $x+\frac{5}{2}\le 2x+\frac{13}{2}<2+\frac{3(x-4)}{6} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+\frac{5}{2}\le 2x+\frac{13}{2} \\ \kappa\alpha\iota \\ 2x+\frac{13}{2}\le 2+\frac{3(x-4)}{6}\end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$x+\frac{5}{2}\le 2x+\frac{13}{2} \Leftrightarrow 2x+5\le 4x+13 \Leftrightarrow 2x\ge -8 \Leftrightarrow x\ge -4 \qquad (1)$

$2x+\frac{13}{2}\le 2+\frac{3(x-4)}{6} \Leftrightarrow 12x+39\le 12+3x-12 \Leftrightarrow$

$9x\le -39 \Leftrightarrow x\le -\frac{13}{3}\cong -4{,}333 \qquad (2)$

$\overset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow}$ Οι ανισώσεις δε συναληθεύουν.

β) $\frac{7x-18}{5}<\frac{8x-4}{3}-1 \quad \kappa\alpha\iota \quad x+\frac{3}{2}>-\frac{2x}{5}+\frac{6x-1}{10}+\frac{24}{5}$

$\frac{7x-18}{5}<\frac{8x-4}{3}-1 \Leftrightarrow$

$3(7x-18)<5(8x-4)-15 \Leftrightarrow$

$21x-54<40x-20-15 \Leftrightarrow$

$19x>-19 \Leftrightarrow x>-1 \qquad (1)$

$x+\frac{3}{2}>-\frac{2x}{5}+\frac{6x-1}{10}+\frac{24}{5} \Leftrightarrow$

$10x+15>-4x+6x-1+48 \Leftrightarrow$

$10x+15>2x+47 \Leftrightarrow 8x>32 \Leftrightarrow x>4 \qquad (2)$

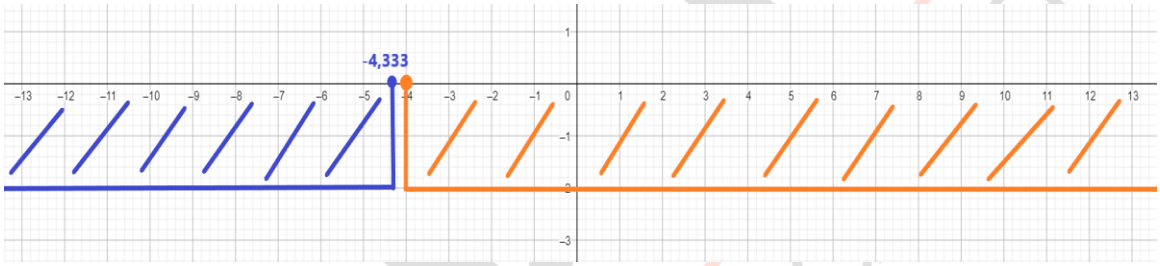
$\overset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow}$ Οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x>4$.

Σημείωση :

Δύο ανισώσεις δεν είναι απαραίτητο ότι θα συναληθεύουν. Μπορεί να μην υπάρχουν τιμές οι οποίες να επαληθεύουν συγχρόνως και τις δύο. Για να μην κάνουμε λάθος, τοποθετούμε στον άξονα των πραγματικών αριθμών τις τιμές και βάζουμε τα βελάκια προς τις κατευθύνσεις που ορίζουν οι ανισώσεις.

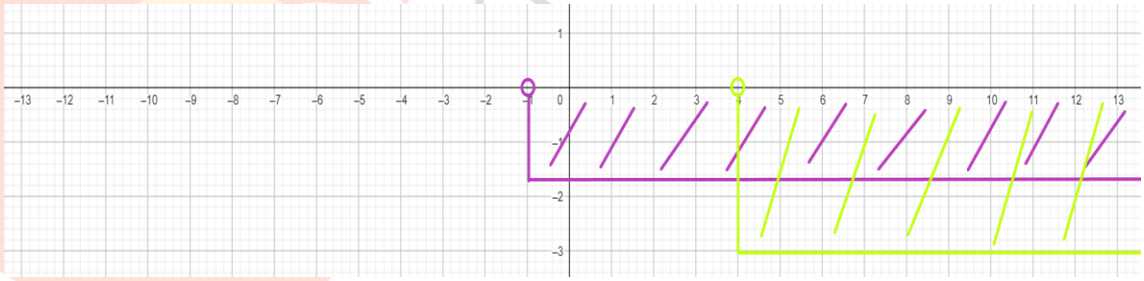
Έτσι, βλέπουμε που συμπίπτουν τα βελάκια, εάν συμπίπτουν, και έχουμε τις κοινές λύσεις.

