Προσδοκώμενοι Στόχοι Ενότητας:

→ Ο/Η μαθητής/τρια θα πρέπει στο πέρας της ενότητας να έχει κατανοήσει σε βάθος:

- τον ορισμό και τις ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού,
- τον ορισμό και τις ιδιότητες της ν-οστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού,
- την έννοια της δύναμης με ρητό εκθέτη.

Συμπλήρωση Κενών:

Σε αυτό το κομμάτι της ενότητας ο/η μαθητής/τρια θα βρει τις παρατηρήσεις, τα κόλπα και τις έξυπνες μεθόδους που χρειάζεται για να καταλάβει πλήρως όλα όσα έμαθε και να καλύψει τυχόντα κενά.

Τετραγωνική Ρίζα:

Ορισμός:

Η «**τετραγωνική ρίζα**» ενός <u>μη αρνητικού</u> αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, επιστρέφει ως αποτέλεσμα τον αριθμό α. Δηλαδή, $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.

↝ Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

↝ Η εξίσωση $x^2 = \alpha$ για $\alpha \geq 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, τις $\pm\sqrt{\alpha}$.

Προσοχή!

Η υπόριζη ποσότητας μιας τετραγωνικής ρίζας δεν μπορεί ποτέ να είναι αρνητικός αριθμός. Αυτό συμβαίνει, διότι <u>δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός τέτοιος, ώστε το τετράγωνό του να ισούται με αρνητική ποσότητα</u>.

Ιδιότητες Τετραγωνικής Ρίζας:

- $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$, αλλά $\sqrt{\boldsymbol{\alpha^2}} = |\boldsymbol{\alpha}|$
- $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$
- $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ για $\beta \neq 0$

Προσοχή! Δεν ισχύει $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$.

Π.χ.

- $\sqrt{(-9)^2} = |-9| = 9$
- $\sqrt{4*9} = \sqrt{36} = 6 = 2*3 = \sqrt{4}*\sqrt{9}$
- $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2 = \sqrt{4} = \sqrt{\frac{64}{16}}$
- $\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \cong 3{,}61 \neq 5 = 2+3 = \sqrt{4}+\sqrt{9}$

Λυμένες Ασκήσεις:

Άσκηση 1:

Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες.

α) $\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{13})^2}$ β) $\sqrt{\left(\frac{15}{6}-8\right)^2}$ γ) $\sqrt{256}$ δ) $\sqrt{(x-4)^2}$

Λύση:

α) $\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{13})^2} = |\sqrt{7}-\sqrt{13}| = \sqrt{13} - \sqrt{7}$

β) $\sqrt{\left(\frac{15}{6}-8\right)^2} = \left|\frac{15}{6}-8\right| = \left|-\frac{33}{6}\right| = \frac{11}{2}$

γ) $\sqrt{256} = \begin{Bmatrix} \sqrt{16^2} = 16 \\ \text{ή} \\ \sqrt{4^4} = 4^2 = 16 \end{Bmatrix}$

δ) $\sqrt{(x-4)^2} = |x-4| = \begin{Bmatrix} x-4, \ για\ x \geq 4 \\ \text{ή} \\ 4-x, \ για\ x < 4 \end{Bmatrix}$

Άσκηση 2:

Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα.

α) $\frac{7\sqrt{50}}{\sqrt{72}}$ β) $\frac{\sqrt{48}\sqrt{28}}{\sqrt{12}\sqrt{112}}$ γ) $\frac{\sqrt{320}+\sqrt{80}}{\sqrt{720}-\sqrt{180}}$

Λύση:

α) $\frac{7\sqrt{50}}{\sqrt{72}} = \frac{7*\sqrt{2*25}}{\sqrt{2*36}} = \frac{7*5\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{35}{6}$

β) $\frac{\sqrt{48}*\sqrt{28}}{\sqrt{12}*\sqrt{112}} = \frac{\sqrt{3*16}*\sqrt{4*7}}{\sqrt{4*3}*\sqrt{7*16}} = \frac{4\sqrt{3}*2\sqrt{7}}{2\sqrt{3}*4\sqrt{7}} = 1$

γ) $\frac{\sqrt{320}+\sqrt{80}}{\sqrt{720}-\sqrt{180}} = \frac{\sqrt{5*64}+\sqrt{5*16}}{\sqrt{5*144}-\sqrt{5*36}} = \frac{8\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{12\sqrt{5}-6\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{6\sqrt{5}} = 2$

Άσκηση 3:

Να υπολογίσετε με τι ισούται το κλάσμα $\frac{7\sqrt{3}-3\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

Λύση:

$$\frac{7\sqrt{3}-3\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{(7\sqrt{3}-3\sqrt{7})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{7\sqrt{21}-21+21-3\sqrt{31}}{7-3} = \sqrt{21}$$

ν-οστή Ρίζα:

Ορισμός:

Η «**ν-οστή ρίζα**» ενός <u>μη αρνητικού</u> αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\boldsymbol{\alpha}}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην ν, επιστρέφει ως αποτέλεσμα τον αριθμό α. Δηλαδή, $(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu} = \alpha$.

~ Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^{\nu} = \alpha$.

Ιδιότητες ν-οστής Ρίζας:

- $Αν\ α \geq 0,\ τότε\ \left(\sqrt[ν]{α}\right)^{ν} = α\ και\ \sqrt[ν]{α^{ν}} = α.$
- $\boldsymbol{Αν\ α < 0\ και\ ν\ άρτιος,\ τότε\ \sqrt[ν]{α^{ν}} = |α|.}$

$Αν\ \ α, β \geq 0,\ \ τότε:$

- $\sqrt[ν]{α}\sqrt[ν]{β} = \sqrt[ν]{αβ}$
- $\dfrac{\sqrt[ν]{α}}{\sqrt[ν]{β}} = \sqrt[ν]{\dfrac{α}{β}}\ ,\ εφόσον\ β \neq 0$
- $\sqrt[μ]{\sqrt[ν]{α}} = \sqrt[μν]{α}$
- $\sqrt[νρ]{α^{μρ}} = \sqrt[ν]{α^{μ}}$

Π.χ.

α) $\sqrt[4]{5^8} = 5^2 = 25$

β) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{12} = 3^3 = 27$

γ) $\sqrt[5]{(-2)^{10}} = \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$

δ) $\sqrt[8]{6^{12}} = \sqrt[2*4]{6^{3*4}} = \sqrt{6^3} = \sqrt{6^2 * 6} = 6\sqrt{6}$

ε) $\dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{4^3}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{4}{2} = 2 = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\dfrac{64}{8}}$

στ) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2 = \sqrt[6]{2^6} = \sqrt[6]{64}$

Δυνάμεις με Ρητό Εκθέτη:

Ορισμός:

Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος αριθμός, τότε ορίζεται $\boldsymbol{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$.

Π.χ.

α) $3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9 = \sqrt{81} = \sqrt{3^4}$

β) $2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32 = \sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}}$

γ) $25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} \overline{\overline{\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\varepsilon\omega\nu}}\ 5 = \sqrt{25^1}$

δ) $125^{\frac{4}{12}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5 = \sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[12]{125^4}$

***Σημείωση*:**

Όλες οι ν-οστές ρίζες είναι ισοδύναμες με όλες τις ν-οστές ρίζες που έχουν ουσιαστικά ως εκθέτη το ίδιο κλάσμα.

Π.χ.

$\sqrt[6]{8^4} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4 = (4^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{6}{6}} = (2^2)^{\frac{6}{6}} =$

$2^{\frac{12}{6}} = 2^{\frac{3*12}{3*6}} = (2^3)^{\frac{12}{18}} = 8^{\frac{4}{6}} = 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{200}{300}} = 8^{\frac{30}{45}} = \sqrt[24]{8^{16}} = \sqrt[66]{8^{44}}$

Λυμένες Συνδυαστικές Ασκήσεις:

Άσκηση 1:

Να διατάξετε τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις.

α) $8 \; \kappa\alpha\iota \; \sqrt{14}$ β) $6 \; \kappa\alpha\iota \; \sqrt[3]{8}$ γ) $\sqrt[3]{6} \; \kappa\alpha\iota \; \sqrt[4]{7}$ δ) $\sqrt{2} \; \kappa\alpha\iota \; \sqrt[7]{19}$

Λύση:

α) $8 > \sqrt{14}, \; \delta\iota ó\tau\iota \; 8^2 > \sqrt{14}^2 \Rightarrow 64 > 14$

β) $6 < \sqrt[3]{217}, \; \delta\iota ó\tau\iota \; 6^3 < \sqrt[3]{217}^3 \Rightarrow 216 < 217$

γ) $\sqrt[3]{6} > \sqrt[4]{7}, \; \delta\iota ó\tau\iota \; \sqrt[3]{6}^{12} > \sqrt[4]{7}^{12} \Rightarrow 6^4 = 1296 > 7^3 = 343$

δ) $\sqrt{2} < \sqrt[7]{19}, \; \delta\iota ó\tau\iota \; \sqrt{2}^{14} < \sqrt[7]{19}^2 \Rightarrow 2^7 = 128 < 19^2 = 361$

***Σημείωση*:**

Όταν θέλουμε να συγκρίνουμε δύο αριθμούς που είναι γραμμένοι υπό μορφή ρίζας, τότε τους υψώνουμε σε δύναμη που είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των τάξεων των ριζών.

Άσκηση 2:

Να απλοποιήσετε τα παρακάτω ριζικά.

α) $\sqrt[6]{3\sqrt[4]{9}}$ β) $\sqrt{\frac{32^6+4^{11}}{2^{20}+16^7}}$ γ) $\sqrt[13]{16\sqrt[3]{64\sqrt{4^{\frac{1}{2}}}}}$ δ) $\sqrt[3]{\frac{3}{8}\sqrt[3]{3\sqrt{2}-3}\sqrt[3]{3\sqrt{2}+3}}$

Λύση:

α) $\sqrt[6]{3\sqrt[4]{9}} = \sqrt[6]{\sqrt[4]{3^4 * 3^2}} = \sqrt[6]{\sqrt[4]{3^6}} = \sqrt[24]{3^6} = \sqrt[4]{3}$

β) $\sqrt{\frac{32^6+4^{11}}{2^{20}+16^7}} = \sqrt{\frac{(2^5)^6 + (2^2)^{11}}{2^{20} + (2^4)^7}} = \sqrt{\frac{2^{30} + 2^{22}}{2^{20} + 2^{28}}} = \sqrt{\frac{2^{22}(2^8+1)}{2^{20}(1+2^8)}} = \sqrt{2^2} = 2$

γ) $\sqrt[13]{16\sqrt[3]{64\sqrt{4^{\frac{1}{2}}}}} = \sqrt[13]{16\sqrt[3]{64\sqrt{\sqrt{4}}}} =$

$\sqrt[13]{2^4\sqrt[3]{2^6\sqrt{2}}} = \sqrt[13]{2^4 * 2^2\sqrt{2}} =$

$\sqrt[13]{\sqrt{2 * 2^4 * 2^8}} = \sqrt[13]{\sqrt{2^{13}}} = \sqrt[26]{2^{13}} = \sqrt{2}$

δ) $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}\sqrt[3]{3\sqrt{2}-3}\sqrt[3]{3\sqrt{2}+3} = \sqrt[3]{\frac{3}{8}}\sqrt[3]{(3\sqrt{2}-3)(3\sqrt{2}+3)} =$

$\sqrt[3]{\frac{3}{8}}\sqrt[3]{(3\sqrt{2})^2 - 9} = \sqrt[3]{\frac{3}{8}}\sqrt[3]{18-9} = \sqrt[3]{\frac{3}{8}}\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} = \frac{3}{2}$

Άσκηση 3:

Έστω οι αριθμοί $A = 3 + \sqrt{7}$ και $B = 3 - \sqrt{7}$.

α) Να αποδείξετε ότι $AB = 2$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

Λύση:

α) $A = 3 + \sqrt{7}$ και $B = 3 - \sqrt{7}$ $\Rightarrow$

$AB = (3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7}) = 9 - 7 = 2$

β) $\Pi = A^2 + B^2 = (3 + \sqrt{7})^2 + (3 - \sqrt{7})^2 =$

$9 + 6\sqrt{7} + 7 + 9 - 6\sqrt{7} + 7 = 32$

Άσκηση 4:

Δίνεται η παράσταση $\Gamma = \sqrt[5]{(x-3)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η Γ;

β) Αν ισχύει $x = 5$, να αποδείξετε ότι $\Gamma^4 + 8\Gamma = \Gamma^5$.

