

## Κεφάλαιο 2: Οι Πραγματικοί Αριθμοί

### 2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητές τους

#### Στόχοι της παραγράφου:

- Προσδιορισμός αριθμητικής τιμής μίας παράστασης.
- Απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων.

#### Συνοπτική θεωρία:

##### Ιδιότητες δυνάμεων

- |                                                  |                               |
|--------------------------------------------------|-------------------------------|
| • $a^k \cdot a^l = a^{k+l}$                      | • $\frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$ |
| • $(a^k)^l = a^{kl}$                             | • $(ab)^k = a^k b^k$          |
| • $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$ |                               |

### Αξιοσημείωτες ταυτότητες

- $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$  **Τετράγωνο αθροίσματος**
- $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$  **Τετράγωνο διαφοράς**
- $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$  **Διαφορά τετραγώνων**
- $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$  **Κύβος αθροίσματος**
- $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$  **Κύβος διαφοράς**
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$  **Άθροισμα κύβων**
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$  **Διαφορά κύβων**
- $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

### Μέθοδοι παραγοντοποίησης

- $\alpha x + \beta x = (\alpha + \beta)x$  **Κοινός παράγοντας**
- $\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y =$   
 $\alpha(x + y) + \beta(x + y) = (\alpha + \beta)(x + y)$  **Ομαδοποίηση**
- $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$  **Παραγοντοποίηση τριωνύμου**
- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$  **Διαφορά τετραγώνων**
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$  **Διαφορά κύβων**
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$  **Άθροισμα κύβων**
- $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$   
 $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$  **Τέλειο τετράγωνο**

## Οπτικοποίηση με Geogebra

**Εφαρμογή 1:** Μία δυναμική γεωμετρική εφαρμογή, απόδειξης της ταυτότητας τετραγώνου αθροίσματος δύο αριθμών  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$



**Εφαρμογή 2:** Τρεις αποκαλυπτικές διαδραστικές εφαρμογές, γεωμετρικής αποδόμησης της ταυτότητας διαφοράς τετραγώνων  $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

**Μέρος Α.**



**Μέρος Β.**



**Μέρος Γ.**



**Εφαρμογή 3:** Μία αποκαλυπτική διαδραστική εφαρμογή απόδειξης της ταυτότητας τετραγώνου αθροίσματος τριών αριθμών  $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$



**Εφαρμογή 4:** Η γεωμετρική απόδειξη της ταυτότητας κύβου αθροίσματος δύο αριθμών  $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$  είναι εδώ και μας καλεί να την ανακαλύψουμε μέσα από την οπτικοποίηση του Geogebra:



**Εφαρμογή 5:** Μία δυναμική εφαρμογή απόδειξης της ταυτότητας διαφοράς κύβων δύο αριθμών  $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$



**Εφαρμογή 6:** Μία δυναμική εφαρμογή απόδειξης ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι ίση με το άθροισμά τους:

