Ακαδημαϊκό έτος 2021-2022

ΘΕ: ΠΛΗ10

1η Γραπτή Εργασία

Εισαγωγή στην Επιστήμη των Η/Υ

Υποεργασία 1η (35 μονάδες)

Άσκηση Ι

ερώτημα (Α)

Πρόκειται για το χρώμα #9966FF, με τις παρακάτω χρωματικές συνιστώσες:

$$R: 99_{(16)} = 9\times16^1 + 9\times16^0 = 9\times16 + 9\times1 = 144 + 9 = \underline{153_{(10)}}\ \text{Red}$$

$$G: 66_{(16)} = 6\times16^1 + 6\times16^0 = 6\times16 + 6\times1 = 96 + 6 = \underline{102_{(10)}}\ \text{Green}$$

$$B: FF_{(16)} = 15\times16^1 + 15\times16^1 = 15\times16 + 15\times1 = 240 + 15 = \underline{255_{(10)}}\ \text{Blue}$$

ερώτημα (Β)

Πρόκειται για το χρώμα #000099, με τις παρακάτω χρωματικές συνιστώσες:

$$R: 00_{(16)}, G: 00_{(16)}, B: 99_{(16)}$$

Αυξάνουμε την χρωματική συνιστώσα Red από $00_{(16)}$ στο μέγιστο δυνατό $FF_{(16)}$ οπότε το χρώμα που θα προκύψει είναι το #FF0099

ερώτημα (Γ)

Θέλουμε να μετατρέψουμε έναν αριθμό από το δυαδικό στο οκταδικό αριθμητικό σύστημα. Ομαδοποιούμε τα δυαδικά ψηφία σε τριάδες από δεξιά προς τα αριστερά, συμπληρώνοντας με όσα 0 χρειαστούν αριστερότερα και τις μετατρέπουμε στα αντίστοιχα οκταδικά ψηφία:

$\underbrace{001}_{1} | \underbrace{100}_{4} | \underbrace{101}_{5} | \underbrace{001}_{1} | \underbrace{001}_{1} | \underbrace{111}_{7}$ άρα πρόκειται για τον αριθμό $\underline{145117_{(8)}}$ στο οκταδικό

ερώτημα (Δ)

Στη γραμμή 4, στήλη 2 έχουμε το χρώμα #996633

Στη γραμμή 1, στήλη 2 έχουμε το χρώμα #0000CC

Θα προσθέσουμε τις χρωματικές συνιστώσες χωριστά, κάνοντας πράξεις στο δεκαεξαδικό:

$$\begin{array}{r} 99_{(16)} \\ +00_{(16)} \\ \hline 99_{(16)} \end{array} \quad \begin{array}{r} 66_{(16)} \\ +00_{(16)} \\ \hline 66_{(16)} \end{array} \quad \begin{array}{r} 33_{(16)} \\ +CC_{(16)} \\ \hline FF_{(16)} \end{array}$$

Το χρώμα που θα προκύψει είναι το #9966FF

Άσκηση II

Θα σχηματίσουμε επτάδες δυαδικών ψηφίων για το τμήμα PLI10-HLE43 της εκφώνησης, εντοπίζοντας το γράμμα ή σύμβολο στον πίνακα και παίρνοντας τα 3 MSb (Most Significant bits, τα αριστερότερα bits) καθέτως και τα 4 LSb (Least Significant bits, τα δεξιότερα bits) οριζοντίως, εσείς θα πράξετε ομοίως για το δικό σας τμήμα:

$\boxed{\text{P}}:101\quad 0000$

$\boxed{\text{L}}:100\quad 1100$

$\boxed{\text{I}}:100\quad 1001$

$\boxed{1}:011\quad 0001$

$\boxed{0}:011\quad 0000$

$\boxed{-}:010\quad 1101$

$\boxed{\text{H}}:100\quad 1000$

$\boxed{\text{L}}:100\quad 1100$

$\boxed{\text{E}}:100\quad 0101$

$\boxed{4}:011\quad 0100$

$\boxed{3}:011\quad 0011$

Οπότε:

$$\underbrace{1010000}_{\text{P}}\,\underbrace{1001100}_{\text{L}}\,\underbrace{1001001}_{\text{I}}\,\underbrace{0110001}_{1}\,\underbrace{0110000}_{0}\,\underbrace{0101101}_{-}\,\underbrace{1001000}_{\text{H}}\,\underbrace{1001100}_{\text{L}}\,\underbrace{1000101}_{\text{E}}\,\underbrace{0110100}_{4}\,\underbrace{0110011}_{3}$$