Λύση:

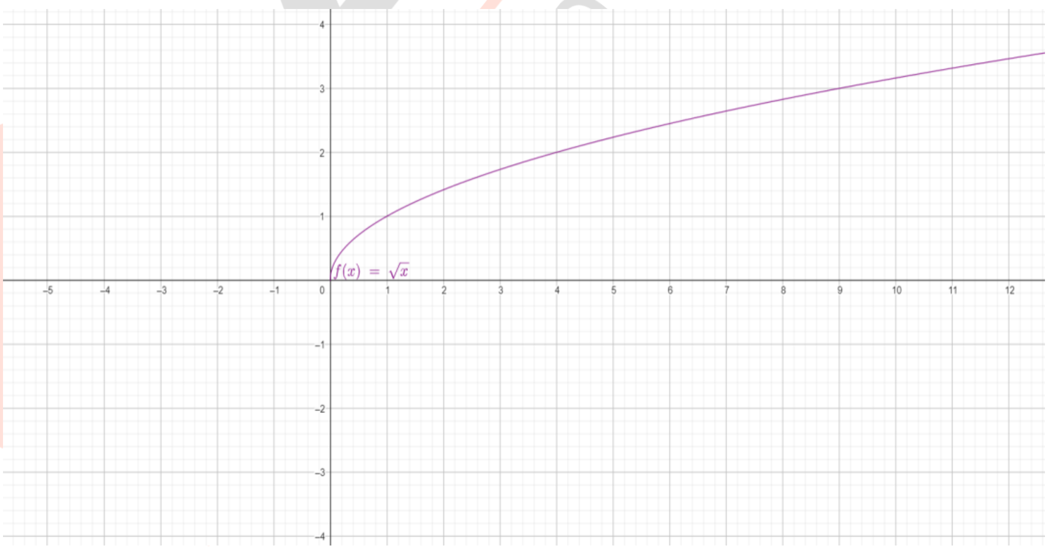
α) Για να ορίζεται μία ρίζα πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι μη αρνητική.

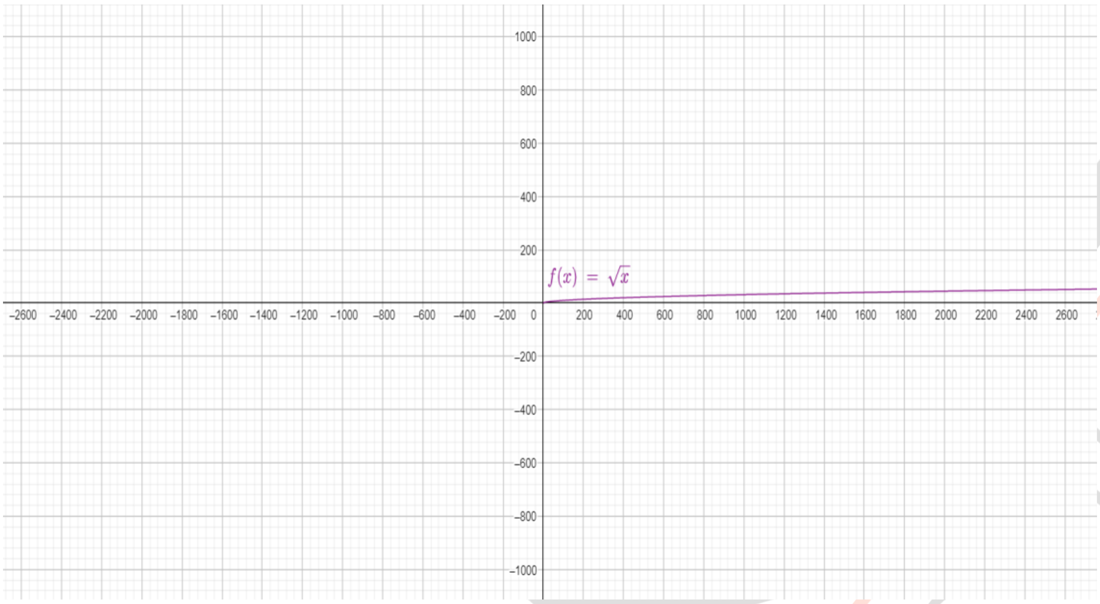
Συνεπώς, πρέπει $(x-3)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, +\infty)$.

