Προσδοκώμενοι Στόχοι Ενότητας:

→ Ο/Η μαθητής/τρια θα πρέπει στο πέρας της ενότητας να έχει κατανοήσει σε βάθος:

- την έννοια της διάταξης,
- την έννοια της ανισότητας και της ιδιότητες αυτής,
- τους κανόνες που ακολουθούμε, προκειμένου να πραγματοποιούμε πράξεις μεταξύ ανισοτήτων,
- την έννοια του ανοιχτού και κλειστού διαστήματος.

Συμπλήρωση Κενών:

Σε αυτό το κομμάτι της ενότητας ο/η μαθητής/τρια θα βρει τις παρατηρήσεις, τα κόλπα και τις έξυπνες μεθόδους που χρειάζεται για να καταλάβει πλήρως όλα όσα έμαθε και να καλύψει τυχόντα κενά.

Διάταξη Πραγματικών Αριθμών:

Η έννοια της διάταξης βρίσκεται παντού γύρω μας. Από το ύψος των μαθητών μια τάξης μέχρι τη μέγιστη θερμοκρασία μέσα στο έτος, τα διάφορα δεδομένα που έχουμε με κάποιο τρόπο μπαίνουν σε μια σειρά. Αυτό οφείλεται στην έννοια της διάταξης, χάρη στην οποία εξασφαλίζεται τάξη και ισορροπία σε όλα τα πράγματα γύρω μας. Είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε μεταξύ δύο πραγμάτων ποιο είναι το μεγαλύτερο ή αντίστοιχα το μικρότερο.

↝ Μεταξύ δύο αριθμών α και β μεγαλύτερος είναι ο α, αν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετική, ενώ είναι μικρότερος ο α από τον β, αν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι αρνητική.

Ερώτημα: Τι σημαίνει η διαφορά είναι θετική και αντίστοιχα αρνητική;

↝ Ένας αριθμός α είναι θετικός, όταν είναι μεγαλύτερος του μηδενός, δηλαδή $\alpha > 0$ και αντίστοιχα, είναι αρνητικός, όταν είναι μικρότερος του μηδενός, δηλαδή $\alpha < 0$.

Συνεπώς, θετική διαφορά σημαίνει μεγαλύτερη του μηδενός και άρα ο αφαιρετέος είναι μεγαλύτερος από το μειωτέο. Αντίστοιχα, συμπεραίνουμε και για τη μικρότερη του μηδενός διαφορά ότι ο αφαιρετέος είναι μικρότερος από το μειωτέο όρο.

Συνολικά, **«Διάταξη»** σημαίνει η ικανότητα να μπορούμε να διατάξουμε, να παρατάξουμε τους αριθμούς πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, να μπορέσουμε ουσιαστικά να τους τοποθετήσουμε με μια λογική σειρά τον ένα δίπλα στον άλλο, εξασφαλίζοντας τη συνέχειά τους.

<u>Η διάταξη είναι αυτή που μας επιτρέπει να ορίζουμε τους αριθμούς, καθώς συνεπάγεται τη διαφορά δύο αριθμών, ότι δηλαδή δεν ταυτίζονται μεταξύ τους, ότι έχει νόημα να τους ορίζουμε.</u> Από τη διάταξη προκύπτει η έννοια της **ανίσωσης/ανισότητας**.

Έξυπνες Παρατηρήσεις:

- Όσο προχωράμε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών προς τα δεξιά τόσο οι αριθμοί αυξάνονται, ενώ όσο προχωράμε προς τα αριστερά τόσο οι αριθμοί μειώνονται.

- Οι **άρρητοι αριθμοί**, παρότι ανήκουν στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, **δεν μπορούν να διαταχθούν**, διότι το άπειρο πλήθος των δεκαδικών τους ψηφίων δε μας επιτρέπει να γνωρίζουμε ποιος είναι μεγαλύτερος και ποιος μικρότερος.

Η Έννοια της Ανίσωσης/Ανισότητας:

Χάρη στη διάταξη μπορούμε να συμπεράνουμε και να παρατάξουμε τους αριθμούς σε μια λογική σειρά. Άμεση απόρροια της διάταξης είναι η έννοια της ανίσωσης. Ανίσωση σημαίνει ότι δεν υπάρχει εξίσωση, <u>δηλαδή τα δύο μέλη μιας μαθηματικής έκφρασης δεν είναι ίσα μεταξύ τους, αλλά το ένα υπερέχει έναντι του άλλου</u>.

Υπάρχουν βέβαια και περιπτώσεις όπου τα δύο μέλη μιας μαθηματικής έκφρασης έχουν τη δυνατότητα είτε να διαφέρουν είτε να είναι ίσα. Για αυτόν το λόγο υπάρχει η έννοια της ανισότητας.

Ιδιότητες και Πράξεις μεταξύ Ανισώσεων και Ανισοτήτων:

Οι ιδιότητες ισχύουν τόσο για τις ανισώσεις όσο και για τις ανισότητες.

