

Προσδοκώμενοι Στόχοι Ενότητας:

→ Ο/Η μαθητής/τρια θα πρέπει στο πέρας της ενότητας να έχει κατανοήσει σε βάθος:

- την έννοια της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού ορισμού,
- τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής,
- την έννοια της απόστασης δύο πραγματικών αριθμών.

Συμπλήρωση Κενών:

Σε αυτό το κομμάτι της ενότητας ο/η μαθητής/τρια θα βρει τις παρατηρήσεις, τα κόλπα και τις έξυπνες μεθόδους που χρειάζεται για να καταλάβει πλήρως όλα όσα έμαθε και να καλύψει τυχόντα κενά.

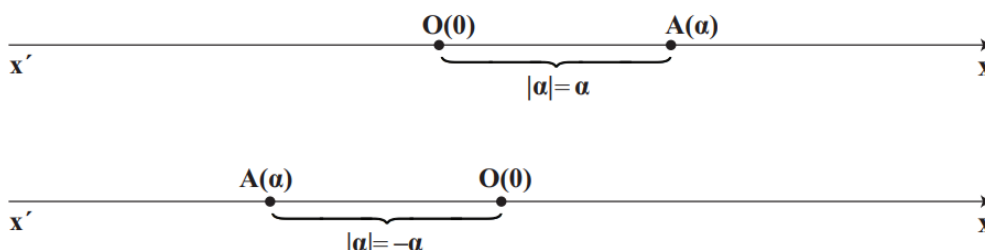
Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού:

Ορισμός:

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a συμβολίζεται ως $|a|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a > 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

Η απόλυτη τιμή ορίζει την απόσταση ενός πραγματικού αριθμού από την αρχή $O(0)$ του άξονα όλων των πραγματικών αριθμών. Ουσιαστικά, εκφράζει το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο σημεία $A(a)$ και $O(0)$, όπως φαίνεται και στο κάτωθεν σχήμα.



Αρνός, έξυπνα και εύκολα!

Ερώτημα: Τι είναι ουσιαστικά η απόλυτη τιμή;

Η απόλυτη τιμή είναι στην πραγματικότητα μία συνάρτηση η οποία ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό που υπάρχει, ενώ επιστρέφει πάντα μη αρνητικές τιμές.

Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού με εξαίρεση το μηδέν, που επιστρέφει την τιμή μηδέν, επιστρέφει ως αποτέλεσμα θετικό αριθμό. Για δύο αριθμούς με αντίθετο πρόσημο, η απόλυτη τιμή επιστρέφει τον ίδιο αριθμό. Δηλαδή:

$$\left\{ \begin{array}{l} |2| = 2 = |-2| \\ |\sqrt{29}| = \sqrt{29} = |-\sqrt{29}| \\ \left| \frac{7}{13} \right| = \frac{7}{13} = \left| -\frac{7}{13} \right| \end{array} \right\}$$

Δηλαδή, δύο αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια απόλυτη τιμή, κάτι εντελώς αναμενόμενο, αφού τόσο ο α όσο και ο $-\alpha$ απέχουν από το 0 απόσταση ίση με α .

Ιδιότητες Απόλυτης Τιμής:

- $|\alpha| = \alpha = |-\alpha|$
- $|0| = 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$
- Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$
- $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$
- $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$
- $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

~ Η τελευταία ιδιότητα είναι γνωστή και ως «τριγωνική ανισότητα».

Π.χ.

- $|\lambda| = 6 \Leftrightarrow \lambda = 6 \text{ ή } \lambda = -6$
- $|\lambda - 3| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 3 = 9 \\ \text{ή} \\ \lambda - 3 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 12 \\ \text{ή} \\ \lambda = -6 \end{cases}$
- $|3 - 8| \leq |3| + |8| \Leftrightarrow |-5| = 5 \leq 3 + 8 = 11$ που ισχύει
- $|2\lambda - 9| = |4 - \lambda| \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - 9 = 4 - \lambda \\ \text{ή} \\ 2\lambda - 9 = -(4 - \lambda) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda = 13 \\ \text{ή} \\ 2\lambda - 9 = \lambda - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{13}{3} \\ \text{ή} \\ \lambda = 5 \end{cases}$
- $|\lambda + 11| = -8 \Leftrightarrow \text{αδύνατη}$

Έξυπνη Παρατήρηση:

Η απόλυτη τιμή επιστρέφει πάντα θετική τιμή ή μηδέν. Σε κάθε περίπτωση, **δεν επιστρέφει ποτέ αρνητική τιμή**. Συνεπώς, όταν μέσα στο απόλυτο έχουμε αρνητική τιμή και θέλουμε να βγάλουμε το απόλυτο, πρέπει να βάλουμε ένα πλην μπροστά από το περιεχόμενο του απολύτου. Αν δε βάλουμε πλην και απλώς το διώξουμε, είναι σαν να γράφουμε ως αποτέλεσμα από το απόλυτο κάτι που είναι αρνητικό, το οποίο δεν υφίσταται, αφού η απόλυτη τιμή ως συνάρτηση επιστρέφει πάντα μη αρνητικές τιμές.

Π.χ.