β) $\Gamma^4 + 8\Gamma = \Gamma^5 \overset{\Gamma=2}{\Longleftrightarrow} 2^4 + 8 * 2 = 2^5 \Leftrightarrow 32 = 32 \ \text{ταυτότητα}$.

Γραφικές Παραστάσεις Συναρτήσεων με Ριζικά:

- $f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow$

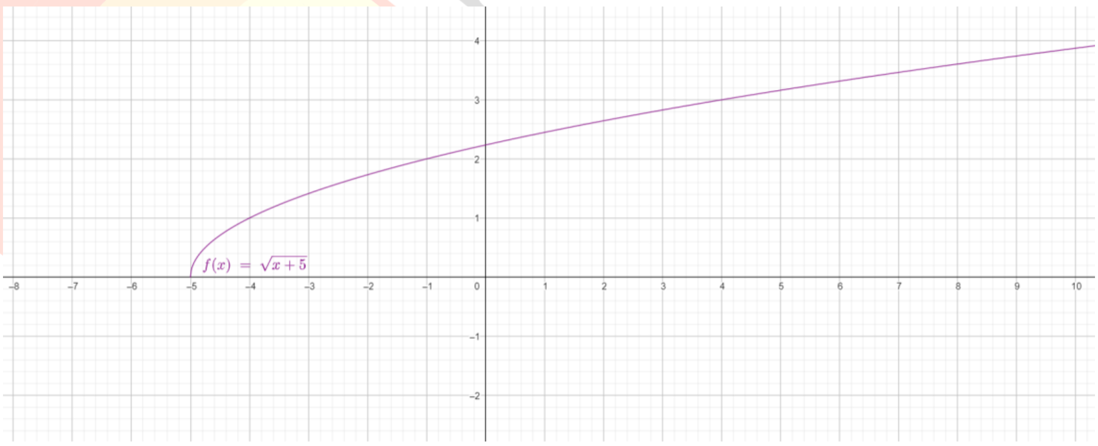




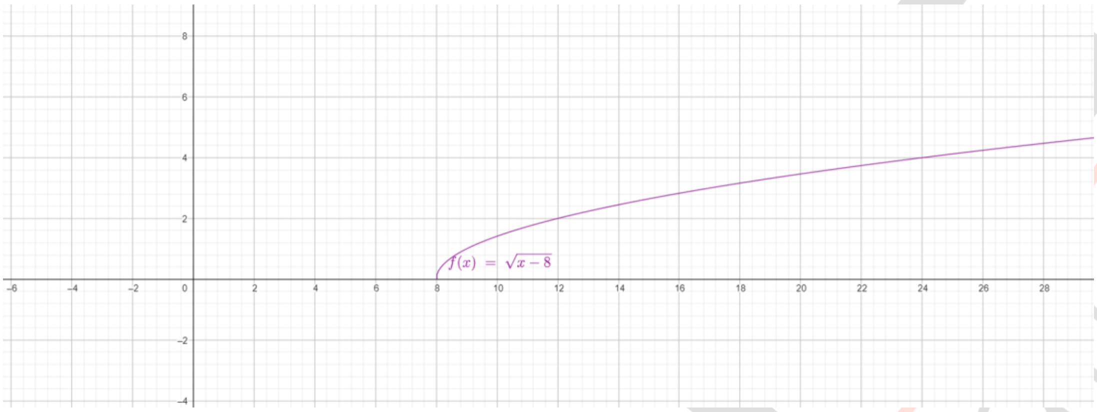
Παρατήρηση:

Και στις δύο εικόνες βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$. Στη δεύτερη εικόνα έχουμε απλώς τη γραφική παράσταση από μια πιο μακρινή σκοπιά. Όσο πιο πολύ αυξάνεται η υπόριζη ποσότητα τόσο πιο πολύ απομακρύνεται η γραφική παράσταση από τον άξονα των τετμημένων.

