Προσδοκώμενοι Στόχοι Ενότητας:

→ Ο/Η μαθητής/τρια θα πρέπει στο πέρας της ενότητας να έχει κατανοήσει σε βάθος:

- την έννοια της εξίσωσης,
- τα πιθανά αποτελέσματα μιας εξίσωσης,
- την έννοια της παραμετρικής εξίσωσης,
- την έννοια της κλασματικής εξίσωσης,
- τους τρόπους που επιλύουμε μια εξίσωση 1ου βαθμού.

Συμπλήρωση Κενών:

Σε αυτό το κομμάτι της ενότητας ο/η μαθητής/τρια θα βρει τις παρατηρήσεις, τα κόλπα και τις έξυπνες μεθόδους που χρειάζεται για να καταλάβει πλήρως όλα όσα έμαθε και να καλύψει τυχόντα κενά.

Εξισώσεις 1ου Βαθμού

Ορισμός:

«Εξίσωση» ονομάζεται κάθε ισότητα που συνίσταται από δύο μέλη και έχει μια άγνωστη μεταβλητή(έστω x). Σκοπός της εξίσωσης είναι μέσω της επίλυσής της να βρεθούν εκείνες οι τιμές που την επαληθεύουν, δηλαδή όλοι οι πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι, όταν αντικαταστήσουν τη μεταβλητή, επαληθεύουν τη δοθείσα ισότητα. Οι εξισώσεις της μορφής $\boldsymbol{\alpha x + \beta = 0}$ ή $\boldsymbol{\alpha x = -\beta}$ ονομάζονται **εξισώσεις πρώτου βαθμού ή πρωτοβάθμιες εξισώσεις.** Οι αριθμοί α και β ονομάζονται συντελεστές της εξίσωσης.

Ερώτημα: Πόσες λύσεις μπορεί να έχει μια εξίσωση;

↝ Οι λύσεις που μπορεί να έχει μια εξίσωση καθορίζονται από τους συντελεστές της. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για τις λύσεις μιας πρωτοβάθμιας εξίσωσης.

- $Αν\ \alpha \neq 0,\ τότε\ \boldsymbol{x = -\frac{\beta}{\alpha}}$ και η εξίσωση έχει **μοναδική λύση.**
- $Αν\ \alpha = 0\ και\ \beta \neq 0,$ η εξίσωση δεν έχει καμία λύση, δηλαδή είναι **αδύνατη.**
- $Αν\ \alpha = 0\ και\ \beta = 0,$ τότε αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό και ονομάζεται **ταυτότητα ή αόριστη.**

Π.χ.

α) $2x + 7 = 9 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

β) $4(x-3) = 24 \Leftrightarrow 4x - 12 = 24 \Leftrightarrow 4x = 36 \Leftrightarrow x = 9$

γ) $(\sqrt{3}-1)x = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}x + 4 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - x = \sqrt{3}x + 4 \Leftrightarrow x = -4$

δ) $(x-1)^2 = (x-3)(x+3) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 9 \Leftrightarrow -2x = -10 \Leftrightarrow x = 5$

ε) $\frac{1-4x}{2} + 3x = 5 - 6x \Leftrightarrow 1 - 4x + 6x = 10 - 12x \Leftrightarrow 14x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{14}$

στ) $2(3x-1) - 3(2x-1) = 4 \Leftrightarrow 6x - 2 - 6x + 3 = 4 \Leftrightarrow 1 = 4 \not\Leftrightarrow$

άτοπο, καθώς $1 \neq 4$, άρα αδύνατη

ζ) $2x - \frac{5-x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3} \Leftrightarrow 6x - 5 + x = -5 + 7x \Leftrightarrow 7x - 5 = 7x - 5 \Leftrightarrow$

ταυτότητα ή αόριστη, αφού επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Να επιλύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

α) $\frac{|x|+4}{3} - \frac{|x|+6}{5} = \frac{7}{3}$

β) $|8x+9| = -x+2$

γ) $\frac{x^2}{3} - \frac{6x+1}{4} = \frac{x-2}{6} - 2$

δ) $(x+1)^2 + (2x-5)^2 + (3-x)^2 = 0$

Λύση:

α) $\frac{|x|+4}{3} - \frac{|x|+6}{5} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 5(|x|+4) - 3(|x|+6) = 40 \Leftrightarrow$

$$5|x| + 20 - 3|x| - 18 = 40 \Leftrightarrow 2|x| = 38 \Leftrightarrow |x| = 19 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 19 \\ \text{ή} \\ x = -19 \end{Bmatrix}$$