- $|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{αν } x \geq 2 \\ \text{ή} \\ 2 - x, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$
- $|x + 7| = \begin{cases} x + 7, & \text{αν } x \geq -7 \\ \text{ή} \\ -x - 7, & \text{αν } x < -7 \end{cases}$
- $|3 - x| = \begin{cases} 3 - x, & \text{αν } x \leq 3 \\ \text{ή} \\ x - 3, & \text{αν } x > 3 \end{cases}$

Λυμένες Ασκήσεις:**Άσκηση 1:**

Να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|\lambda - 5| + |7 - \lambda|$, όταν:

$$\alpha) \lambda < 5 \quad \beta) \lambda > 7 \quad \gamma) 5 < \lambda < 7$$

Λύση:

$$\alpha) \lambda < 5 \Leftrightarrow \lambda - 5 < 0 \Leftrightarrow 5 - \lambda > 0$$

$$\lambda < 5 < 7 \Leftrightarrow \lambda - 7 < 0 \Leftrightarrow 7 - \lambda > 0$$

$$\text{Άρα: } |\lambda - 5| + |7 - \lambda| = 5 - \lambda + 7 - \lambda = 12 - 2\lambda$$

$$\beta) \lambda > 7 \Leftrightarrow 7 < \lambda \Leftrightarrow 7 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda - 7 > 0$$

$$\lambda > 7 > 5 \Leftrightarrow \lambda - 5 > 0$$

$$\text{Άρα: } |\lambda - 5| + |7 - \lambda| = \lambda - 5 + \lambda - 7 = 2\lambda - 12$$

$$\gamma) 5 < \lambda < 7 \Leftrightarrow \lambda > 5 \Leftrightarrow \lambda - 5 > 0$$

$$5 < \lambda < 7 \Leftrightarrow 7 > \lambda \Leftrightarrow 7 - \lambda > 0$$

$$\text{Άρα: } |\lambda - 5| + |7 - \lambda| = \lambda - 5 + 7 - \lambda = 2$$

Άσκηση 2:

Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) A = |1 - \sqrt{3}| + |\sqrt{5} - 2| + |-2 - \sqrt{3}| + |1 - \sqrt{5}|$$

$$\beta) B = |\sqrt{7} - 4| + |2 - \sqrt{9}| - |\kappa^2 + 8| + |-4 - \kappa^2|$$

Λύση:

$$\alpha) A = |1 - \sqrt{3}| + |\sqrt{5} - 2| + |-2 - \sqrt{3}| + |1 - \sqrt{5}| =$$

$$\sqrt{3} - 1 + \sqrt{5} - 2 + |-1||2 + \sqrt{3}| + \sqrt{5} - 1 =$$

$$\sqrt{3} - 1 + \sqrt{5} - 2 + 2 + \sqrt{3} + \sqrt{5} - 1 = 2(\sqrt{3} + \sqrt{5}) - 2$$

$$\begin{aligned}\beta) B &= |\sqrt{7} - 4| + |2 - \sqrt{9}| - |\kappa^2 + 8| + |-4 - \kappa^2| = \\ &= 4 - \sqrt{7} + |2 - 3| - (\kappa^2 + 8) + |-1||4 + \kappa^2| = \\ &= 4 - \sqrt{7} + 1 - \kappa^2 - 8 + 4 + \kappa^2 = 1 - \sqrt{7}\end{aligned}$$

Παρατήρηση:

Στο ερώτημα (β) δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τι τιμές παίρνει η μεταβλητή κ , διότι έχουμε το τετράγωνό του που ξέρουμε ότι είναι πάντα θετικό ή μηδέν.

Άσκηση 3:

Να αποδείξετε την ισότητα $|2 - \alpha|^2 = |2 + \alpha|^2 - 8\alpha$.

Λύση:

$$\begin{aligned}|2 - \alpha|^2 &= |2 + \alpha|^2 - 8\alpha \Leftrightarrow \\ (2 - \alpha)^2 &= (2 + \alpha)^2 - 8\alpha \Leftrightarrow \\ 4 - 4\alpha + \alpha^2 &= 4 + 4\alpha + \alpha^2 - 8\alpha \Leftrightarrow \\ 4 - 4\alpha + \alpha^2 &= 4 - 4\alpha + \alpha^2 \text{ που ισχύει ως ταυτότητα}\end{aligned}$$

Άσκηση 4:

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις.

$$\begin{aligned}\alpha) &|3\alpha - 5| + |2\beta + 54| = 0 \\ \beta) &|2\alpha - 3\beta| + |6\beta - 12| = 0 \\ \gamma) &|4\alpha - 2| + |\beta - 6| = |1 - 2\alpha|\end{aligned}$$

Λύση:

$$\alpha) |3\alpha - 5| + |2\beta + 54| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 5 = 0 \\ \text{και} \\ 2\beta + 54 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha = \frac{5}{3} \\ \text{και} \\ \beta = -27 \end{pmatrix}$$

$$\beta) |2\alpha - 3\beta| + |6\beta - 12| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 0 \\ \text{και} \\ 6\beta - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 0 \\ \text{και} \\ \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \text{και} \\ \beta = 2 \end{cases}$$

$$\gamma) |4\alpha - 2| + |\beta - 6| = |1 - 2\alpha| \Leftrightarrow$$

$$|2||2\alpha - 1| + |\beta - 6| = |1 - 2\alpha| \Leftrightarrow$$

$$2|2\alpha - 1| + |\beta + 6| - |1 - 2\alpha| = 0 \Leftrightarrow$$

$$2|2\alpha - 1| + |\beta + 6| - |2\alpha - 1| = 0 \Leftrightarrow$$

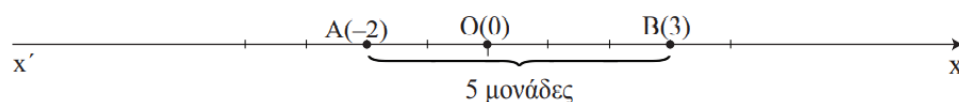
$$|2\alpha - 1| + |\beta + 6| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 1 = 0 \\ \text{και} \\ \beta + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \text{και} \\ \beta = -6 \end{cases}$$

Σημείωση:

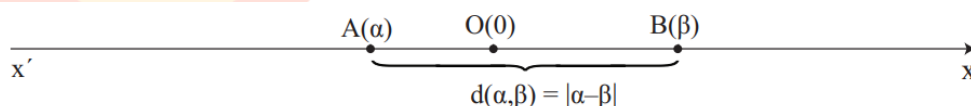
Όταν έχουμε άθροισμα μη αρνητικών όρων ίσο με το μηδέν, τότε αναγκαστικά κάθε όρος ισούται με μηδέν, αφού άθροισμα θετικών όρων υπερβαίνει το μηδέν.