- $f(x) = \sqrt{x+5} \quad \Rightarrow$



➢ $f(x) = \sqrt{x-8} \quad \Rightarrow$

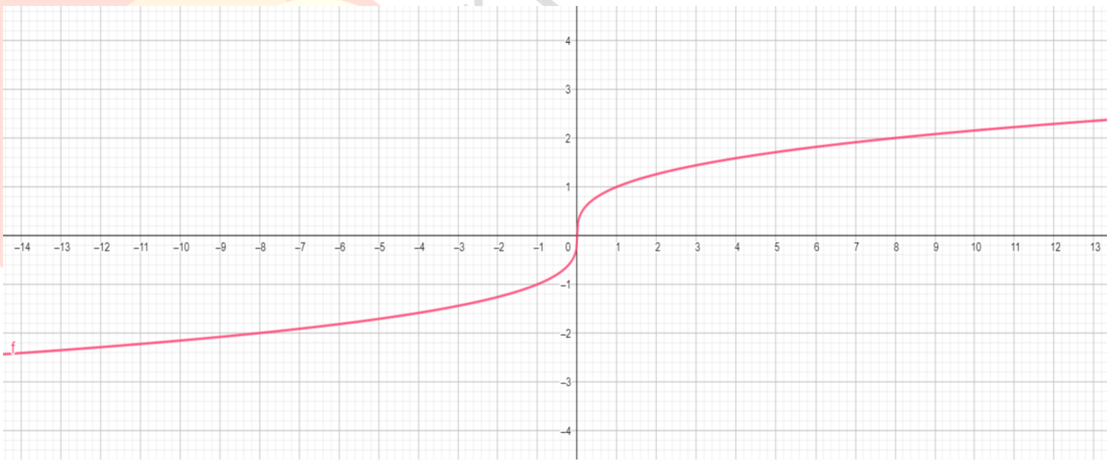


Παρατήρηση:

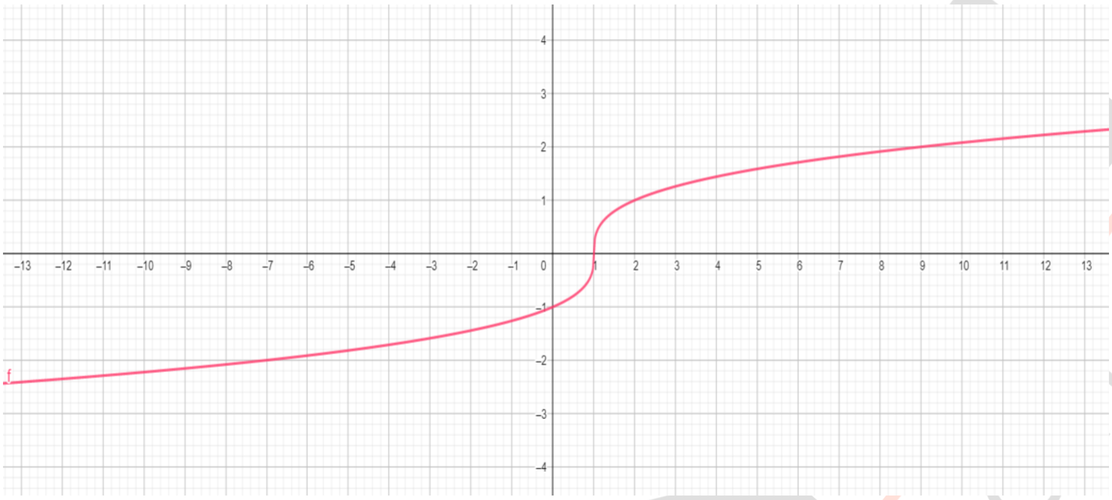
Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση η γραφική παράσταση ξεκινάει από εκείνο το σημείο για το οποίο μηδενίζεται η υπόριζη ποσότητα, συνεχίζει για όλα τα μεγαλύτερα x και επεκτείνεται ως το άπειρο.

Επίσης, η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από τον άξονα των x για όλες τις τιμές του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων, κάτι που δε μας εκπλήσσει, αφού η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού δεν παίρνει ποτέ αρνητικές τιμές.