- Μπορούμε να προσθέτουμε τον ίδιο όρο και στα δύο μέλη μια ανίσωσης και η φορά της μένει ίδια. Αυτό ισχύει είτε προσθέτουμε θετικό όρο είτε αρνητικό.

- Όταν πολλαπλασιάζουμε τα μέλη μιας ανίσωσης με έναν αριθμό, η φορά της παραμένει ίδια, όταν ο αριθμός αυτός είναι θετικός, ενώ αλλάζει, όταν ο αριθμός αυτός είναι αρνητικός.

- Μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη δύο διαφορετικές ανισώσεις μεταξύ τους, προσέχοντας τη φορά τους να είναι ίδια. **Όταν προσθέτουμε, η φορά παραμένει ίδια, ενώ, όταν αφαιρούμε, η φορά αλλάζει.**

- Το ίδιο πράγμα ισχύει και για τον πολλαπλασιασμό δύο διαφορετικών ανισοτήτων μεταξύ τους. Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ανισώσεις και η φορά να παραμείνει ίδια, αλλά, αν θέλουμε να διαιρέσουμε, πρέπει να αλλάξουμε τη φορά.

Π.χ.

- $3 < 8 \overset{+5}{\Rightarrow} 8 < 13$
- $9 < 14 \xRightarrow{+(-7)} 9 - 7 < 14 - 7 \Rightarrow 2 < 7$
- $2 < 6 \overset{*4}{\Rightarrow} 8 < 24$
- $7 > 4 \xRightarrow{*(-9)} -63 < -36$
- $\begin{Bmatrix} 3 < 5 \\ 2 > 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3 < 5 \\ 1 < 2 \end{Bmatrix} \overset{+}{\Leftrightarrow} 3 + 1 < 5 + 2 \Leftrightarrow 4 < 7$
- $\begin{Bmatrix} -2 < 3 \\ 4 < 6 \end{Bmatrix} \overset{*}{\Leftrightarrow} -2 * 4 < 3 * 6 \Leftrightarrow -8 < 18$
- $\begin{Bmatrix} 6 < 11 \\ 13 > 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 6 < 11 \\ 2 < 13 \end{Bmatrix} \overset{-}{\Leftrightarrow} 6 - 2 > 11 - 13 \Leftrightarrow 4 > -2$
- $3 < 6 \xRightarrow{*1/5} \frac{3}{5} < \frac{6}{5}$
- $\begin{Bmatrix} 7 < 8 \\ 3 < 4 \end{Bmatrix} \overset{:}{\Leftrightarrow} \frac{7}{3} > \frac{8}{4}$

Διάταξη και Δυνάμεις:

Πολλές φορές θα χρειαστεί να συμπεράνουμε τη διάταξη δύο ή περισσότερων αριθμών που θα είναι δοσμένοι σε μορφή δύναμης. Μία επιλογή που έχουμε είναι να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της δύναμης και να αποφανθούμε. Αυτό όμως δεν είναι πάντα εύκολο, ειδικά, όταν έχουμε δυνάμεις με μεγάλο εκθέτη. Η δεύτερη επιλογή που έχουμε είναι να συμπεράνουμε επιτόπου το συμπέρασμά μας, βασιζόμενοι στις κάτωθεν ιδιότητες.

Αν α και β είναι <u>θετικοί</u> αριθμοί και ν ένας φυσικός αριθμός, τότε ισχύει:

- $\alpha = \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha^\nu = \beta^\nu$
- $\alpha > \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha^\nu > \beta^\nu$

Αν α και β είναι <u>αρνητικοί</u> αριθμοί και ν ένας φυσικός αριθμός, τότε ισχύει:

- $\alpha = \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha^\nu = \beta^\nu$
- $\alpha > \beta \;\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha^\nu > \beta^\nu, \;\; \alpha\nu\; \nu\; \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ \alpha^\nu < \beta^\nu, \;\; \alpha\nu\; \nu\; \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{Bmatrix}$

Διαστήματα:

Τα διαστήματα είναι σύνολα τα οποία περιλαμβάνουν αριθμούς και μας επιτρέπουν να ορίζουμε διάφορες έννοιες. Τα διαστήματα δεν περιλαμβάνουν μεμονωμένες τιμές, αλλά όλους τους πραγματικούς αριθμούς που παρεμβάλλονται μεταξύ των άκρων των διαστήματος.

Για παράδειγμα, στο διάστημα [4, 17] περιλαμβάνονται όλοι οι αριθμοί που παρεμβάλλονται από το 4 έως και το 17(φυσικοί/θετικοί ακέραιοι, ρητοί άρρητοι).

Τα διαστήματα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες· στα ανοιχτά και στα κλειστά. Η διαφορά τους εντοπίζεται στο γεγονός ότι τα κλειστά διαστήματα περιέχουν και τα άκρα, ενώ τα ανοιχτά διαστήματα όχι. Τα διαστήματα χρησιμεύουν, όταν θέλουμε να ορίσουμε πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών για μία συνάρτηση(έννοιες που θα αναλυθούν σε επόμενες ενότητες).

