Προσδοκώμενοι Στόχοι Ενότητας

→ Ο/Η μαθητής/τρια θα πρέπει στο πέρας της ενότητας να έχει κατανοήσει σε βάθος:

- την έννοια της δευτεροβάθμιας εξίσωσης,
- την έννοια της Διακρίνουσας,
- τους τύπους του Vieta,
- τις εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού,
- την έννοια της παραμετρικής δευτεροβάθμιας εξίσωσης,
- τη διαδικασία επίλυσης μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Συμπλήρωση Κενών

Σε αυτό το κομμάτι της ενότητας ο/η μαθητής/τρια θα βρει τις παρατηρήσεις, τα κόλπα και τις έξυπνες μεθόδους που χρειάζεται για να καταλάβει πλήρως όλα όσα έμαθε και να καλύψει τυχόντα κενά.

Εξισώσεις $2^{ου}$ Βαθμού

Ορισμός:

Μια εξίσωση της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\alpha\neq 0$ ονομάζεται εξίσωση δευτέρου βαθμού ή δευτεροβάθμια εξίσωση.

↝ Αν ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι ίσος μηδέν, η τάξη της εξίσωσης υποβαθμίζεται.

Για να επιλύσουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση υπάρχουν δύο τρόποι. Ο πρώτος τρόπος είναι να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο και να δημιουργήσουμε ένα γινόμενο δύο παραγόντων της μορφής $(x-\rho_1)(x-\rho_2)=0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\rho_1 \\ \text{ή} \\ x=\rho_2 \end{Bmatrix}$.

Η παραγοντοποίηση όμως δεν είναι πάντα εύκολη υπόθεση. Συνεπώς, χρειαζόμαστε έναν τρόπο επίλυσης που θα μπορούμε να τον εφαρμόζουμε σε οποιαδήποτε περίπτωση. Ο τρόπος αυτός είναι η χρήση της διακρίνουσας.

Διακρίνουσα

Ορισμός:

«Διακρίνουσα» ονομάζεται ο τύπος $\boldsymbol{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$, όπου α, β, γ οι σταθεροί συντελεστές μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Η διακρίνουσα μας επιτρέπει να διακρίνουμε τις ρίζες του τριωνύμου, όταν αυτές υπάρχουν.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για τις πιθανές λύσεις μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης:

- Αν $\boldsymbol{\Delta > 0}$, τότε το τριώνυμο έχει **δύο ρίζες πραγματικές και άνισες** της μορφής $\boldsymbol{\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$.
- Αν $\boldsymbol{\Delta = 0}$, τότε το τριώνυμο έχει **μία ρίζα διπλή** της μορφής $\boldsymbol{\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}}$.
- Αν $\boldsymbol{\Delta < 0}$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$(σύνολο των πραγματικών αριθμών).

Π.χ.

α) $x^2 - 5x + 6 = 0 \;\Rightarrow$

$$\Delta = (-5)^2 - 4*1*6 = 25 - 24 = 1 > 0 \;\Rightarrow$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2*1} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \rho_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ \rho_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{Bmatrix}$$

Δηλαδή, $x^2 - 5x + 6 = 0 \;\Leftrightarrow (x-3)(x-2) = 0$

β) $4x^2 - 4x + 1 = 0 \;\Rightarrow$

$$\Delta = (-4)^2 - 4*4*1 = 16 - 16 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\rho = \frac{-(-4)}{2*4} \;\Rightarrow\; \rho = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Δηλαδή, $4x^2 - 4x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0$.

γ) $2x^2 + x + 8 = 0 \Rightarrow$

$\varDelta = 1^2 - 4 * 2 * 8 = 1 - 64 = -63 < 0 \Rightarrow$

Η εξίσωση είναι αδύνατη, δηλαδή το τριώνυμο δεν έχει ρίζες.

δ) $x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ \text{ή} \\ x = -5 \end{Bmatrix}$

ε) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 3 \\ \text{ή} \\ x = -3 \end{Bmatrix}$

στ) $x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta$

Παρατηρήσεις

- Όταν μια εξίσωση είναι αδύνατη, σημαίνει ότι δεν έχει ρίζες. Δηλαδή, δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι, όταν μπούνε στη θέση της μεταβλητής, να επιστρέφουν την τιμή 0 ως αποτέλεσμα.