β) $|8x+9| = -x+2 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 8x+9 = -x+2 \\ \text{ή} \\ 8x+9 = x-2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 9x = -7 \\ \text{ή} \\ 7x = -11 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = -\frac{7}{9} \\ \text{ή} \\ x = -\frac{11}{7} \end{Bmatrix}$

γ) $\frac{x^2}{3} - \frac{6x+1}{4} = \frac{x-2}{6} - 2 \Leftrightarrow$

$4x^2 - 3(6x+1) = 2(x-2) - 24 \Leftrightarrow$

$4x^2 - 18x - 3 = 2x - 4 - 24 \Leftrightarrow$

$4x^2 - 20x + 25 = 0 \Leftrightarrow$

$(2x)^2 - 2 * 2x * 5 + 5^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(2x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

δ) $(x+1)^2+(2x-5)^2+(3-x)^2=0 \;\Leftrightarrow$

άθροισμα μη αρνητικών όρων ίσο με το μηδέν, άρα έκαστο ίσο με μηδέν $\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{matrix} x+1=0 \\ και \\ 2x-5=0 \\ και \\ 3-x=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=-1 \\ και \\ x=\frac{5}{2} \\ και \\ x=3 \end{matrix}\right\}$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στις δύο τελευταίες εξισώσεις είχαμε τέλειο τετράγωνο και άθροισμα τέλειων τετραγώνων ίσα με το μηδέν.

Το τέλειο τετράγωνο δεν επιστρέφει ποτέ αρνητικές τιμές, Συνεπώς, αφού είναι ίσο με μηδέν και ο μοναδικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, επιστρέφει την τιμή μηδέν είναι το μηδέν, το τέλειο τετράγωνο ισούται αναγκαστικά με το μηδέν.

Όταν ισούται με αριθμό, εκεί αναπτύσσουμε κανονικά το τετράγωνο και ανάγεται σε εξίσωση δευτέρου βαθμού(θα μας απασχολήσει στην επόμενη ενότητα).

Άσκηση 2:

Να επιλύσετε τις εξισώσεις.

α) $x(x^2-1)-x^3=x^2$

β) $(x^2+4)^2-x[(x+3)^2-(x+6)]=16$

γ) $x(x^2-25)-x^3+5x^2=0$

Λύση:

α) $x(x^2-1)-x^3=x^2 \;\Leftrightarrow\; x^3-x-x^3-x^2=0 \;\Leftrightarrow$

$$x^2+x=0 \;\Leftrightarrow\; x(x+1)=0 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{matrix} x=0 \\ ή \\ x=-1 \end{matrix}\right\}$$

β) $(x^2+4)^2 - x[(x+3)^2-(x+6)] = 16 \Leftrightarrow$

$x^4+8x^2+16-x(x^2+6x+9-x-6) = 16 \Leftrightarrow$

$x^4+8x^2+16-x^3-5x^2-3x = 16 \Leftrightarrow$

$x^4-x^3+3x^2-3x = 0 \Leftrightarrow$

$x^3(x-1)+3x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x^3+3x) = 0 \Leftrightarrow$

$$x(x-1)(x^2+3) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ \text{ή} \\ x=1 \\ \kappa\alpha\iota \\ x^2+3=0 \;\; \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta \; \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

γ) $x(x^2-25)-x^3+5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^3-25x-x^3+5x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2-5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ \text{ή} \\ x=5 \end{array}\right\}$$

Παραμετρικές Εξισώσεις 1ου Βαθμού

Ορισμός:

«Παραμετρική» ονομάζεται μια πρωτοβάθμια εξίσωση, όταν οι συντελεστές της α και β είναι παράμετροι. Η παράμετρος συνήθως συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα λ ή με κάποιο άλλο ελληνικό γράμμα, για να μην υπάρχει σύγχυση με τη μεταβλητή.

- Μολονότι η παράμετρος είναι και αυτή στην πραγματικότητα μεταβλητή, αφού μας είναι άγνωστη, για την επίλυση της εξίσωσης τη θεωρούμε γνωστή και την τοποθετούμε στο μέλος με τα γνωστά στοιχεία της εξίσωσης.