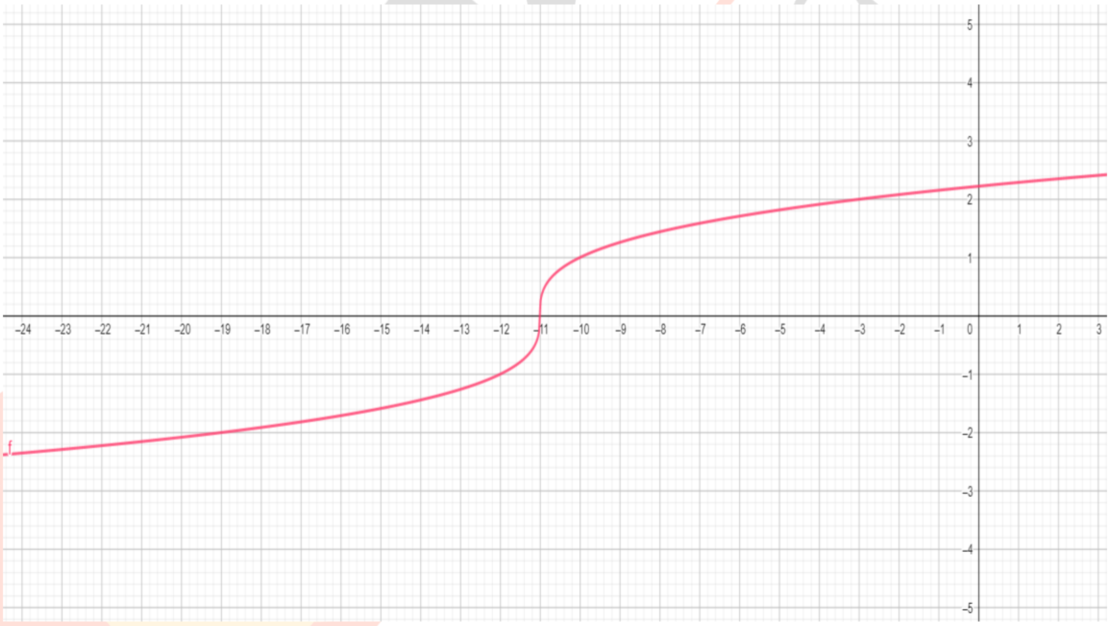
➢ $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow$



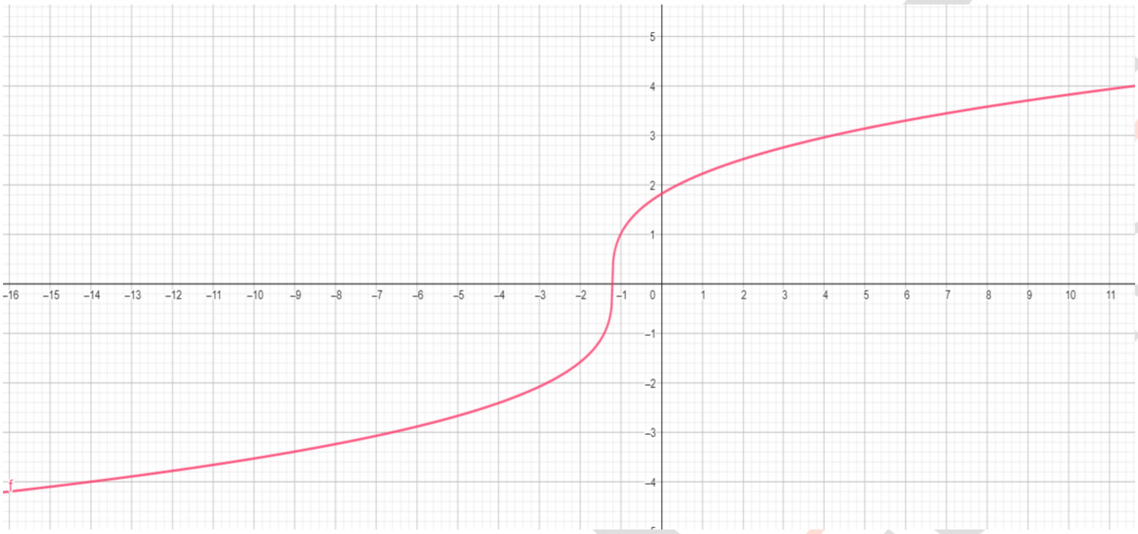
➢ $f(x) = \sqrt[3]{x-1} \quad \Rightarrow$