α)



Παρατηρούμε ότι δε συναληθεύουν οι δύο ανισώσεις.

β)



Παρατηρούμε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x > 4$.

Παραμετρικές Ανισώσεις:

Οι παραμετρικές ανισώσεις είναι ανισώσεις, όπου εκτός από τη μεταβλητή για την οποία δουλεύουμε, υπάρχει μια παράμετρος, δηλαδή μια ακόμη μεταβλητή στην ουσία. Η παράμετρος(συνήθως συμβολίζεται με το γράμμα λ) δεν είναι η κύρια μεταβλητή μας, ωστόσο, οι τιμές που παίρνει μπορούν να αλλάξουν τελείως το τελικό διάστημα στο οποίο θα ανήκει η μεταβλητή.

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση με παράμετρο λ, αρχικά τη φέρνουμε στη μορφή $\alpha x > \beta$ ή $\alpha x < \beta$, αναλόγως τη φορά και έπειτα **διακρίνουμε περιπτώσεις για το πρόσημο του α.**

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις για τις διάφορες τιμές του λ.

α) $\lambda(x+7) < \lambda^2 + 4x + 5$ β) $\frac{\lambda x - \lambda}{4} \geq \frac{x - 2\lambda}{3} - \frac{x+5}{6}$

Λύση:

α) $\lambda(x+5) < \lambda^2 + 2x + 6 \Leftrightarrow$

$\lambda x + 5\lambda < \lambda^2 + 2x + 6 \Leftrightarrow$

$(\lambda - 2)x < \lambda^2 - 5\lambda + 6 \Leftrightarrow$

$(\lambda - 2)x < (\lambda - 2)(\lambda - 3) \qquad (1)$

Διακρίνουμε επομένως τις εξής περιπτώσεις:

- $\lambda - 2 > 0 \Rightarrow \lambda > 2 \overset{(1)}{\Rightarrow} (\lambda - 2)x < (\lambda - 2)(\lambda - 3) \overset{\lambda - 2 > 0}{\Longleftrightarrow}$

  $x < \frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{\lambda-2} = \lambda - 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \lambda - 3)$

- $\lambda - 2 < 0 \Rightarrow \lambda < 2 \overset{(1)}{\Rightarrow} (\lambda - 2)x < (\lambda - 2)(\lambda - 3) \overset{\lambda - 2 < 0}{\Longleftrightarrow}$

  $x > \frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{\lambda-2} = \lambda - 3 \Leftrightarrow x \in (\lambda - 3, +\infty)$

- $\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \overset{(1)}{\Rightarrow} (\lambda - 2)x < (\lambda - 2)(\lambda - 3) \overset{\lambda - 2 = 0}{\Longleftrightarrow} 0x < 0 \not\Leftrightarrow$ αδύνατη

β) $\frac{\lambda x-\lambda}{3} \geq \frac{x-\lambda}{4} - \frac{x+4}{6} \Leftrightarrow$

$4(\lambda x - \lambda) \geq 3(x-\lambda) - 2(x+4) \Leftrightarrow$

$4\lambda x - 4\lambda \geq 3x - 3\lambda - 2x - 8 \Leftrightarrow$

$(4\lambda - 1)x \geq \lambda - 8 \qquad (1)$

Διακρίνουμε επομένως τις εξής περιπτώσεις:

- $4\lambda - 1 > 0 \Rightarrow \lambda > \frac{1}{4} \overset{(1)}{\Rightarrow} (4\lambda-1)x \geq \lambda - 8 \overset{4\lambda-1>0}{\Longleftrightarrow}$

  $x \geq \frac{\lambda-8}{4\lambda-1} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\lambda-8}{4\lambda-1}, +\infty\right)$