- Για τις πρωτοβάθμιες παραμετρικές εξισώσεις ισχύει ότι ισχύει και για τις απλές πρωτοβάθμιες εξισώσεις, ως προς την επίλυσή τους.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Να λύσετε την εξίσωση $\lambda^2 x - 3\lambda = x + 3$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση:

$\lambda^2 x - 3\lambda = x + 3 \Leftrightarrow \lambda^2 x - x = 3\lambda + 3 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)x = 3(\lambda + 1) \Rightarrow$

$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1 \Leftrightarrow$

- $Αν\ \lambda \neq \pm 1 \Rightarrow η\ εξίσωση\ έχει\ μοναδική\ λύση\ τη: x = \frac{3(\lambda+1)}{\lambda^2-1} = \frac{3}{\lambda-1}$
- $Αν\ \lambda = 1 \Rightarrow η\ εξίσωση\ είναι\ αδύνατη, καθώς\ 0 \neq 6.$
- $Αν\ \lambda = -1 \Rightarrow η\ εξίσωση\ είναι\ ταυτότητα\ ή\ αόριστη, καθώς\ 0x = 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στις παραμετρικές εξισώσεις διακρίνουμε πάντα περιπτώσεις, προκειμένου να βρούμε τις πιθανές λύσεις τους. Αρχικά, **εντοπίζουμε τις τιμές για τις οποίες μηδενίζεται ο συντελεστής της μεταβλητής** και έπειτα συμπεραίνουμε τι συμβαίνει, όταν **η παράμετρος δεν παίρνει αυτές τις τιμές(έχουμε τη μοναδική λύση)** και, όταν **τις παίρνει(έχουμε την ταυτότητα και την αδύνατη)**. Στις περισσότερες παραμετρικές εξισώσεις θα διακρίνουμε πάντα και τις τρεις περιπτώσεις, όσον αφορά τα πιθανά αποτελέσματα.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Δε διαγράφουμε όρους πριν εντοπίσουμε τις τιμές εκείνες που μηδενίζουν το συντελεστή της μεταβλητής. Αν προηγηθεί η διαγραφή, τότε θα χάσουμε λύσεις. Δηλαδή, στην παραπάνω άσκηση θα χάναμε την περίπτωση της ταυτότητας.

Άσκηση 2:

Έστω η εξίσωση $\lambda(\lambda-5)x = 6(\lambda-5)$. Να βρεθεί για ποιες τιμές της παραμέτρου λ η εξίσωση έχει:

α) μοναδική λύση το -3

β) λύση το -3

γ) είναι αδύνατη

Λύση:

$\lambda(\lambda-5)x = 6(\lambda-5) \Rightarrow$

Οι τιμές που μηδενίζουν το συντελεστή της μεταβλητής είναι: $\lambda(\lambda-5)=0 \Leftrightarrow$

$\lambda = 0$ ή $\lambda = 5 \Rightarrow$ Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $Αν\ \lambda \neq 0\ και\ \lambda \neq 5 \Rightarrow η\ εξίσωση\ έχει\ μοναδική\ λύση\ τη: x = \frac{6(\lambda-5)}{\lambda(\lambda-5)} = \frac{6}{\lambda}$
- $Αν\ \lambda = 0 \Rightarrow η\ εξίσωση\ είναι\ αδύνατη, καθώς\ 0 \neq -30.$
- $Αν\ \lambda = 5 \Rightarrow η\ εξίσωση\ είναι\ ταυτότητα\ ή\ αόριστη, καθώς\ 0x = 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$

α) Θέλουμε η εξίσωση να έχει μοναδική λύση την $x = -3$, άρα:

$$x = \frac{6}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{6}{\lambda} = -3 \Leftrightarrow \lambda = -2$$

β) Θέλουμε η εξίσωση να έχει γενικά ως λύση την $x = -3$. Αυτό σημαίνει ότι η λύση μπορεί να είναι είτε μοναδική είτε όχι. Άρα, είναι ένας συνδυασμός της πρώτης και της τρίτης περίπτωσης. Συνεπώς: $\left\{\begin{matrix} \lambda = -2 \\ \text{ή} \\ \lambda = 5 \end{matrix}\right\}$.

γ) Για να είναι η εξίσωση αδύνατη, πρέπει $\lambda = 0$.

Παρατήρηση

Συνήθως είναι πιο εύχρηστο να διακρίνουμε εξαρχής όλες τις πιθανές περιπτώσεις του τι μπορεί να προκύψει από την εξίσωση και ύστερα να λύνουμε τα υποερωτήματα. Η βασική μεθοδολογία μας καθοδηγεί και έτσι δεν πρόκειται να κάνουμε λάθος.