- Όταν ένα τριώνυμο έχει έναν από τους σταθερούς συντελεστές β ή γ ίσο με 0, τότε δεν είναι απαραίτητη η χρήση της διακρίνουσας για την επίλυσή του(όπως στα τρία τελευταία παραδείγματα).

- Οι εξισώσεις που έχουν διακρίνουσα ίση με το μηδέν έχουν μία ρίζα διπλή. Στην πραγματικότητα, τα τριώνυμα που έχουν διακρίνουσα ίση με το μηδέν είναι τα «**τέλεια τετράγωνα**».

- **Κάθε** τριώνυμο γράφεται **ισοδύναμα** ως εξής:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}(x - \rho_1)(x - \rho_2) = 0 \Leftrightarrow$$

  - $\varDelta > 0 \Rightarrow ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}(x - \rho_1)(x - \rho_2) = 0$
  - $\varDelta = 0 \Rightarrow ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}(x - \rho_1)(x - \rho_2) \overset{\rho_1 = \rho_2}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{\alpha}(x - \rho)^2 = 0$
  - $\varDelta < 0 \Rightarrow ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow ax^2 + \beta x + \gamma \neq 0$

Προσοχή!

Δεν πρέπει ποτέ να ξεχνάμε το συντελεστή α. Χωρίς αυτόν έχουμε εξισώσει στην πραγματικότητα το αρχικό τριώνυμο με κάποιο άλλο που δεν είναι ισοδύναμό τού.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Να επιλύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α) $5x^2 - 12x + 4 = 0$

β) $x^2 - 4x + 1 = 0$

γ) $\frac{x^2}{6} - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

δ) $-x^2 + 5x - 8 = 0$

Λύση:

α) $5x^2 - 12x + 4 = 0 \Rightarrow$

$$\Delta = 12^2 - 4*5*4 = 144 - 80 = 64 > 0 \Rightarrow \rho_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{64}}{2*5}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \rho_1 = \dfrac{12+8}{10} = 2 \\ \rho_2 = \dfrac{12-8}{10} = 0{,}4 \end{Bmatrix}$$

β) $x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Delta = (-4)^2 - 4*1*1 = 16 - 4 = 12 > 0 \Rightarrow \rho_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{12}}{2*1}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \rho_1 = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3} \\ \rho_2 = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

γ) $\frac{x^2}{6} - \frac{1}{2}x - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4*\frac{1}{6}*(-3) = \frac{1}{4} + \frac{12}{6} = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} > 0 \Rightarrow$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2*\frac{1}{6}} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \rho_1 = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{12}{2} = 6 \\ \rho_2 = \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = -\dfrac{6}{2} = -3 \end{Bmatrix}$$

δ) $-x^2+5x-8=0 \Rightarrow$

$\Delta = 5^2-4*(-1)*(-8) = 25-32 = -7 < 0 \Rightarrow$

Είναι αδύνατη, συνεπώς δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 2:

Να επιλύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α) $(x+2)^3 - x(x-3)^2 = 15-(3x+1)(1-3x)$

β) $(3x+2)^2-(x-2)(3-x) = 6-4(x-1)^2$

Λύση:

α) $(x+2)^3 - x(x-3)^2 = 15-(3x+1)(1-3x) \Leftrightarrow$

$x^3+6x^2+12x+8-x(x^2-6x+9) = 15-(1-9x^2) \Leftrightarrow$

$x^3+6x^2+12x+8-x^3+6x^2-9x = 15-1+9x^2 \Leftrightarrow$

$12x^2+3x+8 = 14+9x^2 \Leftrightarrow$

$3x^2+3x-6=0 \Leftrightarrow$

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$

$\Delta = 1+8 = 9 > 0 \Leftrightarrow$

$$\rho_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \rho_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \rho_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{Bmatrix}$$

β) $(3x+2)^2-(x-2)(3-x) = 6-4(x-1)^2 \Leftrightarrow$

$9x^2+12x+4-(3x-6-x^2+2x) = 6-4(x^2-2x+1) \Leftrightarrow$

$9x^2+12x+4-5x+6+x^2 = 6-4x^2+8x-4 \Leftrightarrow$

$10x^2+7x+4 = -4x^2+8x-4 \Leftrightarrow$

$14x^2-x+8=0 \Leftrightarrow$

$\Delta = 1-4*14*8 = 1-448 = -447 < 0 \Rightarrow$

Είναι αδύνατη, συνεπώς δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Τύποι του Vieta