Άσκηση III

ερώτημα (A)

Για τον αριθμό $+12{,}125_{(10)}$:

- εκτελούμε διαδοχικές διαιρέσεις του ακέραιου μέρους με το 2 καταγράφοντας τα Υπόλοιπα:

  $12 \div 2 = 6$ και $b_0 = Y = 0$

  $6 \div 2 = 3$ και $b_1 = Y = 0$

  $3 \div 2 = 1$ και $b_2 = Y = 1$

  $1 \div 2 = \underline{\underline{0}}$ και $b_3 = Y = 1$

  και σταματάμε εδώ αφού το πηλίκο μηδενίστηκε, οπότε $12_{(10)} = \underset{b_3}{1}\,\underset{b_2}{1}\,\underset{b_1}{0}\,\underset{b_0}{0} = 1100_{(2)}$

- εκτελούμε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς με το 2 στο κλασματικό μέρος καταγράφοντας και αφαιρώντας τα Ακέραια μέρη που προκύπτουν κάθε φορά:

  $0{,}125 \times 2 = \boxed{0}{,}25$ και $b_{-1} = A = 0$

$0,25 \times 2 = \boxed{0},5$ και $b_{-2} = A = 0$

$0,5 \times 2 = \boxed{1},\underline{\underline{0}}$ και $b_{-3} = A = 1$

και σταματάμε αφού το κλασματικό μηδενίστηκε, οπότε $0,125_{(10)} = 0,\underset{b_{-1}}{0}\underset{b_{-2}}{0}\underset{b_{-3}}{1} = 0,001_{(2)}$

- ο αριθμός που προκύπτει είναι ο:

$$+1100,001_{(2)} = +1100,001_{(2)} \times 2^0 = \underbrace{+}_{s}\underbrace{1}_{i},\underbrace{100001}_{f}{}_{(2)} \times 2^{\overset{e}{\overbrace{3}}}$$ και σύμφωνα με το πρότυπο IEEE754

$s: 0$, θετικός (πρόσημο, sign)

$e: 3$, (ο εκθέτης, exponent) άρα

$e_{biased}: e + bias = 3 + 127 = 130_{(10)} = 10000010_{(2)}$[1] (ο πολωμένος εκθέτης, biased exponent)

$m: 1,100001_{(2)}$ ο αριθμός κανονικοποιημένος με implicit bit (εννοούμενο bit) '1' αριστερά στο ακέραιο μέρος του (normalized mantissa) άρα

$f: 100001_{(2)} = 10000100000000000000000_{(2)}$ (το κλασματικό μέρος, fraction)

επομένως $+12,125_{(10)} = \underbrace{0}_{s}\ \underbrace{10000010}_{e_{biased}}\ \underbrace{10000100000000000000000}_{fraction}{}_{(IEEE754,sp)}$

Για τον αριθμό $-9,625_{(10)}$:

- εκτελούμε διαδοχικές διαιρέσεις του ακέραιου μέρους με το 2 καταγράφοντας τα Υπόλοιπα:

$9 \div 2 = 4$ και $b_0 = Y = 1$

$4 \div 2 = 2$ και $b_1 = Y = 0$

$2 \div 2 = 1$ και $b_2 = Y = 0$

$1 \div 2 = \underline{\underline{0}}$ και $b_3 = Y = 1$

και σταματάμε εδώ αφού το πηλίκο μηδενίστηκε, οπότε $9_{(10)} = \underset{b_3}{1}\underset{b_2}{0}\underset{b_1}{0}\underset{b_0}{1} = 1001_{(2)}$

- εκτελούμε διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς με το 2 στο κλασματικό μέρος καταγράφοντας και αφαιρώντας τα Ακέραια μέρη που προκύπτουν κάθε φορά:

$0,625 \times 2 = \boxed{1},25$ και $b_{-1} = A = 1$

$0,25 \times 2 = \boxed{0},5$ και $b_{-2} = A = 0$

$0,5 \times 2 = \boxed{1},\underline{\underline{0}}$ και $b_{-3} = A = 1$

και σταματάμε αφού το κλασματικό μηδενίστηκε, οπότε $0,625_{(10)} = 0,\underset{b_{-1}}{1}\underset{b_{-2}}{0}\underset{b_{-3}}{1} = 0,101_{(2)}$