Παρατηρήσεις:

- Οι ανισώσεις συνδέονται άμεσα με τα διαστήματα. Όταν ένας αριθμός ανήκει σε ένα διάστημα, αυτό σημαίνει ότι περιλαμβάνεται σε αυτό, **άρα ότι είναι σίγουρα μεγαλύτερος από το αριστερό άκρο και σίγουρα μικρότερος από το δεξί.** Δηλαδή, αν ξέρουμε για έναν αριθμό α ότι ανήκει στο διάστημα [8, 19], αυτό σημαίνει: $\alpha \in [8, 19] \Leftrightarrow 8 \leq \alpha \leq 19$.

- Όταν σε μία ανίσωση παρεμβάλλουμε μία μεταβλητή μεταξύ δύο άκρων(είτε είναι αριθμοί είτε επίσης μεταβλητές), τότε έχουμε <u>διπλή ανίσωση</u>.
  <u>Π.χ.</u> : $2 < x \leq 9$

- Όταν έχουμε μια ανίσωση της μορφής $x > a$ ή $x < a$, το άκρο που παραλείπεται εννοείται ότι είναι το άπειρο.

$$x > a \Leftrightarrow a < x < +\infty$$

$$x < a \Leftrightarrow -\infty < x < a$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Αν ισχύει για δύο πραγματικούς αριθμούς $\alpha < \beta \Leftrightarrow -\alpha > -\beta$.

- Δεν αντιστρέφουμε τα μέλη μιας ανίσωσης, εκτός, αν γνωρίζουμε το πρόσημο τους, προκειμένου να αλλάζει η φορά σύμφωνα με τις ιδιότητες που αναφέραμε πιο πάνω και να ισχύει η αρχική ανίσωση.

- Για να υψώσουμε στο τετράγωνο τα μέλη μιας ανίσωσης, πρέπει να γνωρίζουμε τα πρόσημα των δύο μελών, καθώς, αν είναι θετικά και τα δύο, η φορά παραμένει ίδια, ενώ, αν είναι αρνητικά και τα δύο, η φορά αλλάζει. Αυτό συμβαίνει, διότι οι αριθμοί, όταν προχωράμε στα αριστερά του άξονα των πραγματικών αριθμών μειώνονται.

- Για να κάνουμε «χιαστί» σε δύο ανισοτικές σχέσεις, πρέπει να γνωρίζουμε τα πρόσημα των παρονομαστών(αν δεν έχουμε κλάσμα, παρονομαστής θεωρείται η μονάδα).

- Παρατηρούμε γενικά ότι είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε το πρόσημο των δύο μελών σε μια ανίσωση, προκειμένου να τη χειριστούμε σωστά. Αλλαγές προσήμων προκαλούν αλλαγές στη φορά, διότι οι αριθμοί έχουν άλλοι διάταξη στα θετικά και άλλη στα αρνητικά.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Να δείξετε ότι ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες.

α) $9\alpha^2 + 1 \geq 6\alpha$

β) $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$

Λύση:

α) $9\alpha^2 + 1 \geq 6\alpha \Leftrightarrow 9\alpha^2 - 6\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (3\alpha - 1)^2 \geq 0$, το οποίο ισχύει πάντα ως τέλειο τετράγωνο, το οποίο είναι $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ μη αρνητικός αριθμός

β) $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow$

$2\alpha^2 + 2\beta^2 \geq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow$

$2\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0,$

που ισχύει πάντα ως τέλειο τετράγωνο $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Άσκηση 2:

Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) $\alpha^2 + \alpha\beta \geq \beta(3\alpha - \beta)$

β) $(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2) \geq 4\alpha\beta$

γ) $4\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha - 8\beta + 17 \geq 0$

Λύση:

α) $\alpha^2 + \alpha\beta \geq \beta(3\alpha - \beta) \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha\beta \geq 3\alpha\beta - \beta^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0,$

που ισχύει πάντα ως τέλειο τετράγωνο $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

β) $(1+\alpha^2)(1+\beta^2) \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow$

$1+\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow$

$1+\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$

$1+\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta-2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)^2+1-2\alpha\beta+(\alpha\beta)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)^2+(\alpha\beta-1)^2 \geq 0$,

που ισχύει ως άθροισμα τέλειων τετραγώνων, δηλαδή άθροισμα μη αρνητικών όρων

γ) $4\alpha^2+\beta^2+4\alpha-8\beta+17 \geq 0 \Leftrightarrow$

$4\alpha^2+\beta^2+4\alpha-8\beta+1+16 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(2\alpha+1)^2+(\beta-4)^2 \geq 0$,

που ισχύει πάντα ως άθροισμα τέλειων τετραγώνων/μη αρνητικών όρων

Άσκηση 3:

Αν για δύο πραγματικούς αριθμούς ισχύει $\alpha+\beta=8$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha\beta \leq 16$

β) $\alpha^2+\beta^2 \geq 32$

Λύση:

α) $\alpha+\beta=8 \Leftrightarrow \beta=8-\alpha \qquad (1)$

$\alpha\beta \leq 16 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \alpha(8-\alpha) \leq 16 \Leftrightarrow 8\alpha-\alpha^2 \leq 16 \Leftrightarrow \alpha^2-8\alpha+16 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-4)^2 \geq 0$, που ισχύει πάντα ως τέλειο τετράγωνο

β) $\alpha^2+\beta^2 \geq 32 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \alpha^2+(8-\alpha)^2 \geq 32 \Leftrightarrow \alpha^2+64-16\alpha+\alpha^2 \geq 32 \Leftrightarrow$

$2\alpha^2-16\alpha+32 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2-8\alpha+16 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-4)^2 \geq 0$, που ισχύει πάντα ως τέλειο τετράγωνο

Άσκηση 4:

Αν για τρεις πραγματικούς αριθμούς ισχύει $\alpha < \beta < \gamma$, τότε να δείξετε ότι ισχύει:

$$\alpha < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} < \gamma$$

Λύση:

$\alpha < \beta < \gamma \;\Leftrightarrow \alpha + \alpha < \alpha + \beta < \alpha + \gamma \;\Leftrightarrow$

$2\alpha + \gamma < \alpha + \beta + \gamma < \alpha + 2\gamma \qquad (1)$

Αφού ισχύει $\alpha < \gamma \Leftrightarrow 2\alpha < \alpha + \gamma \Leftrightarrow 3\alpha < 2\alpha + \gamma \qquad (2)$

Αφού ισχύει $\alpha < \gamma \Leftrightarrow \alpha + \gamma < 2\gamma \Leftrightarrow \alpha + 2\gamma < 3\gamma \qquad (3)$

$(1) \overset{(2),(3)}{\Longleftrightarrow} \boldsymbol{3\alpha} < 2\alpha + \gamma < \alpha + \beta + \gamma < \alpha + 2\gamma < \boldsymbol{3\gamma} \;\Leftrightarrow\; \alpha < \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3} < \gamma$

Άσκηση 5:

Να βρείτε τους αριθμούς α και β για του οποίους ισχύουν οι παρακάτω ισότητες.

α) $\alpha^2 + \beta^2 = 4(\beta - 1)$ β) $(\alpha+5)^2 + (\beta-2)^2 = 4(\alpha+\beta+1)$

Λύση:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = 4(\beta - 1) \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 4\beta + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (\beta-2)^2 = 0 \Rightarrow$

Έχουμε άθροισμα μη αρνητικών όρων ίσο με το μηδέν, συνεπώς η ισότητα

ισχύει για έκαστο όρο ίσο με το μηδέν, δηλαδή: $\begin{Bmatrix} \alpha = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \beta - 2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \beta = 2 \end{Bmatrix}$

β) $(\alpha+5)^2 + (\beta-2)^2 = 4(\alpha+\beta+1) \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + 10\alpha + 25 + \beta^2 - 4\beta + 4 = 4\alpha + 4\beta + 4 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + 10\alpha + 25 + \beta^2 - 4\beta + 4 - 4\alpha - 4\beta - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + 6\alpha + \beta^2 - 8\beta + 25 = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + 6\alpha + \beta^2 - 8\beta + \boldsymbol{9 + 16} = 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha+3)^2 + (\beta-4)^2 = 0 \;\Rightarrow$

Έχουμε άθροισμα μη αρνητικών όρων ίσο με το μηδέν, συνεπώς η ισότητα

ισχύει για έκαστο όρο ίσο με το μηδέν, δηλαδή: $\begin{Bmatrix} \alpha + 3 = 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \beta - 4 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = -3 \\ \kappa\alpha\iota \\ \beta = 4 \end{Bmatrix}$

Άσκηση 6:

Αν για δύο πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει $3 < \alpha < 5$ *και* $1 < \beta < 4$, να αποδείξετε ότι:

α) $10 < 2\alpha + 4\beta < 26$ β) $-7 < 3\alpha - \beta^2 < 14$ γ) $\frac{\alpha-5}{\beta}$

Λύση:

α) $\begin{cases} 3 < \alpha < 5 \\ 1 < \beta < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 < 2\alpha < 10 \\ 4 < 4\beta < 16 \end{cases} \overset{+}{\Leftrightarrow} 10 < 2\alpha + 4\beta < 26$

β) $\begin{cases} 3 < \alpha < 5 \\ 1 < \beta < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 < 3\alpha < 15 \\ 1 < \beta^2 < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 < 3\alpha < 15 \\ -16 < -\beta^2 < -1 \end{cases} \overset{+}{\Leftrightarrow} -7 < 3\alpha - \beta^2 < 14$

γ) $\begin{cases} 3 < \alpha < 5 \\ 1 < \beta < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < \alpha - 5 < 0 \\ \frac{1}{4} < \frac{1}{\beta} < 1 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{2} < \frac{\alpha-5}{\beta} < 0$

***ΣΗΜΕΙΩΣΗ*:**

Όταν αντιστρέφουμε τους όρους μιας ανίσωσης/ανισότητας, τότε η φορά αυτής αλλάζει.