Απόσταση δύο αριθμών:

Απόσταση δύο πραγματικών αριθμών $A(\alpha)$ και $B(\beta)$ που βρίσκονται πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών καλείται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τους δύο αριθμούς, όπως φαίνεται και στα κάτωθεν σχήματα.



~ Όταν έχουμε συγκεκριμένα σημεία.



~ Ορισμός για δύο σημεία πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών γενικά.

Αρνός, έξυπνα και εύκολα!

Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος καλείται απόσταση των A και B και συμβολίζεται ως $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$, όπου d το αρχικό της αγγλικής λέξης distance.

Προφανώς η απόσταση είναι πάντα θετικός αριθμός για δύο διαφορετικά σημεία ή 0, όταν τα σημεία ταυτίζονται. Συνεπώς, εύλογα ορίζεται με τη χρήση της απολύτου τιμής. Επιπλέον, η απόσταση δύο σημείων είναι συγκεκριμένη και σταθερή, οπότε, ισχύει $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$.

~ Από τον ορισμό της απόστασης προκύπτουν οι ανισώσεις:

$$\triangleright |x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

$$\triangleright |x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$$

ΚΟΛΠΟ

Οι ανισώσεις με απόλυτες τιμές συνήθως δημιουργούν προβλήματα σύγχυσης. Για να αποφεύγουμε τυχόντα λάθη, αρκεί να καταλάβουμε το εξής απλό και να το εφαρμόζουμε στη σκέψη μας κάθε φορά που συναντούμε απόλυτη τιμή. Όταν έχουμε μια απόλυτη τιμή μικρότερη από κάποια τιμή ρ , αυτό σημαίνει ότι το περιεχόμενο της απόλυτης τιμής δεν μπορεί να ξεπεράσει το ρ ούτε από τα θετικά προς τα πάνω ούτε από τα αρνητικά προς τα κάτω. Άρα, περιορίζεται στο ενδιάμεσο διάστημα. Αντίστοιχα, όταν η απόλυτη τιμή είναι μεγαλύτερη από κάποια θετική τιμή ρ , αυτό σημαίνει ότι το περιεχόμενό της ξεπερνά την τιμή ρ είτε από τα θετικά και προς τα πάνω είτε από τα αρνητικά και προς τα κάτω. Άρα, το περιεχόμενο ανήκει στην ένωση διαστημάτων έξω από το ενδιάμεσο διάστημα που είχαμε στην πρώτη περίπτωση.

Π.χ.1

- $|x| < 8 \Leftrightarrow -8 < x < 8$
- $|x| > 6 \Leftrightarrow x > 6 \text{ ή } x < -6$
- $|x - 5| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 5 < 2 \Leftrightarrow -2 + 5 < x < 2 + 5 \Leftrightarrow 3 < x < 7$
- $|x + 4| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 > 3 \\ \text{ή} \\ x + 4 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \text{ή} \\ x < -7 \end{cases}$

Αρνός, έξυπνα και εύκολα!

Π.χ.2

Να λύσετε τη διπλή ανίσωση $3 < |x + 2| < 8$.

Λύση:

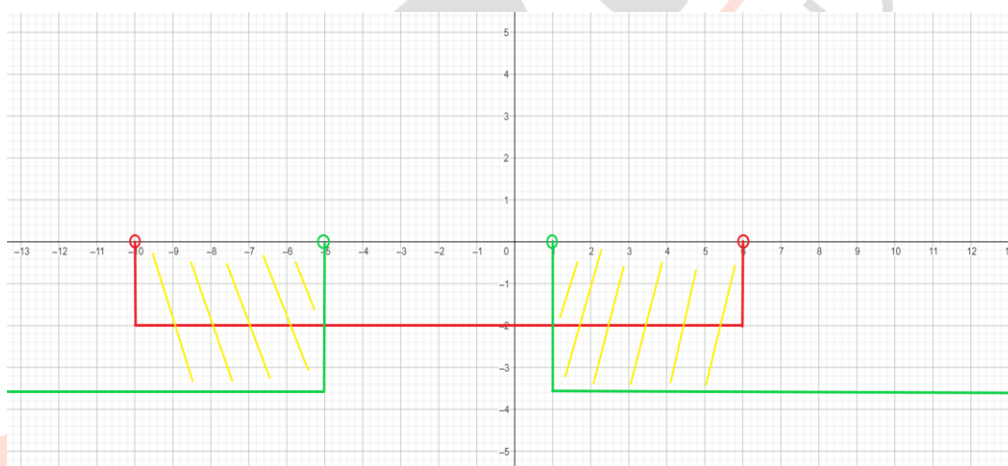
$3 < |x + 2| < 8 \Rightarrow$ Είναι διπλή ανίσωση, οπότε θα τη λύσουμε ξεχωριστά και θα συναληθεύσουμε.