Έστω ένα τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ με διακρίνουσα θετική. Τότε, το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις ρ_1, ρ_2. Τότε, ορίζονται το άθροισμα και το γινόμενο των δύο ριζών ως:

- $\boldsymbol{S = \rho_1 + \rho_2 \Leftrightarrow S = -\frac{\beta}{\alpha}}$
- $\boldsymbol{P = \rho_1 \rho_2 \Leftrightarrow P = \frac{\gamma}{\alpha}}$

Οι παραπάνω τύποι είναι γνωστοί ως «**τύποι του Vieta**». Με τη βοήθειά τους μπορούμε να ορίσουμε το αρχικό τριώνυμο με έναν ισοδύναμο τρόπο.

$$\boxed{ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 - Sx + P = 0}}$$

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Να βρείτε τη δευτεροβάθμια εξίσωση που να έχει ρίζες τους αριθμούς:

α) $4 \; και \; \frac{1}{4}$

β) $2 + \sqrt{11} \;\; και \; 2 - \sqrt{11}$

γ) 6 και – 2

Λύση:

Σύμφωνα με τους τύπους του Vieta, μπορούμε να γράψουμε ένα τριώνυμο με τη χρήση του αθροίσματος και του γινομένου των ριζών του, ως:

$x^2 - Sx + P = 0$, όπου $S = \rho_1 + \rho_2$ και $P = \rho_1 \rho_2$. Συνεπώς:

α) $S = \rho_1 + \rho_2 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ και $P = \rho_1 \rho_2 = 4 * \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow$

$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{17}{4}x + 1 = 0$

β) $S = \rho_1 + \rho_2 = 2 + \sqrt{11} + 2 - \sqrt{11} = 4$ και

$P = \rho_1 \rho_2 = (2 + \sqrt{11})(2 - \sqrt{11}) = 4 - 11 = -7 \Leftrightarrow$

$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 7 = 0$

γ) $S = \rho_1 + \rho_2 = 6 - 2 = 4$ και $P = \rho_1 \rho_2 = 6(-2) = -12 \Leftrightarrow$

$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

Άσκηση 2:

Έστω α και β δύο πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$\alpha + \beta = -2 \;\; και \;\; \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -24.$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = -6$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α και β και ύστερα να τους υπολογίσετε.

Λύση:

α) $\alpha + \beta = -2 \;\; και \;\; \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -24 \Rightarrow$

$\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -24 \Leftrightarrow$

$\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -24 \Leftrightarrow$

$\alpha^2\beta(\alpha + \beta) + \alpha\beta^2(\alpha + \beta) = -24 \Leftrightarrow$

$(\alpha + \beta)(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2) = -24 \overset{\alpha+\beta=-2}{\Longleftrightarrow}$

$-2[\alpha\beta(\alpha + \beta)] = -24 \overset{\alpha+\beta=-2}{\Longleftrightarrow}$

$-2\alpha\beta = 12 \Leftrightarrow \alpha\beta = -6$

β) Εφόσον γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των δύο αριθμών, μπορούμε να ορίσουμε εξίσωση δευτέρου βαθμού που να έχει τους αριθμούς α και β ρίζες. Σύμφωνα με τους τύπους του Vieta, ισχύει $x^2 - Sx + P = 0$, όπου $S = \rho_1 + \rho_2$ και $P = \rho_1\rho_2$.

Συνεπώς:

$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha\beta)P = 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 + 2x - 6 = 0$

$\Delta = 4 + 24 = 28 > 0 \ \Rightarrow$

$$\rho_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4*7}}{2} \ \Rightarrow \begin{Bmatrix} \rho_1 = \frac{-2+2\sqrt{7}}{2} = -1 + \sqrt{7} \\ \rho_2 = \frac{-2-2\sqrt{7}}{2} = -1 - \sqrt{7} \end{Bmatrix}$$

Άσκηση 3:

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + ax - 5, \ a \in \mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $\rho_1 = 1$, τότε να προσδιορίσετε τον αριθμό α.