Άσκηση 7:

Να παραστήσετε στον άξονα των πραγματικών αριθμών τα παρακάτω διαστήματα.

α) $A = (1,6)$

β) $B = (4,15]$

γ) $\Gamma = \left[-2, \frac{13}{2}\right)$

δ) $\Delta = (1,4) \cup [6,10]$

ε) $K = (-6, +\infty)$

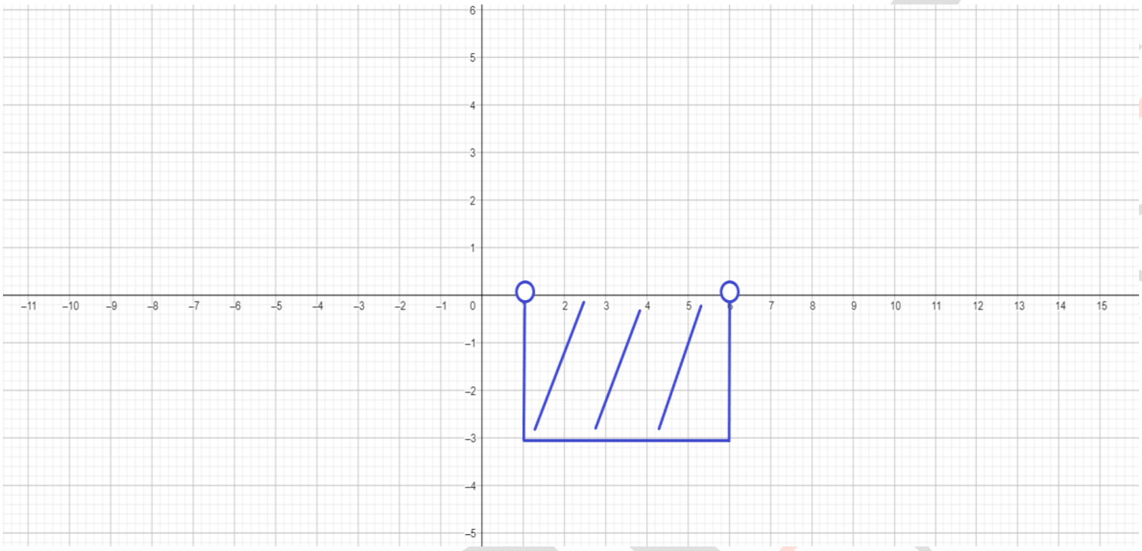
στ) $\Lambda = (-\infty, 12]$

ζ) $M = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$

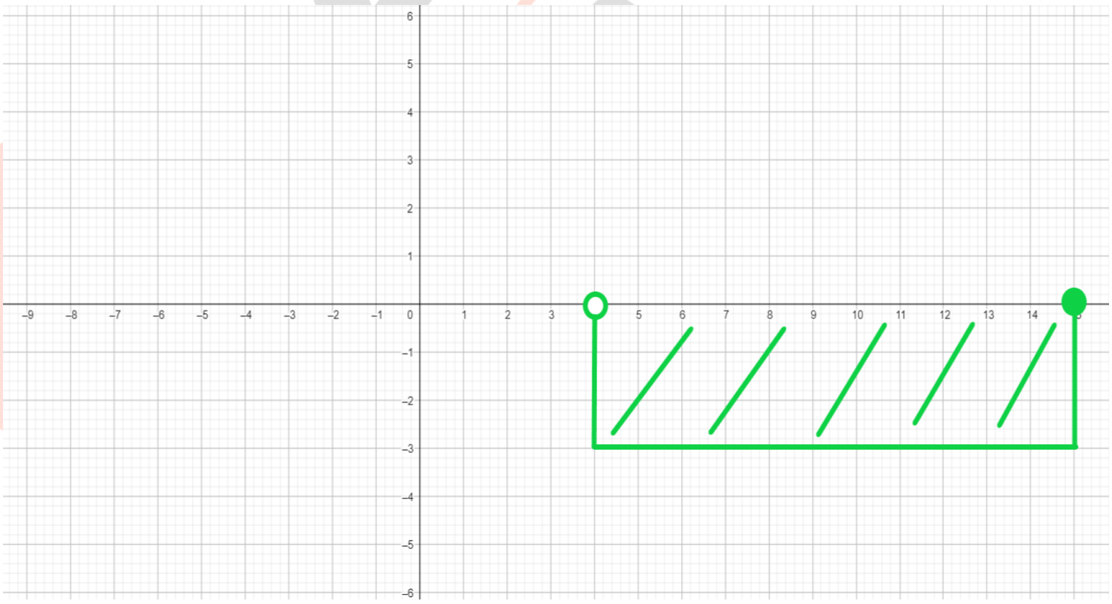
η) $N = (-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$

Λύση:

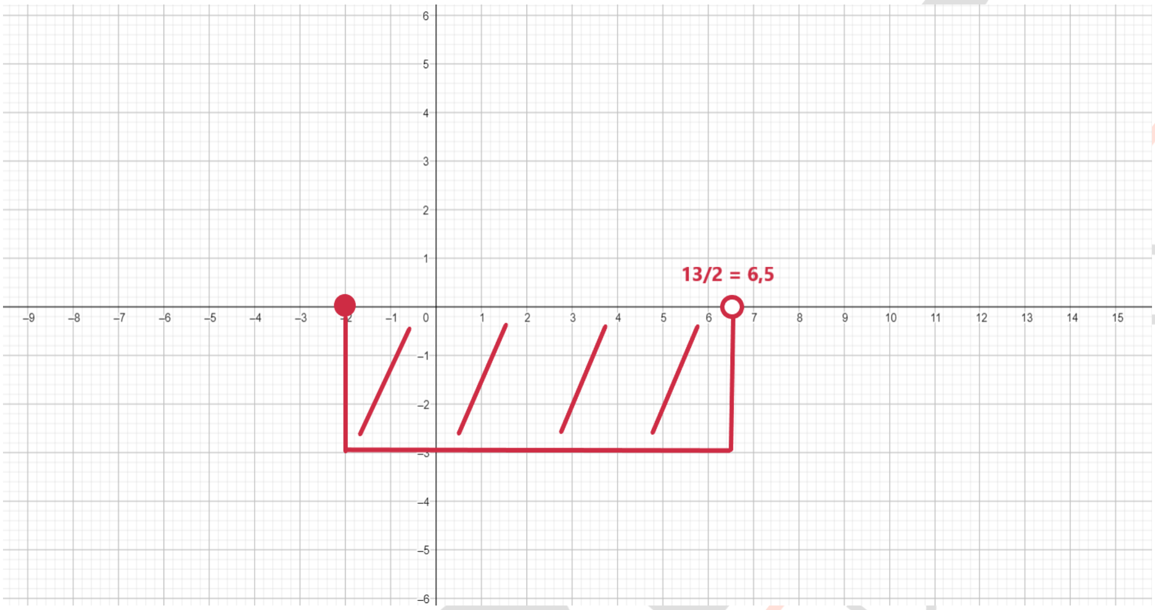
α) $A = (1,6)$



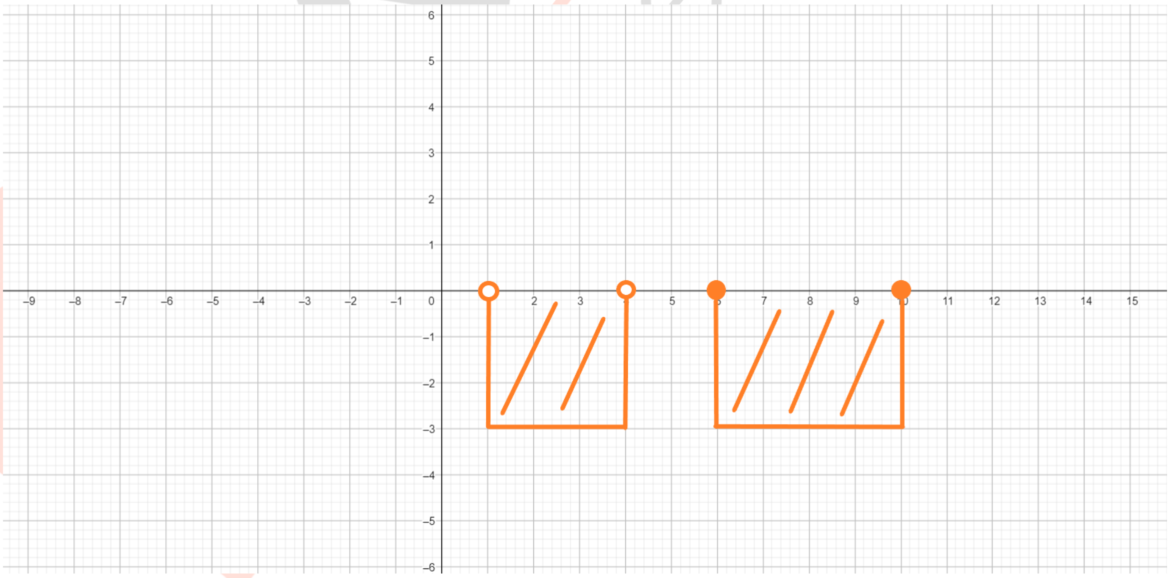
β) $B = (4,15]$



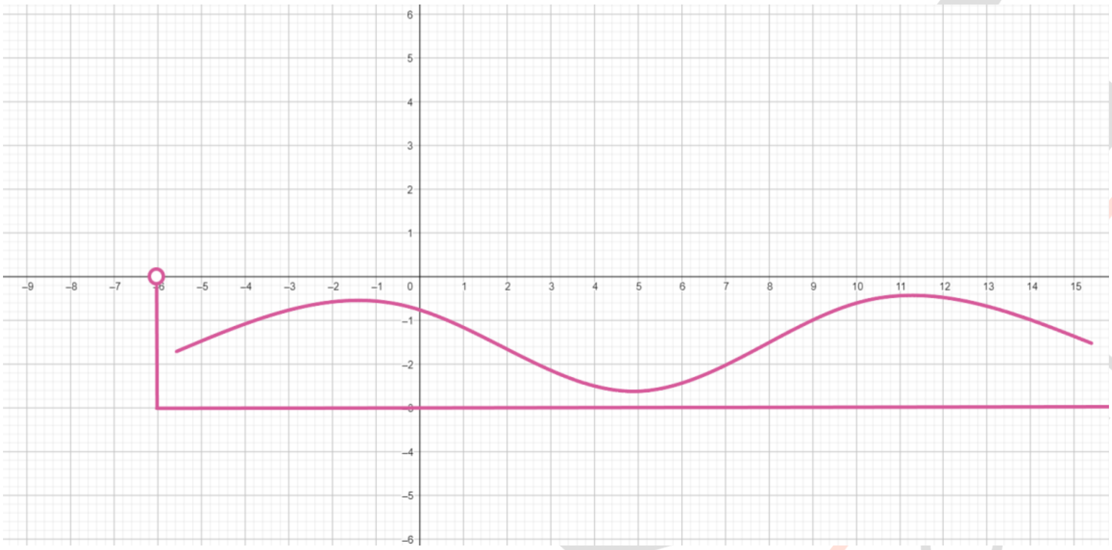
γ) $\Gamma = \left[-2, \frac{13}{2}\right)$