Κλασματική Μορφή

Πολλές φορές θα χρειαστεί να επιλύσουμε μια εξίσωση της οποίας όροι θα είναι κλάσματα. Σκοπός μας είναι να έχουμε στο ένα μέλος τη μεταβλητή με το συντελεστή της και στο άλλο τους γνωστούς όρους. Με τα κλάσματα αυτό δεν είναι εξαρχής εφικτό. Τι κάνουμε επομένως;

- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές και βρίσκουμε το ΕΚΠ τους.
- Παίρνουμε τους απαραίτητους περιορισμούς.
- Πολλαπλασιάζουμε τον κάθε όρο με το ΕΚΠ, προκειμένου να γίνουν απαλοιφές των παρονομαστώ και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.
- Ελέγχουμε, εάν οι λύσεις που έχουμε βρει ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Π.χ.

Να επιλύσετε τις παρακάτω κλασματικές εξισώσεις.

α) $\frac{4}{x-1}+\frac{6}{1+x}=\frac{3}{x^2-1}$ β) $\frac{x+8}{x^2-16}-\frac{2}{4-x}=\frac{1}{x+4}$ γ) $1+\frac{x}{1-x}=\frac{1+x-x^2}{x-x^2}$

Λύση:

α) $\frac{4}{x-1}+\frac{6}{1+x}=\frac{3}{x^2-1} \Rightarrow$

$$\frac{4}{x-1}+\frac{6}{1+x}=\frac{3}{(x+1)(x-1)} \xRightarrow{ΕΚΠ=(x-1)(x+1)}$$

Περιορισμοί: πρέπει $(x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$

Αν $x=\pm 1$, τότε δεν μπορούν να οριστούν εξαρχής τα κλάσματα.

$\frac{4}{x-1}+\frac{6}{1+x}=\frac{3}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$

$$(x-1)(x+1)\frac{4}{x-1}+(x-1)(x+1)\frac{6}{1+x}=(x-1)(x+1)\frac{3}{(x+1)(x-1)}$$

$4(x+1)+6(x-1)=3 \Leftrightarrow 4x+4+6x-6=3 \Leftrightarrow 10x=5 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow$

Η λύση που βρήκαμε υπακούειστους περιορισμούς, οπότε γίνεται δεκτή.

β) $\frac{x+8}{x^2-16}-\frac{2}{4-x}=\frac{1}{x+4} \Rightarrow \quad \frac{x+8}{(x-4)(x+4)}+\frac{2}{x-4}=\frac{1}{x+4} \xrightarrow{ΕΚΠ=(x-4)(x+4)}$

Περιορισμοί: πρέπει $(x-4)(x+4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 4$

$\frac{x+8}{(x-4)(x+4)}+\frac{2}{x-4}=\frac{1}{x+4} \Rightarrow$

$(x-4)(x+4)\frac{x+8}{(x-4)(x+4)}+(x-4)(x+4)\frac{2}{x-4}=(x-4)(x+4)\frac{1}{x+4} \Rightarrow$

$x+8+2(x+4)=x-4 \Leftrightarrow$

$x+8+2x+8=x-4 \Leftrightarrow 2x=-20 \Leftrightarrow \quad x=-10 \Rightarrow$

Η λύση που βρήκαμε υπακούει στους περιορισμούς, οπότε γίνεται δεκτή.

γ) $1+\frac{x}{1-x}=\frac{1+x-x^2}{x-x^2} \Rightarrow 1+\frac{x}{1-x}=\frac{1+x-x^2}{x(1-x)} \Rightarrow 1+\frac{x}{1-x}=\frac{1+x(1-x)}{x(1-x)} \Rightarrow$

$1+\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x(1-x)}+\frac{x(1-x)}{x(1-x)} \xrightarrow{ΕΚΠ=x(1-x)}$

Περιορισμοί: πρέπει $x(1-x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \,\&\, x \neq 1$

$1+\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x(1-x)}+\frac{x(1-x)}{x(1-x)} \Rightarrow 1+\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x(1-x)}+1 \Rightarrow \frac{x}{1-x}=\frac{1}{x(1-x)} \Rightarrow$

$x(1-x)\frac{x}{1-x}=x(1-x)\frac{1}{x(1-x)} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow$

Σύμφωνα με τους περιορισμούς, η λύση $x=1$ απορρίπτεται, οπότε γίνεται δεκτή μόνο η λύση $x=-1$.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Πρέπει πάντα να ελέγχουμε τους περιορισμούς, προτού καταλήξουμε στις λύσεις της εξίσωσης. Κάποια λύση που μπορεί να προκύψει μπορεί να πρέπει να απορριφθεί σύμφωνα με το πεδίο ορισμού που έχει προκύψει από τους περιορισμούς.