β) Για α = 3, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

Λύση:

α) Σύμφωνα με τους τύπους του Vieta ισχύει:

$$\begin{Bmatrix} S = \rho_1 + \rho_2 \\ S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\alpha}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow 1 + \rho_2 = -\frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{Bmatrix} P = \rho_1\rho_2 \\ P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-5}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \ 1 * \rho_2 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \ \rho_2 = -\frac{5}{2}$$

Άρα, $1 + \rho_2 = -\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = -2(1 + \rho_2) = -2\left(1 - \frac{5}{2}\right) = -2\left(-\frac{3}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \alpha = 3 \ \Leftrightarrow 2x^2 + ax - 5 = 2x^2 + 3x - 5$

β) $2x^2 + 3x - 5 = 0 \ \Rightarrow$

Αφού γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, μπορούμε να το παραγοντοποιήσουμε επιτόπου. Συνεπώς:

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \ \Leftrightarrow \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2) = 0 \ \overset{\substack{\alpha=2 \\ \rho_1=1 \\ \rho_2=-\frac{5}{2}}}{\Longleftrightarrow} 2x^2 + 3x - 5 = 2(x - 1)\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

$$= (x - 1)(2x + 5)$$

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού

Υπάρχουν εξισώσεις που δεν είναι δευτεροβάθμιες. Ωστόσο, μπορούμε με τον κατάλληλο χειρισμό να τις ανάγουμε σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού και να τις επιλύσουμε με την ανάλογη μεθοδολογία. Οι εξισώσεις που μπορούν να αναχθούν σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού έχουν δύο συγκεκριμένες μορφές.

1η Μορφή: $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0}$

Επειδή ισχύει $x^2 = |x|^2$, προκύπτει $\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha|x|^2 + \beta|x| + \gamma = 0$. Συνεπώς, θέτουμε $|x| = \omega \geq 0$, οπότε η αρχική εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$\alpha|x|^2 + \beta|x| + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0,\ \ \alpha \neq 0.$$

2η Μορφή: $\boldsymbol{\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0}$ $\rightsquigarrow$ «***Διτετράγωνη***»

Η συγκεκριμένη μορφή εξίσωσης ονομάζεται διτετράγωνη και επιλύεται, θέτοντας $x^2 = \omega \geq 0$, οπότε η αρχική εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0,\ \ \alpha \neq 0.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Ένα από τα μεγαλύτερα και πιο συνηθισμένα λάθη που γίνονται είναι η αποδοχή όλων των πιθανών λύσεων, στην περίπτωση που προκύψει θετική διακρίνουσα. Τόσο η απόλυτη τιμή όσο και το τετράγωνο ενός αριθμού είναι πάντα μη αρνητικοί όροι.

Επομένως, δεν μπορούμε ποτέ να κάνουμε δεκτή μια λύση η οποία αρνητική, γιατί στο επόμενο βήμα που θα γυρίσουμε να υπολογίσουμε το x μέσω της βοηθητικής μεταβλητής ω που χρησιμοποιήσαμε, θα καταλήξουμε σε κάτι που δε θα ισχύει.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Να επιλύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α) $x^2 - 3|x| - 4 = 0$

β) $2x^2 - 5|x| + 1 = 0$

γ) $2x^4 + 10x^2 + 8 = 0$

δ) $-5x^4 + 11x^2 - 2 = 0$

Λύση:

α) $x^2 - 3|x| - 4 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 3|x| - 4 = 0 \Rightarrow$

Θέτουμε $|x| = \omega \geq 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται ως εξής:

$|x|^2 - 3|x| - 4 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 3\omega - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 9 + 16 = 25 > 0 \Rightarrow$

$$\omega_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \omega_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ \omega_2 = \frac{3-5}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

Επειδή $|x| = \omega \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι η λύση ω_2 απορρίπτεται, διότι η απόλυτη τιμή επιστρέφει πάντα μη αρνητικές τιμές. Επομένως:

$$|x| = \omega_1 = 4 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 4 \\ \text{ή} \\ x = -4 \end{array} \right\}$$

β) $2x^2 - 5|x| + 1 = 0 \Leftrightarrow 2|x|^2 - 5|x| + 1 = 0 \Rightarrow$

Θέτουμε $|x| = \omega \geq 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται ως εξής:

$2|x|^2 - 5|x| + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\omega^2 - 5\omega + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 25 - 8 = 13 > 0 \Rightarrow$

$$\omega_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \omega_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{4} \\ \omega_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

Η λύση ω_1 είναι σίγουρα δεκτή, αφού είναι θετική. Θα εξετάσουμε τη λύση ω_2.