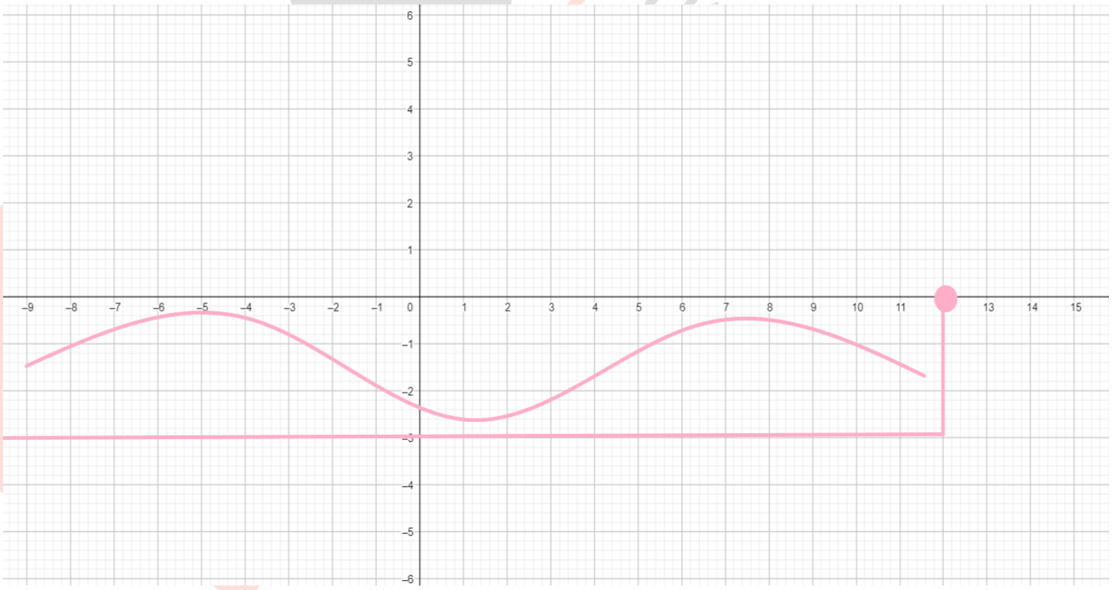
δ) $\Delta = (1,4) \cup [6,10]$



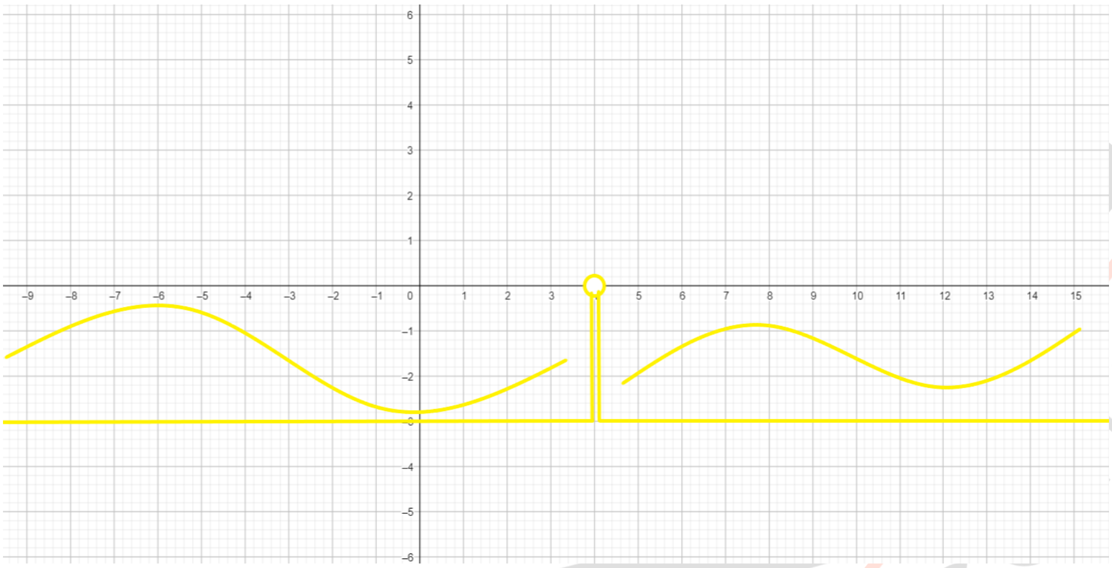
ε) $K = (-6, +\infty)$



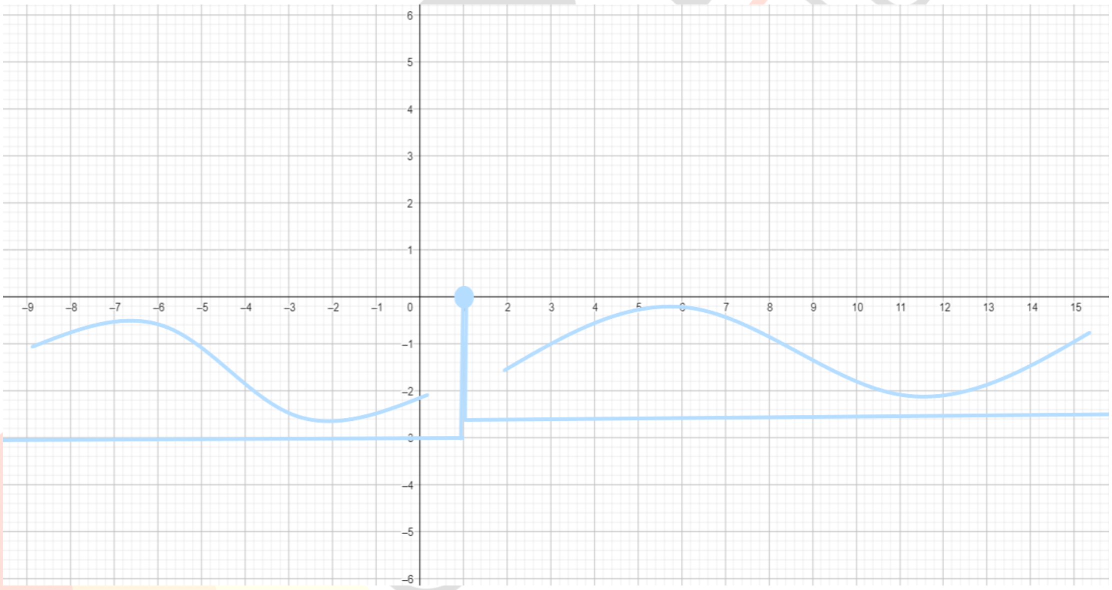
στ) $\Lambda = (-\infty, 12]$



ζ) $M = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$



η) $N = (-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$



***ΣΗΜΕΙΩΣΗ*:**

Όταν ένα άκρο δεν περιλαμβάνεται στο διάστημα, τότε το ζωγραφίζουμε στο γράφημα με ένα άδειο κυκλάκι, ενώ όταν περιλαμβάνεται στο διάστημα, το ζωγραφίζουμε το γράφημα με ένα γεμάτο κυκλάκι. Έτσι, μπορούμε να γνωρίζουμε πότε μια ακραία τιμή ανήκει στο διάστημα και πότε δεν ανήκει, χωρίς να έχουμε δει το διάστημα γραμμένο.

Παρατηρήσεις:

- Ένα διάστημα μπορεί να συνίσταται από επιμέρους διαστήματα. Τότε, το γράφουμε ως ένωση διαστημάτων. Αντίστοιχα μπορεί να οριστεί και ως τομή, όπου και κρατάμε τα κοινά στοιχεία αυτών, εάν υπάρχει.

- Στο ερώτημα (ζ) έχουμε στην πραγματικότητα όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από το. Είναι ένας άλλος τρόπος να γράψουμε την έκφραση $\alpha \in \mathbb{R}/\{4\}$, δηλαδή ότι ένα σημείο εξαιρείται.

- Στο ερώτημα (η) έχουμε στην πραγματικότητα όλο το $\mathbb{R}$. Γενικά, μπορούμε να γράψουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών ως ένωση άπειρων κλειστών συνόλων με εξαίρεση το δύο ακραία διαστήματα όπου στα $\pm\infty$ τα διαστήματα θα είναι ανοιχτά.