$$3 < |x + 2| \Leftrightarrow |x + 2| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 > 3 \\ \text{ή} \\ x + 2 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{ή} \\ x < -5 \end{cases}$$

$$|x + 2| < 8 \Leftrightarrow -8 < x + 2 < 8 \Leftrightarrow -8 - 2 < x < 8 - 2 \Leftrightarrow -10 < x < 6$$

Για να ισχύει ταυτόχρονα η διπλή ανίσωση, πρέπει η μεταβλητή να δέχεται τιμές που ικανοποιούν ταυτόχρονα και τις δύο ανισώσεις. Έχουμε τελικά:

$$x \in (-10, -5) \cup (1, 6).$$



Παρατήρηση

Το γράφημα μας βοηθάει να αντιληφθούμε οπτικά αυτό που ίσως μας δυσκολεύει αλγεβρικά. Οπότε, συνίσταται για την αποφυγή λαθών και την καλύτερη κατανόηση η εύρεση των λύσεων, εντοπίζοντας στον άξονα των πραγματικών αριθμών τις λύσεις της μίας ανίσωσης και έπειτα τις λύσεις της άλλης, με σκοπό στο τέλος τη συναλήθευση. Αν δε συναληθεύσουμε, θα συμπεριλάβουμε λύσεις οι οποίες δεν ικανοποιούν ταυτόχρονα και τις δύο ανισώσεις.

Για παράδειγμα, η λύση $x = -3$ ικανοποιεί την ανίσωση $|x + 2| < 8$, αφού πράγματι $|-1| = 1 < 8$, ωστόσο, δεν ικανοποιεί την ανίσωση $|x + 2| > 3$, αφού $|-1| = 1 < 3$ και όχι > 3 , όπως θα έπρεπε σύμφωνα με την ανίσωση. Για αυτό το λόγο μας ενδιαφέρουν οι από κοινού λύσεις.

Φυσικά, υπάρχει και το ενδεχόμενο δύο ανισώσεις να μη συναληθεύουν πουθενά. Τέλος, το κυκλάκι που είναι πάνω από τις ακραίες τιμές των διαστημάτων με τις λύσεις των ανισώσεων δείχνει ότι η συγκεκριμένη τιμή δεν περιλαμβάνεται στο διάστημα.

Αν πραγματευόμασταν ανισότητες, τότε το κυκλάκι θα ήταν γεμάτο με χρώμα και όχι άσπρο.

Π.χ.3

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα κατάλληλα, ώστε να ικανοποιούνται όλες οι ισοδύναμες έννοιες.

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή Ένωση διαστημάτων
$ x - 4 < 3$	$d(x, 4) < 3$	$(-1, 7)$
$ x - 9 < 14$	$d(x, 9) < 14$	$(-5, 23)$
$ 4 + x \leq 7$	$d(x, -4) \leq 7$	$[-11, 3]$
$ x - 2 \geq 0$	$d(x, 2)$	$(-\infty, 2] \cup [2, +\infty) = \mathbb{R}$
$ x - 5 > 1$	$d(x, 5) > 1$	$(-\infty, 4) \cup (6, +\infty)$
$ x \geq 16$	$d(x, 0) \geq 16$	$(-\infty, -16] \cup [16, +\infty)$
$ x - 7 \leq 2$	$d(x, 7) \leq 2$	$[5, 9]$
$ x > 3$	$d(x, 0) > 3$	$(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
$ x + 6 \geq 7$	$d(x, -6) \geq 7$	$(-\infty, -13] \cup [1, +\infty)$
$ x - 5 \geq -9$	$d(x, -5) \geq -9$	$\mathbb{R}$

Σημείωση:

Στο τελευταίο παράδειγμα δεν υπάρχει κάποιο διάστημα να υπολογίσουμε, διότι οποιαδήποτε απόσταση είναι ούτως ή άλλως μεγαλύτερη από κάθε αρνητικό αριθμό, αφού η απόσταση είναι θετική έννοια για δύο οποιαδήποτε σημεία, τα οποία φυσικά δεν ταυτίζονται (τότε θα ήταν μηδέν).

Π.χ.4

Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις.

$$\alpha) \frac{|x|^3 + 3x^2}{2|x| + 6} \qquad \beta) \frac{4x^2 + 4|x| + 1}{2|x| + 1}$$

Λύση:

$$\alpha) \frac{|x|^3 + 3x^2}{2|x| + 6} = \frac{|x|^3 + 3|x|^2}{2|x| + 6} = \frac{|x|^2(|x| + 3)}{2(|x| + 3)} = \frac{|x|^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\beta) \frac{4x^2 + 4|x| + 1}{2|x| + 1} = \frac{4|x|^2 + 4|x| + 1}{2|x| + 1} = \frac{(2|x| + 1)^2}{2|x| + 1} = 2|x| + 1$$

Π.χ.5

Έστω ορθογώνιο με πλευρές x, y για τις οποίες ισχύει $1 < x < 5$ και $3 < y < 13$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχονται τα παρακάτω.