- ο αριθμός που προκύπτει είναι ο:

[1] όπου η πόλωση bias=2^{8-1}-1=127 για το IEEE754 single precision

$$-1001{,}101_{(2)} = -1001{,}101_{(2)} \times 2^{0} = \underbrace{-}_{s}\overbrace{\underbrace{1}_{i},\underbrace{001101}_{f}}^{m}{}_{(2)} \times 2^{\overset{e}{3}}$$ και σύμφωνα με το πρότυπο IEEE754

$s:1$, αρνητικός (πρόσημο, sign)

$e:3$, (ο εκθέτης, exponent) άρα

$e_{biased}: e + bias = 3 + 127 = 130_{(10)} = 10000010_{(2)}$ (ο πολωμένος εκθέτης, biased exponent)

$m: 1{,}001101_{(2)}$ ο αριθμός κανονικοποιημένος με implicit bit (εννοούμενο bit) ‘1’ αριστερά στο ακέραιο μέρος του (normalized mantissa) άρα

$f: 001101_{(2)} = 00110100000000000000000_{(2)}$ (το κλασματικό μέρος, fraction)

επομένως $-9{,}625_{(10)} = \underbrace{1}_{s}\ \underbrace{10000010}_{e_{biased}}\ \underbrace{00110100000000000000000}_{fraction}{}_{(IEEE754,sp)}$

ερωτήματα (Β),(Δ)

Στην εκφώνηση δεν αναφέρεται ξεκάθαρα αν ζητούνται οι normalized ή denormalized αριθμοί, εμείς θα τους υπολογίσουμε όλους και ζητείστε διευκρινήσεις από τους ΣΕΠ σας.

Παίρνουμε το $0_{(10)}$, το οποίο στο πρότυπο IEEE-754 γράφεται προσημασμένο ως:

$$\pm 0_{(10)} = \underbrace{x}_{s}\ \underbrace{00000000}_{e_{biased}}\ \underbrace{00000000000000000000000}_{fraction}{}_{(IEEE754,sp)}$$ (όπου x το πρόσημό του)

και του προσθέτουμε την μικρότερη δυνατή ποσότητα (έναν ‘1’ δεξιότερα στο fraction), κρατώντας τον πολωμένο εκθέτη στο $00000000_{(2)}$ που υποδηλώνει denormalized mantissa και ο οποίος για denormalized αριθμούς[2] αντιστοιχεί στο 2^{-126}, οπότε:

Β]: min + denormalized $\underbrace{0}_{s}\ \underbrace{00000000}_{e_{biased}}\ \underbrace{00000000000000000000001}_{fraction}{}_{(IEEE754,sp)} = +2^{-23} \times 2^{-126} = +2^{-149}$

Δ]: max – denormalized $\underbrace{1}_{s}\ \underbrace{00000000}_{e_{biased}}\ \underbrace{00000000000000000000001}_{fraction}{}_{(IEEE754,sp)} = -2^{-23} \times 2^{-126} = -2^{-149}$

Οι αντίστοιχοι normalized αριθμοί (αν διευκρινιστεί ότι αυτοί ζητούνται) θα είναι:

min + normalized $\underbrace{0}_{s}\ \underbrace{00000001}_{e_{biased}}\ \underbrace{00000000000000000000000}_{fraction}{}_{(IEEE754,sp)} = +1 \times 2^{1-127} = +2^{-126}$

max – normalized $\underbrace{1}_{s}\ \underbrace{00000001}_{e_{biased}}\ \underbrace{00000000000000000000000}_{fraction}{}_{(IEEE754,sp)} = -1 \times 2^{1-127} = -2^{-126}$

ερωτήματα (Γ),(Ε)

Παίρνουμε το $+1_{(10)}$, το οποίο στο πρότυπο IEEE-754 γράφεται ως:

[2] denormalized αριθμοί, είναι αυτοί που έχουν $e_{biased} = 0$ και $f \neq 0$, με $e = -126$ εξ’ορισμού

$$+1_{(10)} = \underbrace{1}_{s}\ \underbrace{01111111}_{e_{biased}}\ \underbrace{00000000000000000000000}_{fraction}{}_{(IEEE754,sp)}$$