$\sqrt{13} < 5, αφού\ (\sqrt{13})^2 = 13 < 5^2 = 25\ , άρα\ \omega_2 > 0.$

Επομένως, γίνονται και οι δύο ρίζες δεκτές. Άρα:

$$|x| = \begin{cases} \omega_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{4} \\ \text{ή} \\ \omega_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{13}}{4} \\ \text{ή} \\ x = \frac{-5-\sqrt{13}}{4} \end{cases} \\ \text{ή} \\ \begin{cases} x = \frac{5-\sqrt{13}}{4} \\ \text{ή} \\ x = \frac{-5+\sqrt{13}}{4} \end{cases} \end{cases}$$

γ) $2x^4 + 10x^2 + 8 = 0 \Rightarrow$

Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται ως εξής:

$2x^4 + 10x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 2\omega^2 + 10\omega + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 100 - 64 = 36 > 0 \Rightarrow$

$$\omega_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{36}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{-10+6}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \\ \omega_2 = \frac{-10-6}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Επειδή $x^2 = \omega \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι και οι δύο λύσεις απορρίπτονται, διότι η απόλυτη τιμή επιστρέφει πάντα μη αρνητικές τιμές. Επομένως, η αρχική εξίσωση δεν έχει καμία λύση.

δ) $-5x^4 + 11x^2 - 2 = 0 \Rightarrow$

Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται ως εξής:

$-5x^4 + 11x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow -5\omega^2 + 11\omega - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 121 - 40 = 81 > 0 \Rightarrow$

$$\omega_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{81}}{-10} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{-11+9}{-10} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5} \\ \omega_2 = \frac{-11-9}{-10} = \frac{-20}{-10} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Και οι δύο λύσεις γίνονται δεκτές, αφού είναι θετικές.

Επομένως:

$$x^2 = \left\{\begin{matrix} \omega_1 = \frac{1}{5} \\ ή \\ \omega_2 = 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \left\{\begin{matrix} x = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ ή \\ x = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{matrix}\right\} \\ ή \\ \left\{\begin{matrix} x = \sqrt{2} \\ ή \\ x = -\sqrt{2} \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\}$$

Άσκηση 2:

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α) $(x-4)^2 - 7|x-4| - 8 = 0$

β) $2\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 - \left|\frac{5x}{2} - 5\right| + 2 = 0$

Λύση:

α) $(x-4)^2 - 7|x-4| - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$|x-4|^2 - 7|x-4| - 8 = 0 \Rightarrow$

Θέτουμε $|x-4| = \omega \geq 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται ως εξής:

$|x-4|^2 - 7|x-4| - 8 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 7\omega - 8 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 49 + 32 = 81 > 0 \Rightarrow$

$$\omega_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \omega_1 = \frac{7+9}{2} = \frac{16}{2} = 8 \\ \omega_2 = \frac{7-9}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

Επειδή $|x-4| = \omega \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι η λύση ω_2 απορρίπτεται, διότι η απόλυτη τιμή επιστρέφει πάντα μη αρνητικές τιμές.

Επομένως:

$$|x-4| = \omega_1 = 8 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x - 4 = 8 \\ ή \\ x - 4 = -8 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = 12 \\ ή \\ x = -4 \end{matrix}\right\}$$

β) $2\left(\frac{x}{2}-1\right)^2-\left|\frac{5x}{2}-5\right|+2=0 \Leftrightarrow$

$2\left|\frac{x}{2}-1\right|^2-5\left|\frac{x}{2}-1\right|+2=0 \Rightarrow$

Θέτουμε $\left|\frac{x}{2}-1\right|=\omega\geq 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται ως εξής:

$2\left|\frac{x}{2}-1\right|^2-5\left|\frac{x}{2}-1\right|+2=0 \Leftrightarrow\ 2\omega^2-5\omega+2=0 \Rightarrow$

$\Delta=25-16=9>0\ \Rightarrow$

$$\omega_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\omega_1=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2\\ \omega_2=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

Επειδή $\left|\frac{x}{2}-1\right|=\omega\geq 0$, γίνονται και οι δύο ρίζες δεκτές.