- $4\lambda - 1 < 0 \Rightarrow \lambda < \frac{1}{4} \overset{(1)}{\Rightarrow} (4\lambda-1)x \geq \lambda - 8 \overset{4\lambda-1<0}{\Longleftrightarrow}$

  $x \leq \frac{\lambda-8}{4\lambda-1} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{\lambda-8}{4\lambda-1}\right]$

- $4\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \overset{(1)}{\Rightarrow} (4\lambda-1)x \geq \lambda - 8 \overset{4\lambda-1=0}{\Longleftrightarrow}$

  $0x \geq 0 \Leftrightarrow$ ταυτότητα, ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$

Σημείωση :

Η σχέση $0x \geq 0$ ή $0x \leq 0$ έχει υπόσταση μόνο στην περίπτωση της ισότητας. Για αυτό στο (α) ερώτημα η ανίσωση δεν επιδέχεται λύση.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις για τον συντελεστή της μεταβλητής και ύστερα διαγράφουμε, εάν μπορούμε σύμφωνα με το νόμο της διαγραφής. Ένα από τα συχνότερα λάθη που γίνονται είναι να προηγείται η διαγραφή του ελέγχου. Αυτό είναι μεγάλο λάθος και οδηγεί σε λάθος διαστήματα, δηλαδή σε λάθος λύσεις τόσο από την πλευρά των τιμών που περιλαμβάνει το διάστημα όσο και από την πλευρά της φοράς της τελικής ανίσωσης που ορίζει το διάστημα. Το νόημα των παραμετρικών ανισώσεων έγκειται στο γεγονός ότι η λύση της ανίσωσης καθορίζεται από το πρόσημο και τις τιμές που παίρνει η παράμετρος, για αυτό και πρέπει να τη λαμβάνουμε πάντα υπόψιν.

Άσκηση 2:

Δίνεται η εξίσωση $-x-\lambda(\lambda-4x)=5(-x+\lambda^2-1)$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του λ.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση που να είναι μικρότερη του αριθμού 7.

Λύση:

α) $-x-\lambda(\lambda-4x)=5(-x+\lambda^2+1)-11 \Leftrightarrow$

$-x-\lambda^2+4\lambda x=-5x+5\lambda^2+5-11 \Leftrightarrow$

$4x+4\lambda x=6\lambda^2-6 \Leftrightarrow$

$(4+4\lambda)x=6(\lambda^2-1) \Leftrightarrow$

$4x(\lambda+1)=6(\lambda-1)(\lambda+1) \qquad (1)$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\lambda=-1 \Rightarrow 0x=0$, δηλαδή ταυτότητα.
- Αν $\lambda \neq -1 \Rightarrow x=\frac{6(\lambda-1)(\lambda+1)}{4(\lambda+1)}=\frac{3}{2}(\lambda-1)$.

β) Θέλουμε η λύση της εξίσωσης να είναι μικρότερη από τον αριθμό 7. Άρα:

$x<7 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(\lambda-1)<7 \Leftrightarrow 3\lambda-3<14 \Leftrightarrow 3\lambda<17 \Leftrightarrow \lambda<\frac{17}{3}$

Άρα, $\lambda \in (-\infty,-1) \cup \left(-1,\frac{17}{3}\right)$.

Ανισώσεις με Απόλυτες Τιμές

Το δυσκολότερο και σημαντικότερο κομμάτι στις ανισώσεις είναι αυτό των απόλυτων τιμών. Η απόλυτη τιμή, όπως έχει οριστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, είναι εκείνη η συνάρτηση που ορίζεται για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, αλλά επιστρέφει πάντα θετικές τιμές. Η ίδια η απόλυτη τιμή, όταν την ορίζουμε για κάποια μεταβλητή, κρύβει μέσα την έννοια της ανίσωσης. Συμπεραίνουμε, ότι πρόκειται για δύο έννοιες άμεσα συνδεόμενες.

<u>Θυμίζουμε ότι ισχύει</u>: $\left\{\begin{matrix} |\boldsymbol{x}| < \boldsymbol{a} \Leftrightarrow -\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota} \\ |\boldsymbol{x}| > \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} > \boldsymbol{a} \text{ ή } \boldsymbol{x} < -\boldsymbol{a} \end{matrix}\right\}$.