και του αφαιρούμε (για το Γ]) ή προσθέτουμε (για το Ε]) την μικρότερη δυνατή ποσότητα (έναν '1' δεξιότερα στο fraction). Στο Γ] όμως λόγω της κανονικοποίησης (normalization) που θα χρειαστεί μετά την αφαίρεση θα προκύψει δεξιότερα στο fraction ένα '0' το οποίο κάνοντάς το '1' θα πλησιάσουμε ακόμα πιο κοντά στο $+1_{(10)}$ (από τα αριστερά του), οπότε:

Γ]: max <1 $\underbrace{0}_{s}\,\underbrace{01111110}_{e_{biased}}\,\underbrace{11111111111111111111111}_{fraction}{}_{(IEEE754,sp)} = +(2-2^{-23})\times 2^{126-127} = +(1-2^{-24})$

Ε]: min >1 $\underbrace{0}_{s}\,\underbrace{01111111}_{e_{biased}}\,\underbrace{00000000000000000000001}_{fraction}{}_{(IEEE754,sp)} = +(1+2^{-23})\times 2^{127-127} = +(1+2^{-23})$

Μπορείτε να επαληθεύσετε τους παραπάνω υπολογισμούς στον ιστότοπο
https://www.h-schmidt.net/FloatConverter/IEEE754.html

Υποεργασία 2η (20 μονάδες)

Άσκηση Α

1η Εντολή: 0001 που αντιστοιχεί σε ενέργεια $A \leftarrow [M]$

με διεύθυνση $M = 000000001110$ και περιεχόμενα $[M] = 0000000000001001$,

επομένως στον συσσωρευτή Α ανατίθεται η τιμή $0000000000001001_{(2)}$ ή $9_{(10)}$

2η Εντολή: 0011 που αντιστοιχεί σε ενέργεια $A \leftarrow A + [M]$

με διεύθυνση $M = 000000001011$ και περιεχόμενα $[M] = 0000000000000011$,

επομένως στον συσσωρευτή Α με τιμή $0000000000001001_{(2)}$ από προηγουμένως,

προστίθεται η τιμή $0000000000000011_{(2)}$:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ \ } \\ 0000000000001001 \\ +\ 0000000000000011 \\ \hline \mathbf{0000000000001100} \end{array}$$

οπότε ο συσσωρευτής Α θα αποκτήσει την τιμή $0000000000001100_{(2)}$ ή $12_{(10)}$

3η Εντολή: 0100 που αντιστοιχεί σε ενέργεια $A \leftarrow A - [M]$

με διεύθυνση $M = 111001111000$ και περιεχόμενα $[M] = 0000000000000101$,

επομένως από τον συσσωρευτή Α που έχει τιμή $0000000000001100_{(2)}$ από πριν,

αφαιρείται η τιμή $0000000000000101_{(2)}$, όμως η πράξη της αφαίρεσης ανάγεται σε πρόσθεση του Συμπληρώματος ως προς 2 του αφαιρετέου, που υπολογίζεται από το Συμπλήρωμα ως προς 1 του αφαιρετέου στο οποίο προσθέτουμε το 1:

$0000000000000101_{(2)} \rightarrow 1111111111111010_{(\Sigma 1)}$

$1111111111111010_{(\Sigma 1)} + 1 = 1111111111111011_{(\Sigma 2)}$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle \color{red}{1\ 1}\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ \ \ \ } \\ 0000000000001100 \\ +\ 1111111111111011 \\ \hline \mathbf{0000000000000111} \end{array}$$

οπότε ο συσσωρευτής Α θα αποκτήσει την τιμή $0000000000000111_{(2)}$ ή $7_{(10)}$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η πράξη στο Σ2 είναι πράγματι σωστή καθώς τα κρατούμενα που προέκυψαν στις 2 τελευταίες βαθμίδες της πρόσθεσης (με κόκκινο χρώμα) ταυτίζονται.