Άρα:

$$\left|\frac{x}{2}-1\right|=\left\{\begin{matrix}\omega_1=2\\ \text{ή}\\ \omega_2=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\left\{\begin{matrix}\frac{x}{2}-1=2\\ \text{ή}\\ \frac{x}{2}-1=-2\end{matrix}\right\}\\ \text{ή}\\ \left\{\begin{matrix}\frac{x}{2}-1=\frac{1}{2}\\ \text{ή}\\ \frac{x}{2}-1=-\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\left\{\begin{matrix}x=6\\ \text{ή}\\ x=-2\end{matrix}\right\}\\ \text{ή}\\ \left\{\begin{matrix}x=3\\ \text{ή}\\ x=1\end{matrix}\right\}\end{matrix}\right\}$$

Άσκηση 3:

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α) $(x+3)^2-2\sqrt{x^2+6x+9}-15=0$

β) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6+35\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+216=0$

γ) $\frac{2}{x^2-3x}+\frac{x-2}{x}=\frac{x}{4(x-3)}$

Λύση:

α) $(x+3)^2 - 2\sqrt{x^2+6x+9} - 15 = 0 \Leftrightarrow$

$(x+3)^2 - 2\sqrt{(x+3)^2} - 15 = 0 \Leftrightarrow$

$|x+3|^2 - 2|x+3| - 15 = 0 \Leftrightarrow$

Θέτουμε $|x+3| = \omega \geq 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$|x+3|^2 - 2|x+3| - 15 = 0 \Leftrightarrow \ \omega^2 - 2\omega - 15 = 0 \Rightarrow$$

$\Delta = 4 + 60 = 64 > 0 \ \Rightarrow$

$$\omega_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \omega_1 = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \omega_2 = \frac{2-8}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

Επειδή $|x+3| = \omega \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι η λύση ω_2 απορρίπτεται, διότι η απόλυτη τιμή επιστρέφει πάντα μη αρνητικές τιμές. Επομένως:

$$|x+3| = \omega_1 = 5 \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+3=5 \\ \text{ή} \\ x+3=-5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=2 \\ \text{ή} \\ x=-8 \end{array} \right\}$$

β) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 + 35\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 + 216 = 0 \Leftrightarrow$

Θέτουμε $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = \omega$, οπότε η εξίσωση γράφεται ως εξής:

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 + 35\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 + 216 = 0 \Leftrightarrow \ \omega^2 + 35\omega + 216 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 1225 - 864 = 361 > 0 \ \Rightarrow$

$$\omega_{1,2} = \frac{-35 \pm \sqrt{361}}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \omega_1 = \frac{-35+19}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \\ \omega_2 = \frac{-35-19}{2} = \frac{-54}{2} = -27 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

Επειδή $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = \omega$ είναι υψωμένο στον κύβο, δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός ως προς το πρόσημο της παράστασης.

Οπότε προκύπτει:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=\begin{Bmatrix}\omega_1=-8\\ ή\\ \omega_2=-27\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}x+\frac{1}{x}=-\sqrt[3]{|-8|}\\ ή\\ x+\frac{1}{x}=-\sqrt[3]{|-27|}\end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}x+\dfrac{1}{x}=-2\\ ή\\ x+\dfrac{1}{x}=-3\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}x^2+2x+1=0\\ ή\\ x^2+3x+1=0\end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

- $x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$

- $x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow \Delta=9-4=5>0 \Rightarrow \rho_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{Bmatrix}\rho_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\\ \rho_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\end{Bmatrix}$

Συνολικά: $\begin{Bmatrix}x=-1\\ ή\\ x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\\ ή\\ x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\end{Bmatrix}$