α) $|x - 3|$

β) $|8 - y|$

γ) η περίμετρος του ορθογωνίου

δ) το εμβαδόν του ορθογωνίου

Λύση:

$$\alpha) 1 < x < 5 \Leftrightarrow 1 - 3 < x - 3 < 5 - 3 \Leftrightarrow -2 < x - 3 < 2 \Leftrightarrow |x - 3| < 2$$

$$\beta) 3 < y < 13 \Leftrightarrow -13 < -y < -3 \Leftrightarrow -13 + 8 < -y + 8 < -3 + 8 \Leftrightarrow -5 < 8 - y < 5 \Leftrightarrow |8 - y| < 5$$

Αρνός, έξυπνα και εύκολα!

$$\gamma) \Pi = x + y + x + y = 2x + 2y \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 < x < 5 \\ 3 < y < 13 \end{array} \right\} \stackrel{+}{\Leftrightarrow} 2 < 2x < 10 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 8 < 2x + 2y < 36 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 8 < \Pi < 36$$

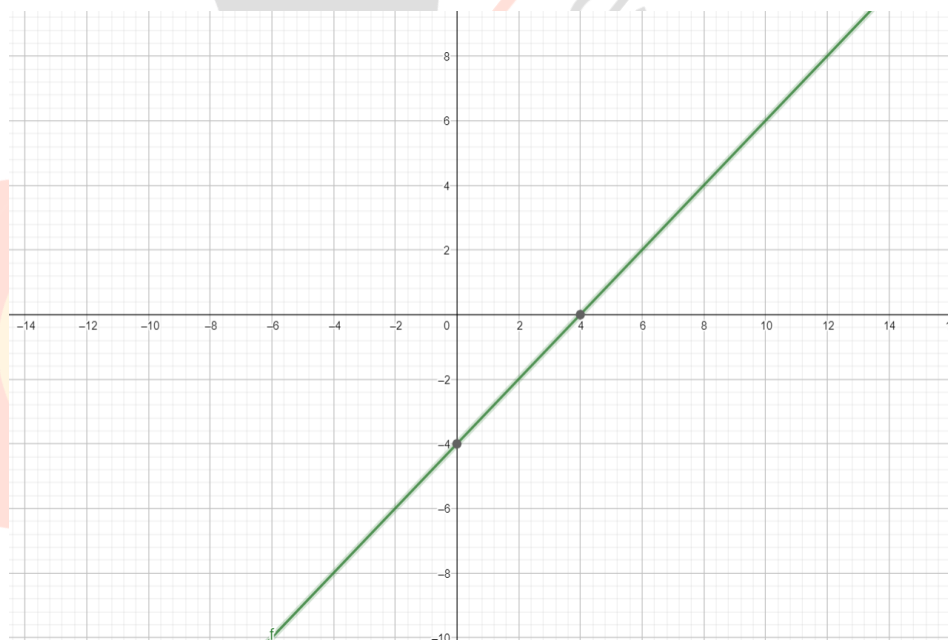
$$\delta) E = xy \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 < x < 5 \\ 3 < y < 13 \end{array} \right\} \stackrel{*}{\Leftrightarrow} 3 < xy < 65 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 3 < E < 65$$

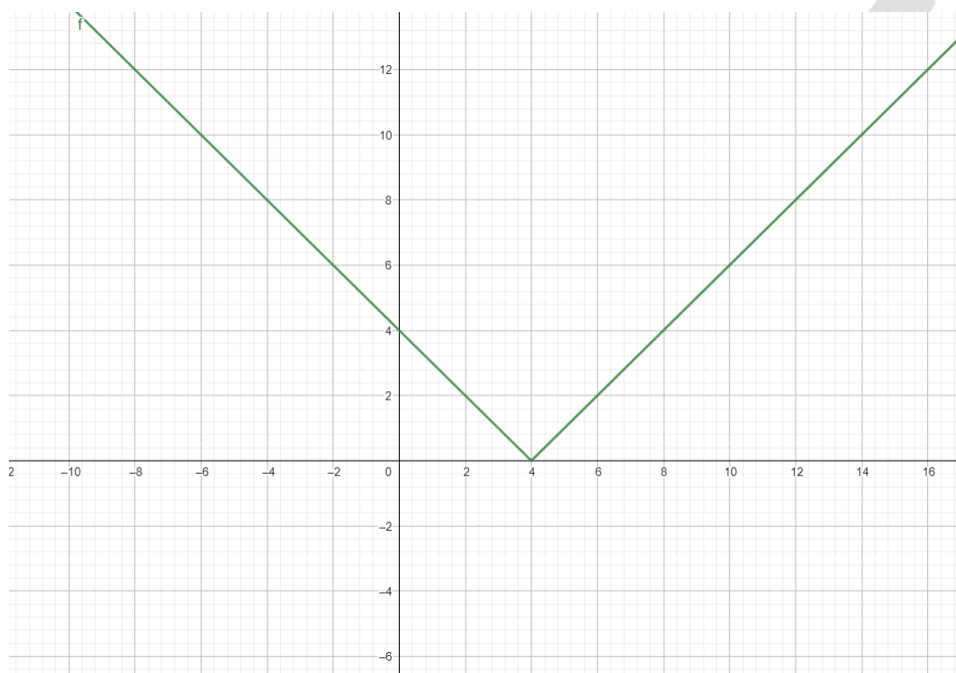
Συναρτήσεις με Απόλυτη Τιμή:

Ξέρουμε ότι η απόλυτη τιμή επιστρέφει πάντα μη αρνητικές τιμές. Πώς επιδρά αυτό, ωστόσο, στις διάφορες συναρτήσεις; Ας δούμε μερικά παραδείγματα των γραφικών παραστάσεων διάφορων συναρτήσεων και των αντίστοιχών τους κατ' απόλυτη τιμή.