Π.χ.

- $|4x-3| < 8 \Leftrightarrow -8 < 4x-3 < 8 \Leftrightarrow$
  $-5 < 4x < 11 \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < x < \frac{11}{4} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{5}{4}, \frac{11}{4}\right)$

- $|8x-9| > 12 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 8x-9 > 12 \\ \text{ή} \\ 8x-9 < -12 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 8x > 21 \\ \text{ή} \\ 8x < -3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x > \frac{21}{8} \\ \text{ή} \\ x < -\frac{3}{8} \end{matrix}\right\}$

Συναληθεύουμε τις δύο ανισώσεις με διάστημα που συνίσταται από ένωση διαστημάτων(έχουμε διάζευξη!). Επομένως:

$$x \in \left(-\infty, -\frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{21}{8}, +\infty\right)$$

- $|3x+1| \geq 3|x-2| \Leftrightarrow$
  $|3x+1|^2 \geq (3|x-2|)^2 \Leftrightarrow$
  $9x^2+6x+1 \geq 9(x^2-4x+4) \Leftrightarrow$
  $9x^2+6x+1 \geq 9x^2-36x+36 \Leftrightarrow$
  $42x \geq 35 \Leftrightarrow x \geq \frac{35}{42} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5}{6}, +\infty\right)$

- $2|x-1| < |5-2x| \Leftrightarrow$

  $(2|x-1|)^2 < |5-2x|^2 \Leftrightarrow$

  $4(x^2-2x+1) < 25-20x+4x^2 \Leftrightarrow$

  $4x^2-8x+4 < 25-20x+4x^2 \Leftrightarrow$

  $12x < 21 \Leftrightarrow x < \frac{21}{12} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{7}{4}\right]$

- $\left|\sqrt[7]{4}x - \frac{6}{11}\right| < -7 \not\Leftrightarrow$ αδύνατη, διότι η απόλυτη τιμή δεν είναι ποτέ αρνητικός αριθμός, συνεπώς ούτε μικρότερη από κάποια αρνητική τιμή.

Σύνθετες Μορφές Ανισώσεων με Απόλυτες Τιμές

Προφανώς τα παραπάνω παραδείγματα είναι οι πολύ απλές περιπτώσεις που μπορεί να συναντήσει κανείς με ανισώσεις και απόλυτες τιμές. Η δυσκολία εντοπίζεται, όταν πρέπει να επιλύσουμε ανίσωση που έχει και στα δύο μέλη απόλυτες τιμές ή, όταν έχει μόνο στο ένα, αλλά στο άλλο έχουμε κανονικά αριθμητική παράσταση με μεταβλητή, όπου δεν είναι εξαρχής ξεκάθαρο το πρόσημο.

- Όταν η ανίσωση έχει τη μορφή $|\boldsymbol{A(x)}| > |\boldsymbol{B(x)}|$ ή $|\boldsymbol{A(x)}| < |\boldsymbol{B(x)}|$, δηλαδή, όταν έχουμε απόλυτες τιμές και στα δύο μέλη της ανίσωσης, εφαρμόζουμε τη λογική του τρίτου και τέταρτου παραδείγματος, όπου υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, προκειμένου να διώξουμε τις απόλυτες τιμές. Μετά η επίλυση, είναι υπόθεση πράξεων.

- Όταν η ανίσωση έχει τη μορφή $|\boldsymbol{A(x)}| > \boldsymbol{B(x)}$ ή $|\boldsymbol{A(x)}| < \boldsymbol{B(x)}$, εδώ πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις για το πρόσημο του A(x), προκειμένου να βγάλουμε σωστά το απόλυτο και ύστερα να συναληθεύσουμε υπό τον αντίστοιχο περιορισμό.

- Ό,τι ακριβώς ισχύει για τις ανισώσεις, ισχύει προφανώς και για τις ανισότητες.

Π.χ.1

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις.