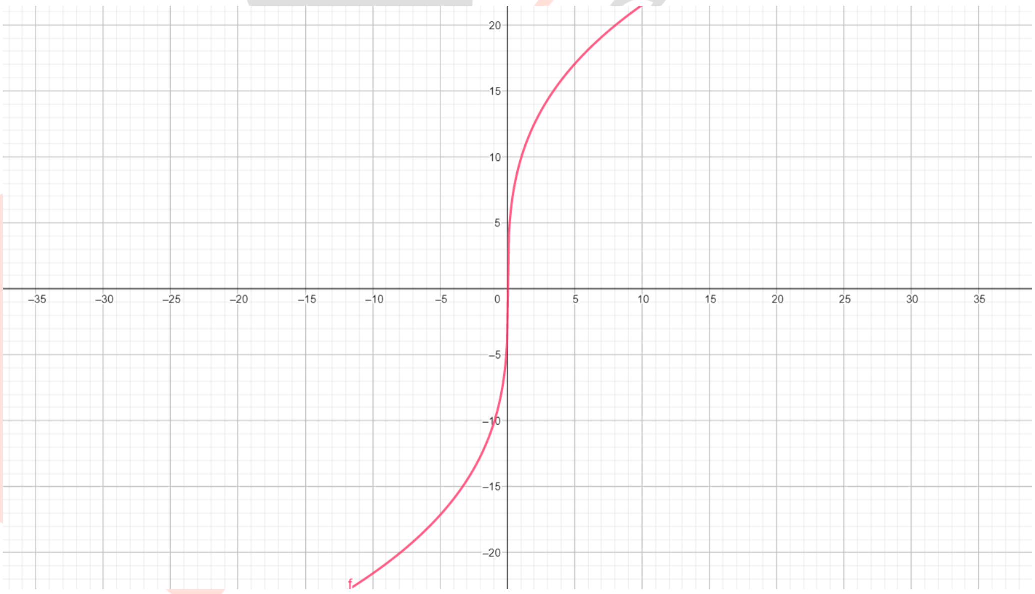
➢ $f(x) = \sqrt[3]{x+11} \quad \Rightarrow$



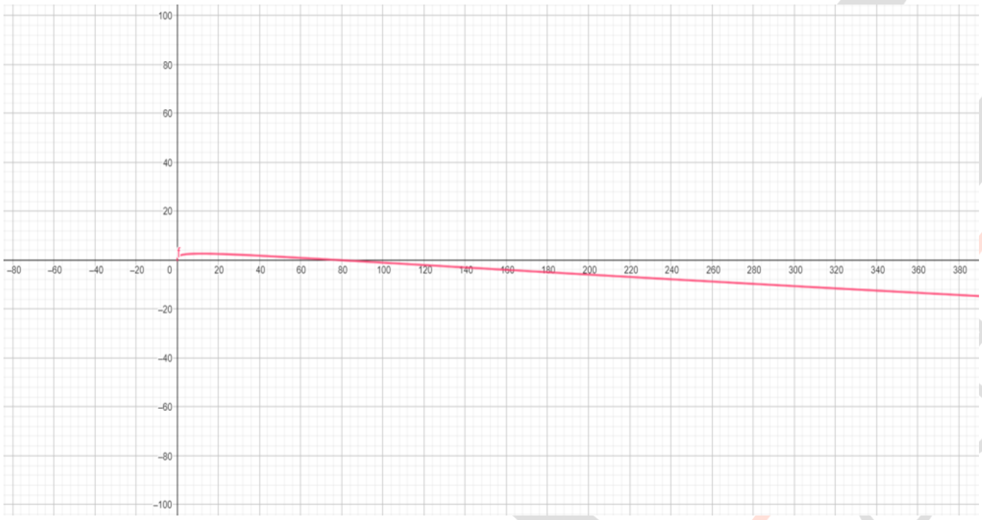
➢ $f(x) = \sqrt[3]{5x+6} \quad \Rightarrow$



➢ $f(x) = \sqrt[3]{1000x-50} \quad \Rightarrow$



- $f(x) = \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{3x} \quad \Rightarrow$



Παρατήρηση:

Όταν η μεταβλητή στην υπόριζη ποσότητα έχει συντελεστή με τον οποίο πολλαπλασιάζεται, τότε αυτό αυξάνει το πλάτος στον άξονα των y στον οποίο κείται η γραφική παράσταση. Αυτό ισχύει για ριζικά με τάξη περιττό θετικό ακέραιο αριθμό.