Άσκηση Β

i. Μετατρέπουμε πρώτα τις διευθύνσεις:

$$0B1_{(16)} = 0 \times 16^2 + 11 \times 16^1 + 1 \times 16^0 = 0 + 176 + 1 = 177_{(10)}$$

$0B2_{(16)} = 0\times16^2 + 11\times16^1 + 2\times16^0 = 0 + 176 + 2 = 178_{(10)}$

$0B3_{(16)} = 0\times16^2 + 11\times16^1 + 2\times16^0 = 0 + 176 + 3 = 179_{(10)}$

Κατόπιν μετατρέπουμε και τα περιεχόμενα της μνήμης:

$0892_{(16)} = 0\times16^3 + 8\times16^2 + 9\times16^1 + 2\times16^0 = 0 + 2048 + 144 + 2 = 2194_{(10)}$

$0A01_{(16)} = 0\times16^3 + 10\times16^2 + 0\times16^1 + 1\times16^0 = 0 + 2560 + 0 + 1 = 2561_{(10)}$

$0F94_{(16)} = 0\times16^3 + 15\times16^2 + 9\times16^1 + 4\times16^0 = 0 + 3840 + 144 + 4 = 3988_{(10)}$

ii. Αναλύουμε τις εντολές μία-μία:

1η Εντολή: LDA 0B1 που αντιστοιχεί σε ενέργεια $A \leftarrow [0B1_{(16)}]$

επομένως στον συσσωρευτή Α ανατίθεται η τιμή $0892_{(16)}$

2η Εντολή: CMA που αντιστοιχεί σε ενέργεια $A \leftarrow \overline{A}$

επομένως τα περιεχόμενα του συσσωρευτή Α Συμπληρώνονται ως προς 1

$A = 0892_{(16)} = \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{1000}_{8}\ \underbrace{1001}_{9}\ \underbrace{0010}_{2} = 0000\,1000\,1001\,0010_{(2)}$

άρα $\overline{A} = 1111\,0111\,0110\,1101_{(2)} = \underbrace{1111}_{F}\ \underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{1101}_{D} = F76D_{(16)}$, δηλαδή

μετά την εκτέλεση της 2ης εντολής ο συσσωρευτής Α περιέχει την τιμή $F76D_{(16)}$

3η Εντολή: STA 0B1 που αντιστοιχεί σε ενέργεια $[0B1_{(16)}] \leftarrow A$

επομένως στη θέση μνήμης $0B1_{(16)}$ θα εγγραφούν τα τρέχοντα περιεχόμενα του συσσωρευτή Α, δηλαδή η τιμή $F76D_{(16)}$

Υποεργασία 3η (20 μονάδες)

Άσκηση Α

Μεθοδολογικά, βάζουμε γράμματα σε όλα τα κομβικά σημεία ενός κυκλώματος (στην περίπτωσή μας αυτό έχει ήδη γίνει) και ξεκινάμε δεξιά από την έξοδο προχωρώντας προς τις εισόδους, καταγράφοντας και αντικαθιστώντας τις πύλες και τις μεταβλητές αλγεβρικά.

Για το 1ο κύκλωμα:

$$K = D + E + F = \underline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot C + A\cdot\overline{B}}$$

Για το 2ο κύκλωμα:

$$L = H + I = \underline{A\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot C}$$

Άσκηση Β

Μεθοδολογικά, για κάθε γραμμή του Πίνακα Αλήθειας (τριπλέτα των μεταβλητών εισόδου), αποτιμούμε τις συναρτήσεις και σημειώνουμε στον Π.Α. την αποτίμηση αυτή. Π.χ.:

για A=0,B=0,C=0 έχουμε $K = \overline{0}\cdot\overline{0}\cdot 0 + \overline{0}\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot\overline{0} = 1\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0 + 0 + 0 = 0$

και $L = 0\cdot\overline{0} + \overline{0}\cdot 0 = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0 + 0 = 0$

για A=0,B=0,C=1 έχουμε $K = \overline{0}\cdot\overline{0}\cdot 1 + \overline{0}\cdot 0\cdot 1 + 0\cdot\overline{0} = 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 1 + 0\cdot 1 = 1 + 0 + 0 = 1$

και $L = 0\cdot\overline{0} + \overline{0}\cdot 1 = 0\cdot 1 + 1\cdot 1 = 0 + 1 = 1$

για A=1,B=1,C=0 έχουμε $K = \overline{1}\cdot\overline{1}\cdot 0 + \overline{1}\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot\overline{1} = 0\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0$

και $L = 1\cdot\overline{1} + \overline{1}\cdot 0 = 1\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0 + 0 = 0$

Συγκεντρώνουμε όλες τις αποτιμήσεις στον παρακάτω Πίνακα Αλήθειας:

A	B	C	K	L
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

Άσκηση Γ

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι συναρτήσεις K και L έχουν τις ίδιες αποτιμήσεις (οι στήλες K και L στον Π.Α. ταυτίζονται), δηλαδή οι K και L είναι ισοδύναμες κι επομένως όποια από τις δύο και αν χρησιμοποιηθεί δεν θα επηρεαστεί η λειτουργία της κλειδαριάς.