α) $|x| > x$

β) $|x| \geq x$

γ) $|x| < x$

δ) $|x| \leq x$

ε) $|x| > -x$

στ) $|x| \geq -x$

ζ) $|x| < -x$

η) $|x| \leq -x$

Λύση:

α) $|x| > x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{αδύνατη, για } x > 0 \\ \text{ταυτότητα, για } x < 0 \end{Bmatrix} \xRightarrow{x=\pm 3} \begin{Bmatrix} |3| = 3 \not> 3 \\ |-3| = 3 > -3 \end{Bmatrix}$

β) $|x| \geq x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{ταυτότητα, για } x > 0 \\ \text{ταυτότητα, για } x < 0 \end{Bmatrix} \xRightarrow{x=\pm 3} \begin{Bmatrix} |3| = 3 \geq 3 \\ |-3| = 3 \geq -3 \end{Bmatrix}$

γ) $|x| < x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{αδύνατη, για } x > 0 \\ \text{αδύνατη, για } x < 0 \end{Bmatrix} \xRightarrow{x=\pm 3} \begin{Bmatrix} |3| = 3 \not< 3 \\ |-3| = 3 \not< -3 \end{Bmatrix}$

δ) $|x| \leq x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{ταυτότητα, για } x > 0 \\ \text{αδύνατη, για } x < 0 \end{Bmatrix} \xRightarrow{x=\pm 3} \begin{Bmatrix} |3| = 3 \leq 3 \\ |-3| = 3 \not\leq -3 \end{Bmatrix}$

ε) $|x| > -x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{ταυτότητα, για } x > 0 \\ \text{αδύνατη, για } x < 0 \end{Bmatrix} \xRightarrow{x=\pm 3} \begin{Bmatrix} |3| = 3 > -3 \\ |-3| = 3 \not> 3 \end{Bmatrix}$

στ) $|x| \geq -x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{ταυτότητα, για } x > 0 \\ \text{ταυτότητα, για } x < 0 \end{Bmatrix} \xRightarrow{x=\pm 3} \begin{Bmatrix} |3| = 3 \geq -3 \\ |-3| = 3 \geq 3 \end{Bmatrix}$

ζ) $|x| < -x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{αδύνατη, για } x > 0 \\ \text{αδύνατη, για } x < 0 \end{Bmatrix} \xRightarrow{x=\pm 3} \begin{Bmatrix} |3| = 3 \not< -3 \\ |-3| = 3 \not< 3 \end{Bmatrix}$

η) $|x| \leq -x \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \text{αδύνατη, για } x > 0 \\ \text{ταυτότητα, για } x < 0 \end{Bmatrix} \xRightarrow{x=\pm 3} \begin{Bmatrix} |3| = 3 \not\leq -3 \\ |-3| = 3 \leq 3 \end{Bmatrix}$

Π.χ.2

Να λύσετε τις παρακάτω διπλές ανισώσεις.

α) $2 < |6x - 1| \leq 8$

β) $2x + |3x + 1| < 24$

Λύση:

α) $2 < |6x - 1| \leq 8 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2 < |6x - 1| \\ και \\ |6x - 1| \leq 8 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$$2 < |6x - 1| \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 6x - 1 > 2 \\ ή \\ 6x - 1 < -2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 6x > 3 \\ ή \\ 6x < -1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x > \frac{1}{2} \\ ή \\ x < -\frac{1}{6} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

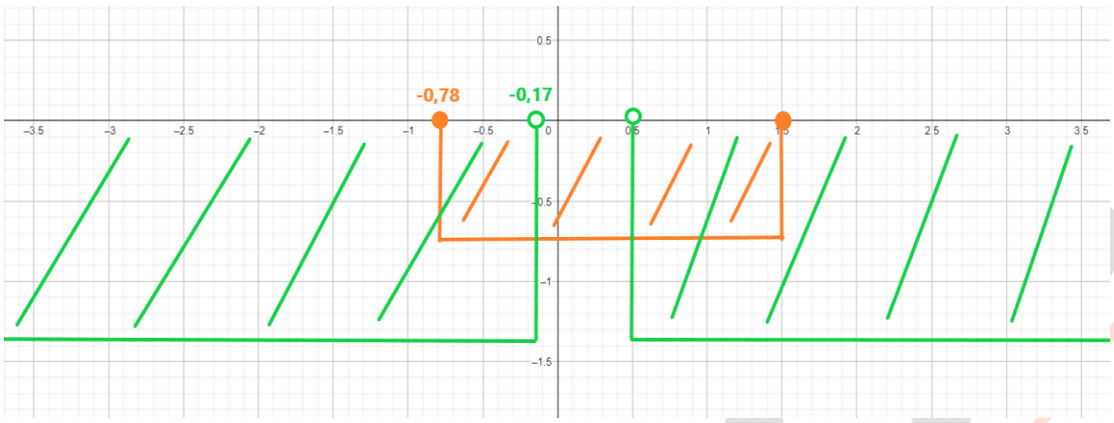
$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \qquad (1)$$

