2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

Στόχοι της παραγράφου:

- Απόδειξη ανισοτήτων με ή χωρίς συνθήκη.
- Απόδειξη διπλής ανισότητας.
- Σύγκριση αριθμών.
- Εύρεση ελάχιστης και μέγιστης τιμής παραστάσεων.

Συνοπτική θεωρία:

Ιδιότητες ανισοτήτων

$$\left.\begin{array}{c} \alpha > \beta \\ \text{και} \\ \beta > \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \alpha > \gamma$$

$$\alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

Αν $\boldsymbol{\gamma > 0}$, τότε: $\alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

Αν $\boldsymbol{\gamma < 0}$, τότε: $\alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

Αν $\boldsymbol{\gamma > 0}$, τότε: $\alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}.$

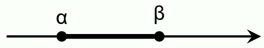
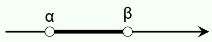
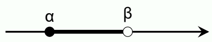
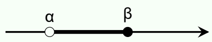
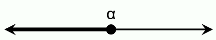
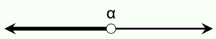
Αν $\boldsymbol{\gamma < 0}$, τότε: $\alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}.$

Για δύο **ομόσημους** αριθμούς α και β ισχύει $\alpha > \beta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}.$

$$\left.\begin{array}{c} \alpha > \beta \\ \text{και} \\ \gamma > \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \alpha + \gamma > \beta + \delta$$

Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι **θετικοί** αριθμοί τότε $\left.\begin{array}{c} \alpha > \beta \\ \text{και} \\ \gamma > \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Διαστήματα

Διάστημα	Ανισότητα	Συμβολισμός
	$\alpha \leq x \leq \beta$	$[\alpha, \beta]$
	$\alpha < x < \beta$	(α, β)
	$\alpha \leq x < \beta$	$[\alpha, \beta)$
	$\alpha < x \leq \beta$	$(\alpha, \beta]$
	$x \geq \alpha$	$[\alpha, +\infty)$
	$x > \alpha$	$(\alpha, +\infty)$
	$x \leq \alpha$	$(-\infty, \alpha]$
	$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$

Οπτικοποίηση με Geogebra

Εφαρμογή 1: Πώς βρίσκουμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της περιμέτρου και του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, γνωρίζοντας την αντίστοιχη μέγιστη και ελάχιστη τιμή των διαστάσεων του;

SCAN ME

Εφαρμογή 2: Η γεωμετρική απόδειξη 4 κομβικών ανισοτήτων οπτικοποιείται με πληρότητα και στόχευση στο γραφικό περιβάλλον της ακόλουθης δυναμικής εφαρμογής του Geogebra:

Μέρος Α. Γεωμετρική απόδειξη της ανισότητα

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

SCAN ME

Μέρος Β. Γεωμετρική απόδειξη της ανισότητας

$$4\alpha\beta \leq (\alpha + \beta)^2$$

SCAN ME

Μέρος Γ. Γεωμετρική απόδειξη της ανισότητας

$$\alpha\beta \leq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2.$$

SCAN ME

Πότε ισχύει η ισότητα;

Μέρος Δ. Γεωμετρική απόδειξη της ανισότητας

$$(\alpha+\beta)^2 \leq 2\alpha^2 + 2\beta^2$$

SCAN ME