Υποεργασία 4η (25 μονάδες)

Άσκηση Α

Αναπτύσσουμε τις προτάσεις, από φυσική γλώσσα σε αλγεβρικές Boolean εκφράσεις:

1. $(\text{Παντρεμένη})\,\text{και}\,(\text{Γυναίκα})\,\text{και}\,(\text{Άνω των 25})$

   και ισοδύναμα $\underbrace{(\text{Παντρεμένη})}_{B}\,\text{και}\,\underbrace{(\text{όχι Ανδρας})}_{\overline{C}}\,\text{και}\,\underbrace{(\text{όχι Κάτω των 25})}_{\overline{D}} = B{\cdot}\overline{C}{\cdot}\overline{D}$

2. $(\text{Γυναίκα})\,\text{και}\,(\text{Κάτω των 25})$

   και ισοδύναμα $\underbrace{(\text{όχι Άνδρας})}_{\overline{C}}\,\text{και}\,\underbrace{(\text{Κάτω των 25})}_{D} = \overline{C}{\cdot}D$

3. $\underbrace{(\text{Παντρεμένος})}_{B}\,\text{και}\,\underbrace{(\text{Άνδρας})}_{C}\,\text{και}\,\underbrace{(\text{Κάτω των 25})}_{D}\,\text{και}\,\underbrace{(\text{όχι Ατύχημα})}_{\overline{A}} = B{\cdot}C{\cdot}D{\cdot}\overline{A} = \overline{A}{\cdot}B{\cdot}C{\cdot}D$

4. $\underbrace{(\text{Παντρεμένος})}_{B}\,\text{και}\,\underbrace{(\text{Άνδρας})}_{C}\,\text{και}\,\underbrace{(\text{Ατύχημα})}_{A} = B{\cdot}C{\cdot}\overline{A} = A{\cdot}B{\cdot}C$

5. $(\text{Παντρεμένος})\,\text{και}\,(\text{Άνδρας})\,\text{και}\,(\text{Άνω των 25})\,\text{και}\,(\text{όχι Ατύχημα})$ και ισοδύναμα

   $\underbrace{(\text{Παντρεμένος})}_{B}\,\text{και}\,\underbrace{(\text{Ανδρας})}_{C}\,\text{και}\,\underbrace{(\text{όχι Κάτω των 25})}_{\overline{D}}\,\text{και}\,\underbrace{(\text{όχι Ατύχημα})}_{\overline{A}} = B{\cdot}C{\cdot}\overline{D}{\cdot}\overline{A} = \overline{A}{\cdot}B{\cdot}C{\cdot}\overline{D}$

Άσκηση Β

Η ζητούμενη έκφραση είναι $(1)\,\acute{\eta}\,(2)\,\acute{\eta}\,(3)\,\acute{\eta}\,(4)\,\acute{\eta}\,(5)$ και με αντικατάσταση των προτάσεων:

$$F = B{\cdot}\overline{C}{\cdot}\overline{D} + \overline{C}{\cdot}D + \overline{A}{\cdot}B{\cdot}C{\cdot}D + A{\cdot}B{\cdot}C + \overline{A}{\cdot}B{\cdot}C{\cdot}\overline{D}$$

Άσκηση Γ

Μεθοδολογικά, Αποτιμούμε την συνάρτηση F για κάθε τριπλέτα των μεταβλητών εισόδου (γραμμές του Πίνακα Αλήθειας) και δημιουργούμε τον Π.Α. (όπως στην Υποεργασία 3). Προς επαλήθευση, παραθέτουμε παραδειγματικά μερικά στιγμιότυπα:

για A=0,B=0,C=0,D=0 έχουμε

$$F = 0{\cdot}\overline{0}{\cdot}\overline{0} + \overline{0}{\cdot}0 + \overline{0}{\cdot}0{\cdot}0{\cdot}0 + 0{\cdot}0{\cdot}0 + \overline{0}{\cdot}0{\cdot}0{\cdot}\overline{0} = 0{\cdot}1{\cdot}1 + 1{\cdot}0 + 1{\cdot}0{\cdot}0{\cdot}0 + 0{\cdot}0{\cdot}0 + 1{\cdot}0{\cdot}0{\cdot}1 = 0+0+0+0+0 = 0$$