γ) $\frac{2}{x^2-3x}+\frac{x-2}{x}=\frac{x}{4(x-3)} \Leftrightarrow$

Πρέπει: $4x(x-3)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x\neq 3$

$ΕΚΠ=4x(x-3) \Rightarrow$

$4x(x-3)\frac{2}{x^2-3x}+4x(x-3)\frac{x-2}{x}=4x(x-3)\frac{x}{4(x-3)} \Leftrightarrow$

$8+4(x-3)(x-2)=x^2 \Leftrightarrow$

$4(x^2-5x+6)-x^2+8=0 \Leftrightarrow$

$4x^2-20x+24-x^2+8=0 \Leftrightarrow \quad 3x^2-20x+32=0 \Rightarrow$

$\Delta=400-384=16>0 \Rightarrow$

$\rho_{1,2}=\frac{20\pm\sqrt{16}}{6} \Rightarrow \begin{Bmatrix}\rho_1=\frac{20+4}{6}=\frac{24}{6}=4\\ \rho_2=\frac{20-4}{6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}\end{Bmatrix}$

Συναληθεύουμε με το πεδίο ορισμού και αποδεχόμαστε και τις δύο τιμές.

Παρατηρήσεις

- Μια εξίσωση μπορεί να είναι διτετράγωνη και με άλλους τρόπους πέραν του κλασσικού, όπως στο (β) ερώτημα της παραπάνω άσκησης. Τις χειριζόμαστε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, δίνοντας προσοχή στη δύναμη που θέτουμε κάθε φορά ίση με ω, προκειμένου να μην αποδεχτούμε ή απορρίψουμε κάποια τιμή που δεν πρέπει. Το συγκεκριμένο ερώτημα είναι σύνθετο, ωστόσο παρατηρώντας το βήμα προς βήμα, βλέπουμε ότι πρόκειται για την ίδια διαδικασία, απλώς επαναλαμβανόμενη.

- Στο (γ) ερώτημα έχουμε κλασματική δευτεροβάθμια εξίσωση. Τις χειριζόμαστε όπως και τις πρωτοβάθμιες κλασματικές. Πρώτα ορίζουμε το πεδίο ορισμού τους και έπειτα βρίσκουμε το ελάχιστον κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών, προκειμένου να την απλοποιήσουμε.

Παραμετρική Μορφή

Ορισμός:

Μια δευτεροβάθμια εξίσωση της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\alpha\neq 0$, όπου οι συντελεστές α, β ή γ είναι παράμετροι(όχι απαραίτητα όλοι· έστω ένας) ονομάζεται **παραμετρική**.

Στις παραμετρικές εξισώσεις συμβολίζουμε συνήθως την παράμετρο με το ελληνικό γράμμα λ, για να την ξεχωρίζουμε από την άγνωστη μεταβλητή, για την οποία λύνουμε την εξίσωση. Στην πραγματικότητα και η παράμετρος είναι μεταβλητή.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Δίνεται το τριώνυμο $(\lambda-1)x^2-4\lambda x+3-\lambda=0$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός, ώστε το δοθέν τριώνυμο:

α) να είναι δευτέρου βαθμού

β) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Λύση:

α) Για να είναι η εξίσωση δευτεροβάθμια, πρέπει ο συντελεστής του x^2 να είναι διάφορος του μηδενός. Δηλαδή: $\lambda-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1$.

Δηλαδή: $\lambda \in \mathbb{R}/\{1\}$ ή $\lambda \in (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. (1)

β) Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, πρέπει να έχει θετική διακρίνουσα. Συνεπώς:

$$\Delta = 16\lambda^2-4(\lambda-1)(3-\lambda)=$$

$$16\lambda^2-4(3\lambda-3-\lambda^2+\lambda)=16\lambda^2-16\lambda+12+4\lambda^2=$$

$$20\lambda^2-16\lambda+12 \Rightarrow$$

Θέλουμε η διακρίνουσα να είναι θετική, άρα να θέλουμε να είναι πάντα θετικό το αποτέλεσμά της. Συνεπώς, το καινούργιο τριώνυμο στο οποίο έχουμε καταλήξει, το $20\lambda^2-16\lambda+12$ δεν πρέπει να αλλάξει ποτέ πρόσημο. Θα βρούμε τη δική του διακρίνουσα.