$$|6x - 1| \leq 8 \Leftrightarrow -8 \leq 6x - 1 \leq 8 \Leftrightarrow -7 \leq 6x \leq 9 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{7}{9} \leq x \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{7}{9}, \frac{3}{2}\right] \qquad (2)$$

Συναληθεύουμε τις δύο σχέσεις, προκειμένου να προκύψει η λύση της διπλής ανίσωσης.

$$x \in \left[-\frac{7}{9}, -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$



β) $2x + |3x+1| < 24 \Leftrightarrow |3x+1| < 24 - 2x \Leftrightarrow$

- $Αν\ 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow$

  $3x + 1 < 24 - 2x \Leftrightarrow 5x < 23 \Leftrightarrow$

  $x < \frac{23}{5} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{23}{5}\right)$

- $Αν\ 3x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{3} \Rightarrow$

  $-(3x+1) < 24 - 2x \Leftrightarrow$

  $-3x - 1 < 24 - 2x \Leftrightarrow x > -25 \Leftrightarrow x \in (-25, +\infty)$

Π.χ.3

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις.

α) $\big||x| - 4\big| < 5$ β) $\big||x+1| + 3\big| > 2$ γ) $|2x-1| - 2 - \frac{|6x-3|}{12} \geq \frac{|4x-2|+1}{4}$

Λύση:

α) $\big||x| - 4\big| < 5 \Leftrightarrow -5 < |x| - 4 < 5 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} |x| - 4 > -5 \\ και \\ |x| - 4 < 5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

- $|x| - 4 > -5 \Leftrightarrow |x| > -1$, ταυτότητα, διότι η απόλυτη τιμή είναι μη αρνητικός αριθμός (1)
- $|x| - 4 < 5 \Leftrightarrow |x| < 9 \Leftrightarrow -9 < x < 9$ (2)

$\overset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow}$ Συναληθεύοντας, προκύπτει ότι $x \in (-9, 9)$.

β) $\big||x+1|+3\big| > 2 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} |x+1|+3>2 \\ \text{ή} \\ |x+1|+3<-2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

- $|x+1|+3>2 \Leftrightarrow |x+1|>-1$, ταυτότητα, διότι η απόλυτη τιμή είναι μη αρνητικός αριθμός (1)

- $|x+1|+3<-2 \Leftrightarrow |x+1|<-5$, αδύνατη, διότι η απόλυτη τιμή είναι μη αρνητικός αριθμός (2)

$\overset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow}$ Συναληθεύοντας, προκύπτει ότι $x \in \mathbb{R} \cup \emptyset = \mathbb{R}$.

γ) $|2x-1| - 2 - \frac{|6x-3|}{12} \geq \frac{|4x-2|+1}{4} \Leftrightarrow$

$$|2x-1| - 2 - \frac{3|2x-1|}{12} \geq \frac{2|2x-1|+1}{4} \Leftrightarrow$$

$$|2x-1| - 2 - \frac{|2x-1|}{4} \geq \frac{|2x-1|}{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$4|2x-1| - 8 - |2x-1| \geq 2|2x-1| + 1 \Leftrightarrow$$

$$|2x-1| \geq 9 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x-1 \geq 9 \\ \text{ή} \\ 2x-1 \leq -9 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$2x-1 \geq 9 \Leftrightarrow 2x \geq 10 \Leftrightarrow x \geq 5$ (1)

$2x-1 \leq -9 \Leftrightarrow 2x \leq -8 \Leftrightarrow x \leq -4$ (2)

$\overset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow}$ Συναληθεύοντας, προκύπτει ότι $x \in (-\infty, -4] \cup [5, +\infty)$.