για A=0,B=0,C=0,D=1 έχουμε

$$F = 0{\cdot}\overline{0}{\cdot}\overline{1} + \overline{0}{\cdot}1 + \overline{0}{\cdot}0{\cdot}0{\cdot}1 + 0{\cdot}0{\cdot}0 + \overline{0}{\cdot}0{\cdot}0{\cdot}\overline{1} = 0{\cdot}1{\cdot}0 + 1{\cdot}1 + 1{\cdot}0{\cdot}0{\cdot}1 + 0{\cdot}0{\cdot}0 + 1{\cdot}0{\cdot}0{\cdot}0 = 0+1+0+0+0 = 1$$

για A=0,B=1,C=0,D=1 έχουμε

$$F = 1{\cdot}\overline{0}{\cdot}\overline{1} + \overline{0}{\cdot}1 + \overline{0}{\cdot}1{\cdot}0{\cdot}1 + 0{\cdot}1{\cdot}0 + \overline{0}{\cdot}1{\cdot}0{\cdot}\overline{1} = 1{\cdot}1{\cdot}1 + 1{\cdot}1 + 1{\cdot}1{\cdot}0{\cdot}1 + 0{\cdot}1{\cdot}0 + 1{\cdot}1{\cdot}0{\cdot}0 = 1+1+0+0+0 = 1$$

για A=1,B=1,C=0,D=1 έχουμε

$$F = 1{\cdot}\overline{0}{\cdot}\overline{1} + \overline{0}{\cdot}1 + \overline{1}{\cdot}1{\cdot}0{\cdot}1 + 1{\cdot}1{\cdot}0 + \overline{1}{\cdot}1{\cdot}0{\cdot}\overline{1} = 1{\cdot}1{\cdot}0 + 1{\cdot}1 + 0{\cdot}1{\cdot}0{\cdot}1 + 1{\cdot}1{\cdot}0 + 0{\cdot}1{\cdot}0{\cdot}0 = 0+1+0+0+0 = 1$$

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Άσκηση Δ

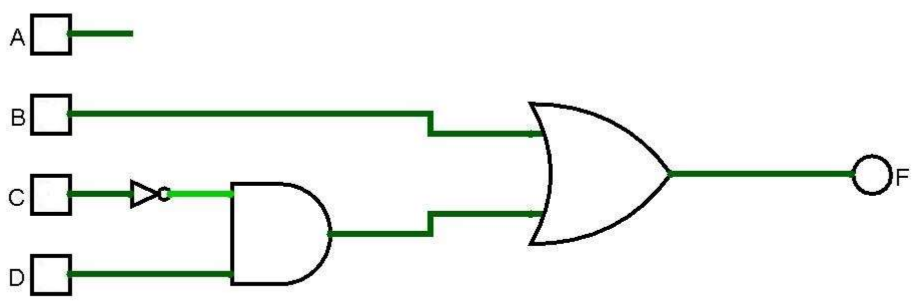
Αν και δεν ζητείται ξεκάθαρα από την εκφώνηση, μπορούμε να δείξουμε με αλγεβρικές πράξεις ότι πράγματι η F απλοποιείται σε $F = B + \overline{C}\cdot D$:

$$F = \underbrace{B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + \overline{C}\cdot D}_{\substack{\overline{C}\cdot(B\cdot\overline{D}+D)= \\ \overline{C}\cdot(B+D)\cdot(\overline{D}+D)= \\ \overline{C}\cdot(B+D)\cdot 1= \\ B\cdot\overline{C}+\overline{C}\cdot D}} + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D} =$$

$$\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot(D+\overline{D}) = \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot 1 = \overline{A}\cdot B\cdot C$$

$$= B\cdot\overline{C} + \overline{C}\cdot D + \underbrace{A\cdot B\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot C}_{\substack{(A+\overline{A})\cdot B\cdot C= \\ 1\cdot B\cdot C= \\ B\cdot C}} = \underbrace{B\cdot\overline{C} + \overline{C}\cdot D + B\cdot C}_{\substack{B\cdot(\overline{C}+C)= \\ B\cdot 1= \\ B}} = B + \overline{C}\cdot D$$

Έτσι το ζητούμενο κύκλωμα θα είναι:



Σολωμού 29, ΤΚ: 106 82 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 email: info@arnos.gr website: www.arnos.gr