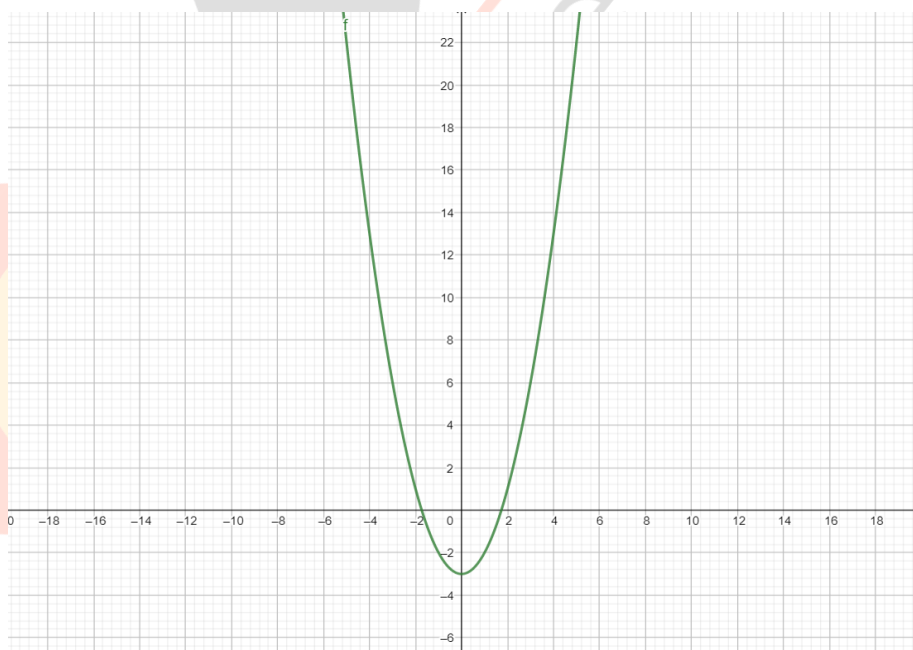
$$\triangleright f(x) = x - 4 \Rightarrow$$