$$20\lambda^2-16\lambda+12=0 \Leftrightarrow 5\lambda^2-4\lambda+3=0 \Rightarrow$$

$$\Delta' = 16-4*5*3=16-60=-44<0 \Rightarrow$$

Συνεπώς, το τριώνυμο δεν μηδενίζεται ποτέ, αφού έχει αρνητική διακρίνουσα. Άρα, διατηρεί σταθερό πρόσημο για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Αυτό που μας απασχολεί είναι να διαπιστώσουμε, εάν αυτό το πρόσημο είναι θετικό ή αρνητικό. Αν είναι πάντα θετικό, θα ικανοποιείται το ζητούμενο ερώτημα, αλλά, αν είναι αρνητικό, το αρχικό τριώνυμο δε θα έχει ποτέ δύο ρίζες άνισες και πραγματικές.

Σε μια τέτοια περίπτωση ελέγχουμε το συντελεστή α. Με βάση το πρόσημο του α προκύπτει και το πρόσημο του τριωνύμου. Επειδή $5 > 0$, συμπεραίνουμε ότι και το $5\lambda^2 - 4\lambda + 3 > 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. (2)

Άρα, αρκεί να συναληθεύσουμε το (α) ερώτημα και έχουμε ολοκληρώσει την απάντησή μας.

$$\xLeftrightarrow{(1),(2)} \lambda \in \mathbb{R}/\{1\} \ \text{ ή } \ \lambda \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

Άσκηση 2:

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - 3\lambda x + 2\lambda - 1 = 0$.

α) Για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο έχει μια ρίζα διπλή;

β) Για τη μη μηδενική τιμή που βρήκατε παραγοντοποιήστε το τριώνυμο.

Λύση:

α) $\lambda x^2 - 3\lambda x + 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Delta = 9\lambda^2 - 4\lambda(2\lambda - 1) = 9\lambda^2 - 8\lambda^2 + 4\lambda = \lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda + 4)$$

Για να έχει το τριώνυμο μία ρίζα διπλή πρέπει $\Delta = 0$.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 4) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda = 0 \\ \text{ή} \\ \lambda = -4 \end{array} \right\}$$

β) Για $\lambda = -4 \Rightarrow -4x^2 + 12x - 9 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$

$$\rho = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2} \Rightarrow -4x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow -4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

Άσκηση 3:

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 2)x - 2\lambda = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρεθεί για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει:

i) ρίζες αντίθετες ii) ρίζες αντίστροφες.

Λύση:

α) Για να έχει το δοθέν τριώνυμο πραγματικές ρίζες, αρκεί $\Delta \geq 0$.

$x^2 + (\lambda - 2)x - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow$

$\Delta = (\lambda - 2)^2 + 8\lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 8\lambda = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 \geq 0 \Rightarrow$

Πράγματι, η διακρίνουσα είναι πάντα μη αρνητική, συνεπώς το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

β) i) Εφόσον θέλουμε το τριώνυμο να έχει ρίζες αντίθετες, σκεπτόμενοι/ες την ιδιότητα των αντίθετων αριθμών, καταλαβαίνουμε ότι το μεταξύ τους άθροισμα πρέπει να είναι ίσο με το μηδέν. Δηλαδή,

$$S = x_1 + x_2 = 0 \overset{S=-\frac{\beta}{\alpha}}{\Longleftrightarrow} -\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\beta = \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

ii) Εφόσον θέλουμε το τριώνυμο να έχει ρίζες αντίστροφες, σκεπτόμενοι/ες την ιδιότητα των αντίστροφων αριθμών, καταλαβαίνουμε ότι το μεταξύ τους γινόμενο πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα Δηλαδή,

$$P = x_1 x_2 = 1 \overset{P=\frac{\gamma}{\alpha}}{\Longleftrightarrow} \frac{\gamma}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \gamma = \alpha \Leftrightarrow$$

$$-2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Παρατηρήσεις

- Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι ένα τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές χωρίς κάποια επιπλέον πληροφορία(π.χ. και άνισες), τότε αρκεί $\Delta \geq 0$.

- Όταν μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε ρίζες **αντίθετες ή αντίστροφες**, τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους του Vieta. Δε χρειάζεται να έχουμε κάποια παραπάνω πληροφορία πέραν από το ίδιο το τριώνυμο για να απαντήσουμε σε ένα τέτοιο ερώτημα.