Π.χ.4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - |2\lambda - 4|x + (\lambda-2)^2 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα:

i) ίση με 9, ii) μικρότερη του 2, iii) ανήκει στο διάστημα [3,7].

Λύση:

α) $x^2 - |2\lambda - 4|x + (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Delta = |2\lambda - 4|^2 - 4(\lambda - 2)^2 = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 - 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) =$

$4\lambda^2 - 16\lambda + 16 - 4\lambda^2 + 16\lambda - 16 = 0 \Rightarrow$

Επομένως, έχει μια ρίζα διπλή.

β) Η διπλή ρίζα της εξίσωσης είναι η $\rho = \frac{|2\lambda-4|}{2}$.

i) $\frac{|2\lambda-4|}{2} = 9 \Leftrightarrow |2\lambda - 4| = 18 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\lambda - 4 = 18 \\ \text{ή} \\ 2\lambda - 4 = -18 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\lambda = 22 \\ \text{ή} \\ 2\lambda = -14 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = 11$ ή $\lambda = -7$

ii) $\frac{|2\lambda-4|}{2} < 2 \Leftrightarrow |2\lambda - 4| < 4 \Leftrightarrow$

$-4 < 2\lambda - 4 < 4 \Leftrightarrow 0 < 2\lambda < 8 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 4 \Leftrightarrow \lambda \in (0, 8)$

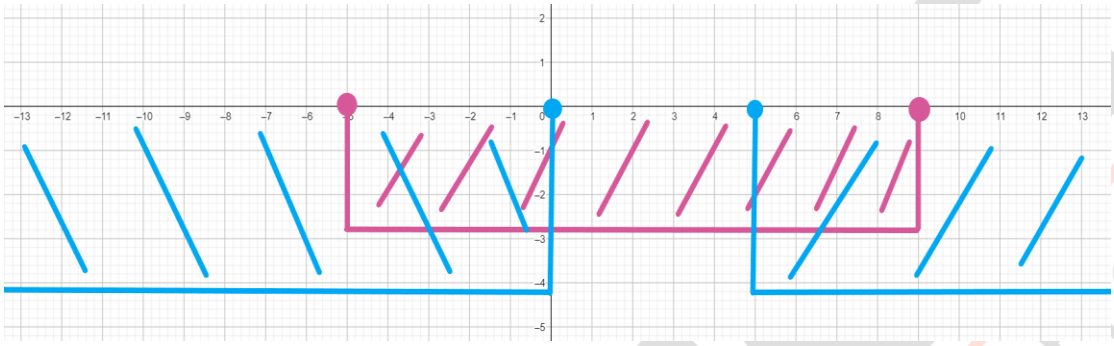
iii) $\frac{|2\lambda-4|}{2} \in [3, 7] \Leftrightarrow 3 \leq \frac{|2\lambda-4|}{2} \leq 7 \Leftrightarrow$

$6 \leq |2\lambda - 4| \leq 14 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} |2\lambda - 4| \geq 6 \\ \text{και} \\ |2\lambda - 4| \leq 14 \end{Bmatrix}$

- $|2\lambda - 4| \geq 6 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\lambda - 4 \geq 6 \\ \text{ή} \\ 2\lambda - 4 \leq -4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\lambda \geq 10 \\ \text{ή} \\ 2\lambda \leq 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \lambda \geq 5 \\ \text{ή} \\ \lambda \leq 0 \end{Bmatrix}$

  Συναληθεύοντας, προκύπτει ότι $x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$. (1)

- $|2\lambda - 4| \leq 14 \Leftrightarrow -14 \leq 2\lambda - 4 \leq 14 \Leftrightarrow$

  $-10 \leq 2\lambda \leq 18 \Leftrightarrow -5 \leq \lambda \leq 9 \Leftrightarrow \lambda \in [-5, 9]$ (2)

$\overset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow}$ Συναληθεύοντας, προκύπτει ότι $x \in [-5, 0] \cup [5, 9]$.