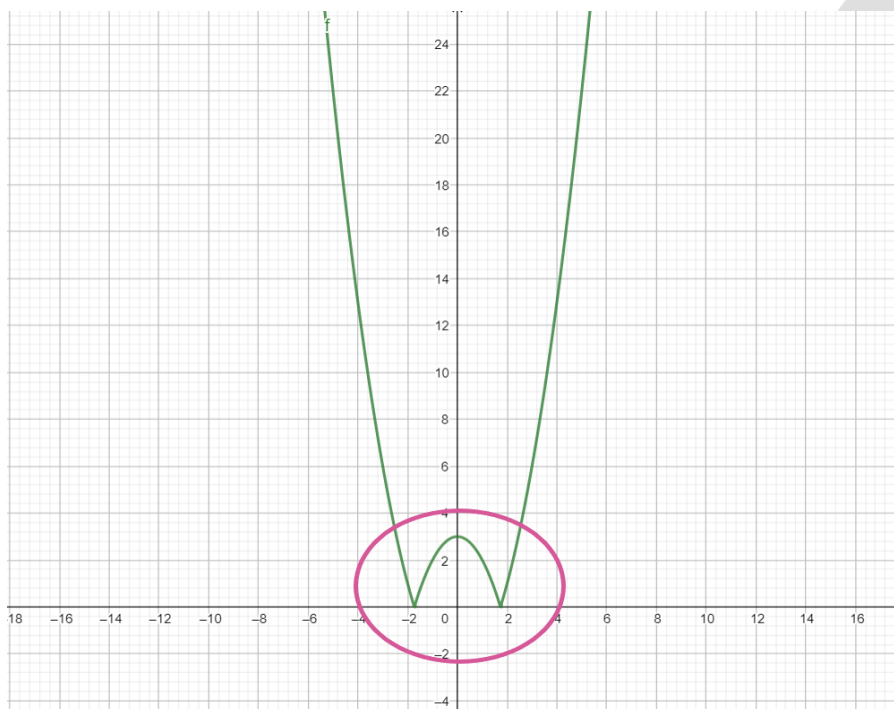
$$|f(x)| = |x - 4| \Rightarrow$$



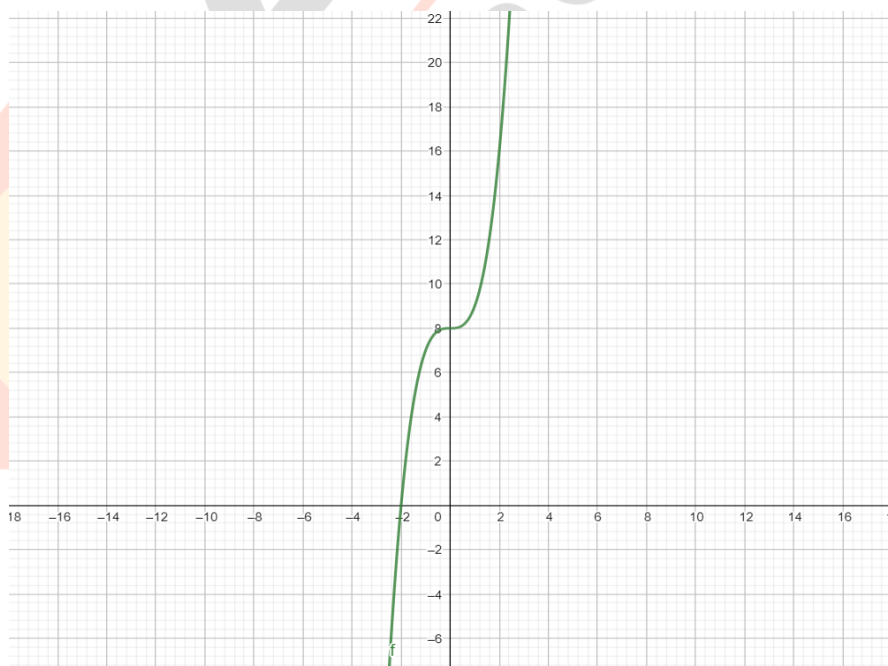
➤ $f(x) = x^2 - 3 \Rightarrow$



$$|f(x)| = |x^2 - 3| \Rightarrow$$

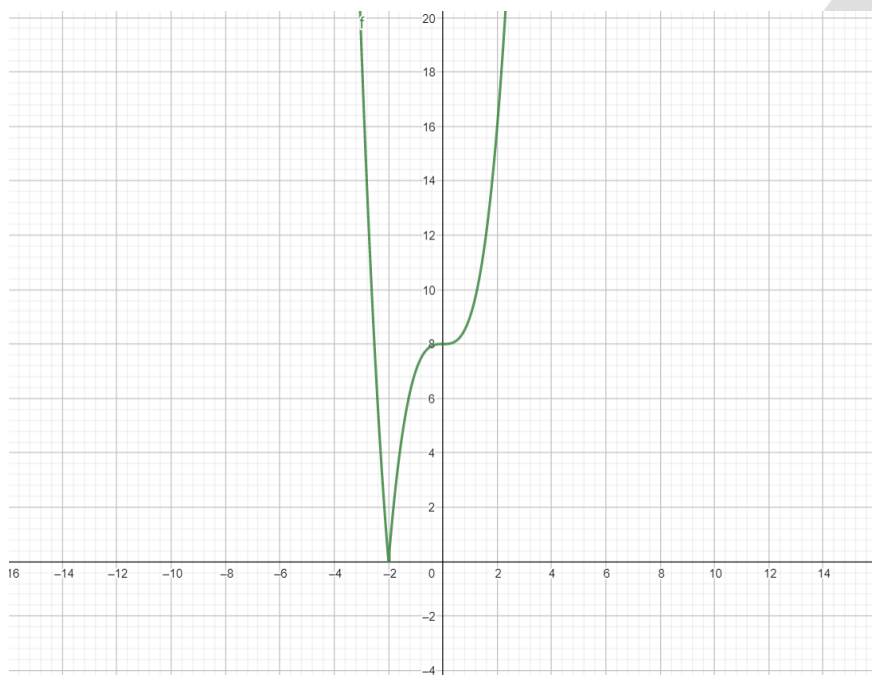


➤ $f(x) = x^3 + 8 \Rightarrow$

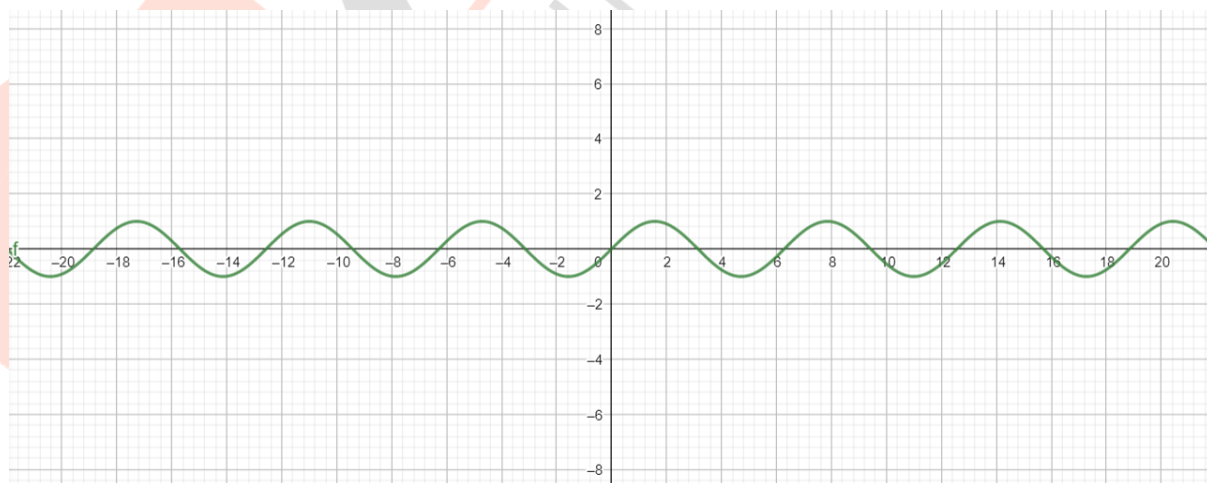


Αρνός, έξυπνα και εύκολα!

$$|f(x)| = |x^3 + 8| \Rightarrow$$



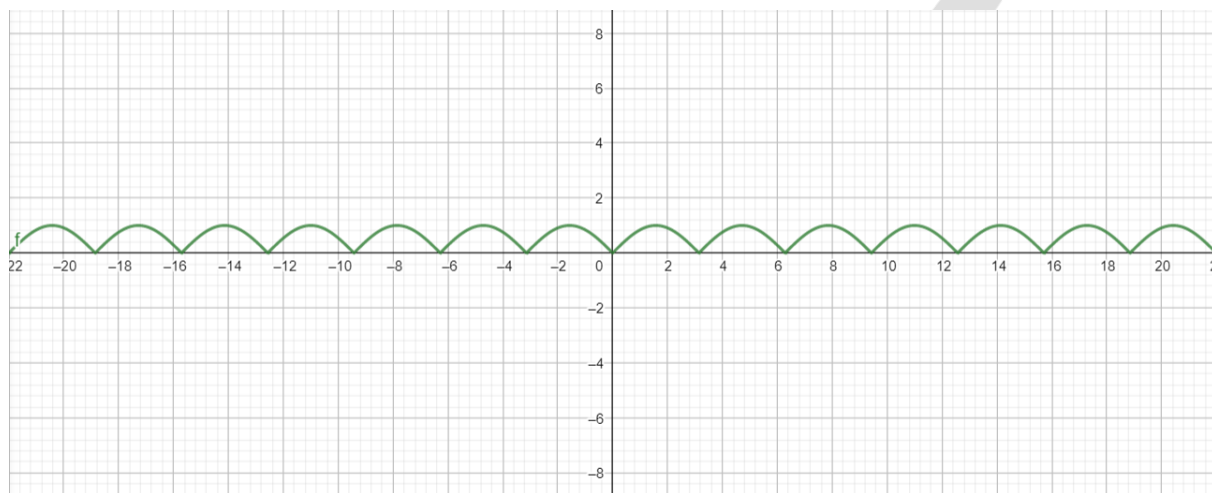
$$\Rightarrow f(x) = \eta\mu x \Rightarrow$$



Αρνός, έξυπνα και εύκολα!

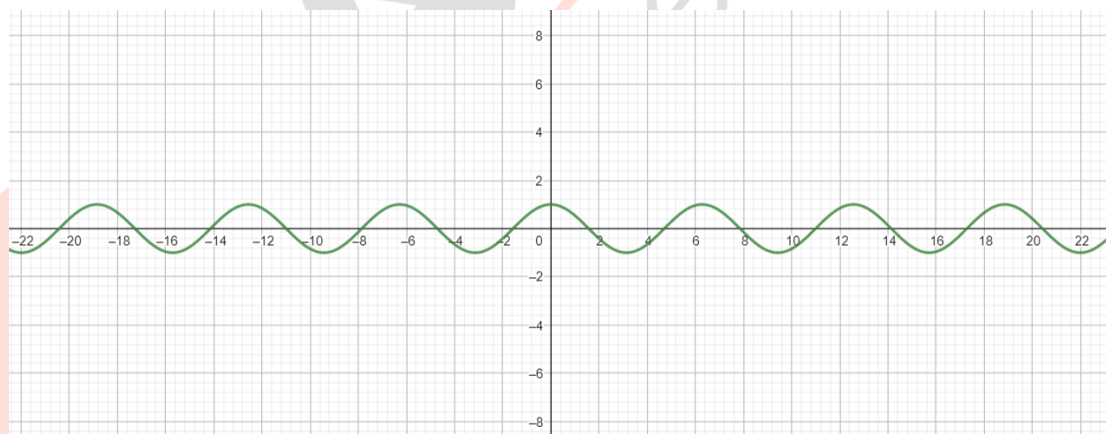
www.arnos.gr info@arnos.gr Επιμέλεια: Παναγιώτα Λέκκα

$$|f(x)| = |\eta\mu x| \Rightarrow$$



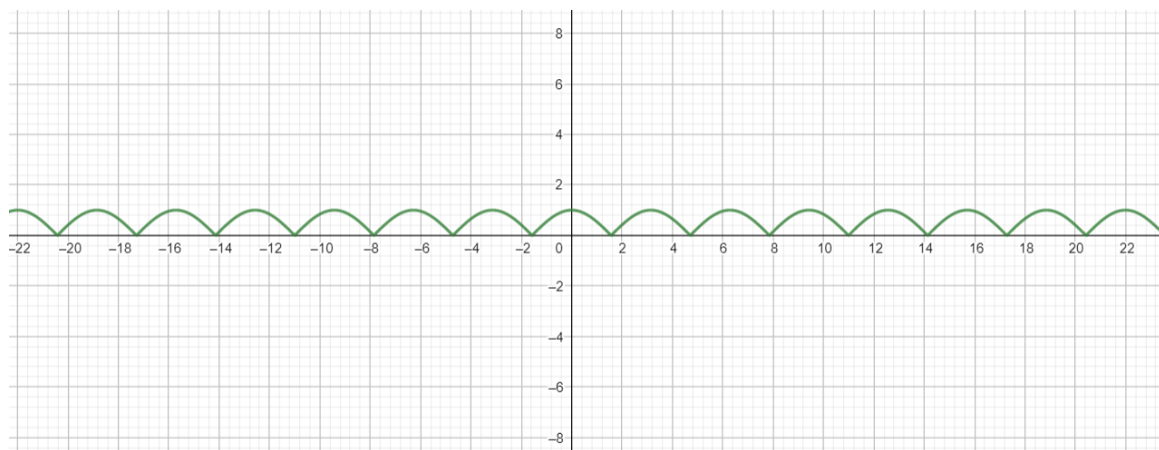
~ Παρατηρήστε τις διαφορές στις γραφικές παραστάσεις του $\eta\mu x$ και του $\sigma\upsilon\nu x$ τόσο χωρίς όσο και κατ' απόλυτη τιμή.

$$\triangleright f(x) = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow$$



$$|f(x)| = |\sigma\upsilon\nu x| \Rightarrow$$

Αρνός, έξυπνα και εύκολα!



Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις κατ' απόλυτη τιμή έχουν γραφική παράσταση πάνω από τον άξονα των x .

Το αρνητικό κομμάτι της συνάρτησης, όταν αυτό υπάρχει, τώρα «ανεβαίνει» πάνω από τον άξονα των x , αφού η απόλυτη τιμή επιστρέφει πάντα μη αρνητικές τιμές ως συνάρτηση.